ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 3–14

УДК 119.1

ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОМБИНАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ РАЗБИЕНИЙ

А. А. Балагура, О. В. Кузьмин

Аннотация. Найдены перечислительные интерпретации однородных полиномов Платонова и их обобщений. Предложен комбинаторный подход к решению четвёртой задачи Шрёдера (произвольные расстановки скобок в множестве) и её обобщения. Рассмотрены некоторые вопросы перечисления деревьев.

Ключевые слова: комбинаторный полином разбиений, корневое дерево, четвёртая задача Шрёдера.

Введение

Комбинаторные полиномы широко применяются при моделировании дискретных вероятностных распределений и описании некоторых структур и процессов техники и естествознания [1, 4]. Актуальной является задача нахождения перечислительных интерпретаций комбинаторных полиномов. В разд. 1 приводятся производящие функции и явный вид однородных полиномов Белла [5] и Платонова [4], T-полиномов Тушара [5] и сопряжённых им P-полиномов [2]. Вводятся основные определения перечисляемых объектов. В разд. 2 доказывается теорема о перечислительной интерпретации B-полиномов в терминах деревьев. Предлагается комбинаторный подход к решению четвёртой задачи Шрёдера (произвольные расстановки скобок в множестве) [6] и её обобщения. В разд. 3 рассматриваются следствия теоремы: перечислительная интерепретация P-полиномов, явный вид и свойства новых комбинаторных объектов — обобщённых расщеплённых чисел Шрёдера, порядковая структура перечисляемого множества деревьев.

1. Основные понятия

1.1. Комбинаторные полиномы разбиений. *Разбиением* натурального числа n называется набор натуральных чисел, в сумме составляющих n, причём порядок слагаемых безразличен. Если $n = \sum\limits_{i=1}^{n} ir_i$, то последовательность $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ называется *спецификацией разбиения.*

Разобьём n-множество по крайней мере на два блока. Затем разобьём каждый блок, состоящий более чем из одного элемента, на два блока. Продолжая разбивать блоки, содержащие хотя бы два элемента, на не менее чем два блока, добьёмся того, что каждый блок состоит из одного элемента. Эта процедура называется *полным разбиением* [6].

Пусть $g = (g_1, g_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — последовательности формальных переменных. Используя члены поледовательности g, строим следующие разложения [1]:

$$e^{xg(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} A_{nk}(g) x^k \frac{t^n}{n!}, \tag{1}$$

$$e^{x\overline{g}(u)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} B_{nk}(g) x^k \frac{u^n}{n!}, \tag{2}$$

где $g(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{g_i t^i}{i!}$ и $\overline{g}(u) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{g}_i u^i}{i!}$ — взаимно обратные функции, т. е. $\overline{g}(g(t)) = t$.

Функции $A_{nk}(g)$ и $B_{nk}(g)$ в правой части выражений (1) и (2) называют *однородными полиномами Белла* (или *A-полиномами*) и *однородными полиномами Платонова* (или *B-полиномами*) соответственно.

Известен явный вид A-полиномов (см., например, [5]):

$$A_{nk}(g) = n! \sum_{n,\,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где суммирование ведётся по всем разбиениям натурального n на k натуральных слагаемых, т. е. по всем наборам $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-k+1})$ целых неотрицательных чисел таким, что $\sum\limits_{i=1}^{n-k+1} r_i = k$, $\sum\limits_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n$.

B-полиномы имеют вид [4]:

$$B_{nk}(g) = (-1)^{n-k} \left[(k-1)! g_1^{2n-k}\right]^{-1} \sum_{2n-2k,\, n-k} (-1)^{r_1} r_1! (2n-k-r_1-1)!$$
$$\times \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Дополнительно полагают $A_{nn}(g) = g_1^n$, $B_{nn}(g) = g_1^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Отметим, что при $g_1 = 1$, $g_i = -1$, $i \geqslant 2$, $B_{nk}(g) = S_{nk}$, где S_{nk} — обобщённые (а при $k = 1$ обычные) числа Шрёдера [1].

Рассмотрим важные обобщения A- и B-полиномов: полиномы, построенные по двум последовательностям разбиений.

Используя члены поледовательностей x, y, строим следующие разложения (см., например, [1, 2]):

$$\frac{(x(t))^k}{k!}e^{y(t)} = \sum_{n=k}^{\infty} T_{nk}(x,\ y)\frac{t^n}{n!}, \tag{3}$$

$$\frac{(\overline{x}(u))^k}{k!}e^{-y\overline{x}(u)} = \sum_{n=k}^{\infty} P_{nk}(x,\ y)\frac{u^n}{n!}, \tag{4}$$

где $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i t^i}{i!}$ и $\overline{x}(u) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{x}_i u^i}{i!}$ — взаимно обратные функции.

Функции $T_{nk}(g)$ и $P_{nk}(g)$ в правой части выражений (3) и (4) называют *полиномами Тушара* (или *T-полиномами*) и *P-полиномами* соответственно. Известен явный вид T-полиномов [5]:

$$T_{nk}(x,\ y) = n! \sum_{n \rhd k} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} y_i^{r_i} [k_i! r_i! (i!)^{k_i + r_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant n,$$

где суммирование ведётся по всем таким наборам целых неотрицательных чисел, что $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$, $\sum\limits_{i=1}^{n} i(k_i + r_i) = n$. Дополнительно полагают $T_{00}(x,\ y) = 1$.

P-полиномы имеют вид [2]:

$$P_{nk}(x, y) = (-1)^{n-k}\left[k! x_1^{2n-k}\right]^{-1} \sum_{2n-2k \rhd n-k} (-1)^{k_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i} k_1!(2n-k-k_1-1)!$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} i r_i + k\right) x_i^{k_i} y_i^{r_i} [k_i! r_i! (i!)^{k_i + r_i}]^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Дополнительно полагают $P_{nn}(x,\ y) = {x_1}^{-n},\ n \geqslant 1$.

1.2. Деревья. Нам понадобятся следующие определения.

Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d — множество вершин с одной специально выбранной вершиной, называемой *корнем* дерева d, и оставшимися вершинами (исключая корень), разбитыми на $m \geqslant 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом. Вершины, не имеющие преемников, называются *концевыми*. Вершины, имеющие преемников, называют *внутренними*.

Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами 1, 2, ..., n. Повторяем следующую процедуру до тех пор, пока все вершины, кроме корня, не окажутся помеченными [6]. Пометим числом $n+1$ вершину v такую, что а) вершина v не помечена, а все её преемники помечены; б) среди всех непомеченных вершин, все преемники которых помечены, v является вершиной, имеющей преемника с наименьшей меткой. Полученное дерево называется *помеченным*.

Пусть $n \geqslant 2$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим через $D(n)$ множество помеченных корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин, у которых из каждой внутренней вершины (и корня) исходит не менее двух вершин, через $D(n, k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

Существует естественное соответствие между полными разбиениями и деревьями [6].

Четвёртая задача Шрёдера (произвольной расстановки скобок в n-множестве) и её обобщение, сформулированные в терминах деревьев, состоят в подсчёте мощности множеств $D(n)$ и $D(n, k)$ соответственно.

Стандартной формой корневого дерева назовём такое его изображение, при котором слева направо не убывают количество внутренних вершин от корня до каждой концевой вершины и количество концевых вершин каждой из внутренних вершин, имеющих одного ближайшего предка. Далее будем предполагать, что рассматриваемые деревья записаны в стандартной форме.

2. Перечисление деревьев

Обозначим через π_n множество всех n-перестановок, π_n^k — множество перестановок $\pi \in \pi_n$, имеющих в точности k циклов.

Сопоставим каждому дереву $d \in D(n, k)$ перестановку $\pi(d) \in \pi_n^k$ по следующему правилу.

Правило 1. Пусть $\left(p_1^i, \ldots, p_j^i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, — последовательность всех концевых вершин дерева d (записанных в порядке появления), у которых первым предком после корня является i-й преемник корня ($2 \leqslant j \leqslant n-1$) или эта вершина сама является i-м преемником корня ($j=1$). Тогда $\pi(d) = \left(p_1^1, \ldots, p_{i_1}^1\right) \ldots \left(p_1^k, \ldots, p_{i_k}^k\right)$, где $\sum\limits_{m=1}^{k} i_m = n$.

Для $k \geqslant 2$ дерево d назовём *k-престановочным*, если сопоставленная ему по правилу 1 перестановка $\pi(d)$ имеет в точности k циклов.

Сопоставим каждому дереву $D \in D(n)$ перестановку $\pi(D) \in \pi_n$ по следующему правилу.

Правило 2. Пусть $(p_1, \ldots, p_n)$ — последовательность всех концевых вершин дерева D (записанных в порядке появления). Тогда $\pi(D) = (p_1, \ldots, p_n)$.

Перестановку $\pi(D) = (p_1, \ldots, p_n)$ назовём *перестановкой дерева* D.

Пусть $g_1 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. На рассматриваемом множестве деревьев введём весовые функции по следующим правилам.

Правило 3. Пусть $g_i g_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, имеющей i преемников, g_1^{-1} — вес вершины дерева, не имеющей преемников.

Правило 4. Пусть $x_i x_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, обладающей свойством А и имеющей i преемников, x_1^{-1} — вес вершины дерева, обладающей свойством А и не имеющей преемников, $y_i x_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, обладающей свойством В и имеющей i преемников, y_1^{-1} — вес вершины дерева, обладающей свойством В и не имеющей преемников. Отметим, что если вершина обладает каким-либо свойством, то будем считать что все её преемники обладают этим свойством.

Для $d \in D(n, k)$ считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин кроме корня, для $D \in D(n)$ — произведению весов всех его вершин. Вес множества деревьев положим равным сумме весов всех составляющих его элементов.

Введём следующие обозначения. Обозначим для $D \in D(n)$ через

$v(n)$ — количество всех вершин в дереве D, не считая корень,

$w(n)$ — количество внутренних вершин в дереве D, не считая корень,

$D_i(n)$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$, — множество всех деревьев $D \in D(n)$, у которых в точности i внутренних вершин, не считая корень,

$\pi(D_i(n)) = \{\pi(D) \mid D \in D_i(n)\}$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$.

Обозначим для $d \in D(n,k)$ через

$v(n,k)$ — количество вершин в дереве d, не считая корень,

$w(n,k)$ — количество внутренних вершин в дереве d, не считая корень,

$D_i(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, — множество всех деревьев $d \in D(n)$, у которых в точности i внутренних вершин, не считая корень и k преемников корня,

$\pi(D_i(n,k)) = \{\pi(d) \mid d \in D_i(n,k)\}$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$.

Обозначим через $g(A)$ вес множества A, через $g(a)$ — вес a, $a \in A$, $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть $s(n,k)$ и $S(n,k)$ — числа Стирлинга первого и второго рода соответственно. Нам понадобятся следующие известные результаты (см., например, [1, 5, 6]).

Предложение 1. *Число всех разбиений* $\mathbf{n}$ *на* k *непустых блоков равно*

$$S(n,k) = n! \sum_{n,\,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Предложение 2. *Число всех перестановок* $\pi \in \pi_n$*, имеющих в точности* k *циклов, равно*

$$|s(n,k)| = n! \sum_{n,\,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} [r_i!(i)^{r_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Предложение 3. *Число всех разбиений* $\mathbf{n}$ *на непустые блоки, среди которых* k *блоков обладают свойством* A*, а остальные — свойством* B*, равно*

$$T_{nk}(1,1) = n! \sum_{n \triangleright k} \prod_{i=1}^{n} [k_i! r_i! (i!)^{r_i+k_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Пусть весовая функция определяется правилом 3. Найдена новая интерпретация B-полиномов, которую даёт

Теорема 1. *Для* $n,\ k \in N$, $n \geqslant 2$, *суммарный вес всех различных* k*-перестановочных* n*-деревьев* d *равен* $(-1)^{n-k} B_{nk}(g)$*. Суммарный вес всех* n*-деревьев* D*, которые имеют различные перестановки, равен* $(-1)^{n-1} B_{n1}(g)$.

Доказательство. Покажем, что $|D(n)| = S_{n1}$. Рассмотрим множество $D(n)$, пусть $D \in D(n)$. По определению $D(n)$ каждое дерево D имеет в точности n концевых вершин и любая внутренняя вершина рассматриваемых деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда $w(n) \in \{n-2,\ n-3,\ \ldots,\ 0\}$, $w(n) = v(n) - n$ и $v(n) \in \{2n-2,\ 2n-3,\ \ldots,\ n\}$. Поскольку $D(n) = \bigcup\limits_{i=0}^{n-2} D_i(n)$, $D_i(n) \cap D_j(n) = \varnothing,\ i \neq j$, то

$$|D(n)| = \sum_{i=0}^{n-2} |D_i(n)|\,.$$

Рассмотрим $D \in D_{n-2-i}(n)$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$. Тогда $v(n) = 2n-2-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$. Из определения $D(n)$ следует что $|D_{n-2-i}(n)|$ — число всех разбиений множества $\mathbf{2n-2-i}$ на $n-i-1$ блоков ($w(n)$ и корень), у которых нет блоков длины один, т. е. $r_1 = 0$. Разбиение множества $\mathbf{2n-2}$ на $n-1$ блоков получится из разбиения множества $\mathbf{2n-2-i}$ на $n-i-1$ блоков, у которых $r_1 = 0$, добавлением i блоков длины один. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения

$$r_1 = n - 2 - m, \tag{5}$$

где m — число внутренних вершин дерева D. Тогда с учётом предложения 1 имеем

$$|D(n)| = \sum_{i=0}^{n-2} |D_{n-2-i}(n)| = \sum_{i=0}^{n-2} \sum (2n-2-i)! \prod_{j=2}^{n} [r_j!(j!)^{r_j}]^{-1}, \tag{6}$$

где $n \geqslant 2$, а внутреннее суммирование ведётся по всем таким разбиениям $2n-2$ на $n-1$ слагаемых, у которых $r_1 = i$.

Из неравенства $0 \leqslant i \leqslant n-2$ следует, что $0 \leqslant r_1 \leqslant n-2$. Тогда из (6) получаем

$$\sum_{2n-2,\, n-1} (2n-2-r_1)! \prod_{i=2}^{n} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = S_{n1},\ n \geqslant 2. \tag{7}$$

Докажем, что $|D(n,k)| = S_{nk}$. Рассмотрим множество $D(n,k)$, пусть $d \in D(n,k)$. По определению $D(n,k)$ каждое дерево d имеет в точности n концевых вершин, k преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда $w(n,k) \in \{n-k,\ n-k-1,\ \ldots,\ 0\}$, $w(n,k) = v(n,k) - n$ и $v(n,k) \in \{2n-k,\ 2n-k-1,\ \ldots,\ n\}$. Поскольку

$$D(n,k) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n,k), \quad D_i(n,k) \cap D_j(n,k) = \varnothing,\ \ i \neq j,$$

то $|D(n,k)| = \sum\limits_{i=0}^{n-k} |D_i(n,k)|$.

Рассмотрим $d \in D_{n-k-i}(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Тогда $v(n,k) = 2n-k-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Из определения $D(n,k)$ следует, что $|D_{n-k-i}(n,k)|$ — число всех разбиений множества $\mathbf{2n-k-i}$ на $n-k-i+1$ блоков ($w(n)$ и корень), у которых нет блоков длины один, т. е. $r_1 = 0$ и блок разбиения, содержащий элемент с максимальной меткой, имеет длину k. Поскольку элемент с максимальной меткой фиксирован, исключим его из рассмотрения. Рассмотрим число всех разбиений множества $\mathbf{2n-k-1-i}$ на

$n-k-i$ блоков, у которых $r_1 = 0$ и хотя бы один блок разбиения имеет длину $k-1$. Для блока длины $k-1$ существует в точности $(k-1)!$ способов записи. Согласно предложению 1 для каждого разбиения остального множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых $r_1 = 0$, существует в точности $\prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}$ способов записи, где $(0,\ r_2, \ldots,\ r_{n-k+1})$ — спецификация разбиения. Разбиение множества $\mathbf{2n-2k}$ на $n-k$ блоков получится из разбиения множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых $r_1 = 0$, добавлением i блоков длины один. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения

$$r_1 = n-k-m, \tag{8}$$

где m — число внутренних вершин дерева d. Тогда

$$\begin{aligned} |D(n,k)| &= \sum_{i=0}^{n-k} |D_{n-k-i}(n,k)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \sum \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!} \prod_{j=2}^{n-k+1} [r_j!(j!)^{r_j}]^{-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$, а внутреннее суммирование ведётся по всем таким разбиениям $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, у которых $r_1 = i$. Из неравенства $0 \leqslant i \leqslant n-k$ следует, что $0 \leqslant r_1 \leqslant n-k$. И тогда из (9) получаем

$$\sum_{2n-2k,\, n-k} \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = S_{nk}, \quad n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{10}$$

Зададим вес на множестве $D(n)$ по правилу 3. Каждая спецификация $(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{n-k+1})$ разбиения $2n-2$ на $n-1$ слагаемых задаёт подмножество множества $D_{n-2-r_1}(n)$. Следовательно,

$$\forall D \in D_i(n) \quad g(D) = [g_1^{2n-1-r_1}]^{-1} \prod_{i=2}^{n} g_i^{r_i}.$$

Сопоставим каждому $D \in D(n)$ перестановку $\pi \in \pi_n$ по правилу 2. Зададим вес на множестве $D(n,k)$ по правилу 3. Каждая спецификация $(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{n-k+1})$ разбиения $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых задаёт подмножество множества $D_{n-k-r_1}(n,k)$. Следовательно,

$$\forall d \in D_i(n,k) \quad g(d) = [g_1^{2n-k-r_1}]^{-1} \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i}.$$

Сопоставим каждому $d \in D(n,k)$ перестановку $\pi \in \pi_n^k$ по правилу 1. Заметим, что по предложению 2 число всех различных n-перестановок, имеющих в точности k циклов, есть $|s(n,k)|$. По построению множеств $D(n)$ и $D(n,k)$ имеем

(i) $\pi_n \supseteq \pi(D_{n-2}(n)) \supseteq \pi(D_{n-1}(n)) \supseteq \ldots \supseteq \pi(D_0(n))$ и $\pi_n^k \supseteq \pi(D_{n-k}(n,\, k)) \supseteq \pi(D_{n-k-1}(n,\, k)) \supseteq \ldots \supseteq \pi(D_0(n,\, k))$,

(ii) если d_1 (D_1) возможно получить из d_2 (D_2) соединением двух соседних внутренних вершин (или для $D_1, D_2 \in D(n)$ соседних внутренней вершины и корня) в каждом из рассматриваемых деревьев или только в одном, то $\pi(d_1) = \pi(d_2)$ $(\pi(D_1) = \pi(D_2))$.

Применяя метод включения-исключения получим, что вес всех n-деревьев, имеющих различные перестановки, равен

$$\sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{(n-2-m)} g(D_m(n)).$$

С учётом правила 3, (5) и (7) последнее выражение равно

$$\left[g_1^{2n-1}\right]^{-1} \sum_{2n-2,\, n-1} (-1)^{r_1} r_1!(2n-2-r_1)! \times \prod_{i=1}^{n} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = (-1)^{n-1} B_{n1}(g).$$

Вес всех различных k-перестановочных n-деревьев равен

$$\sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{(n-k-m)} g(D_m(n,k)).$$

С учётом правила 3, формул (8) и (10) последнее выражение равно

$$[(k-1)! g_1^{2n-k}]^{-1} \sum_{2n-2k,\, n-k} (-1)^{r_1} r_1! \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \times \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = (-1)^{n-k} B_{nk}(g).$$

Теорема 1 доказана.

3. Следствия

Пусть весовая функция определяется правилом 4. В условиях теоремы 1, применяя предложение 3, получим новую интерпретацию P-полиномов.

Следствие 1. *Для $n,\ k \in N,\ n,\ k \geqslant 2$, суммарный вес всех различных l-перестановочных $(l = k, k+1, \ldots, n)$ n-деревьев d, у которых k преемников корня обладает свойством A, а остальные — свойством B, равен $(-1)^{n-k}P_{nk}(g)$.*

В [3] введены *расщеплённые числа Шрёдера второго рода K_{nm}*, которые определяют число корневых деревьев с n концевыми вершинами по параметру m — количеству внутренних вершин. Введём обобщения этих чисел — *расщеплённые обобщённые числа Шрёдера K_{nmk}*, которые определяют число корневых деревьев с n концевыми вершинами по параметрам m — количеству внутренних вершин и k — количеству преемников корня. Применяя формулу (6), получим

Следствие 2. *Для чисел K_{nm} справедливо соотношение*

$$K_{nm} = \sum (n+m)! \prod_{i=2}^{n} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad n \geqslant 2,\ 0 \leqslant m \leqslant n-2,$$

где суммирование ведётся по всем таким разбиениям $2n-2$ на $n-1$ слагаемых, у которых $r_1 = n-2-m$.

Применяя формулу (9) , получим

Следствие 3. *Для чисел K_{nm} справедливо соотношение*

$$K_{nmk} = \sum \frac{(n+m-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \ \ 2 \leqslant k \leqslant n,\ 0 \leqslant m \leqslant n-k,$$

где суммирование ведётся по всем таким разбиениям $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, у которых $r_1 = n-k-m$.

Применяя формулы (7), (10) теоремы 1, получим

Следствие 4. *Для чисел S_{nk} справедливо соотношение*

$$S_{nk} = \sum_{m=0}^{n-k} K_{nmk}, \quad k \geqslant 2.$$

Полагая в теореме 1 $g_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots$, получим

Следствие 5. *Для чисел $s(n,k)$ справедливы соотношения*

$$|s(n,1)| = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{(n-2-m)} K_{nm},$$

$$|s(n,k)| = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{(n-k-m)} K_{nmk}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n.$$

Определим на $D(n)$ бинарное отношение $\leqslant$. Для любых $D_1, D_2 \in D(n)$ будем считать, что $D_1 \leqslant D_2$ в одном из следующих случаев:

(i) D_1 возможно получить из D_2 соединением соседних внутренних вершин;

(ii) D_1 возможно получить из D_2 соединением соседних внутренних вершин и корня;

(iii) D_1 и D_2 с точностью до стандартной формы одинаковы.

Обозначим через $w_D(n)$ число внутренних вершин дерева $D \in D(n)$.

Следствие 6. *Множество $D(n)$ с бинарным отношением $\leqslant$ образует частично упорядоченное множество. Ранговопроизводящая функция $(D(n), \leqslant)$ имеет вид*

$$F(D(n), q) = \sum_{i=0}^{n-2} K_{ni}\, q^i.$$

Доказательство. Докажем рефлексивность, антисимметричность и транзитивность.

Рефлексивность. $D_1 \leqslant D_1$ по определению.

Антисимметричность. Покажем, что если $D_1 \leqslant D_2$ и $D_2 \leqslant D_1$, то $D_1 \equiv D_2$. Если $D_1 \leqslant D_2$, то $w_{D_1}(n) \leqslant w_{D_2}(n)$, если $D_2 \leqslant D_1$, то $w_{D_2}(n) \leqslant w_{D_1}(n)$. Значит, $w_{D_2}(n) = w_{D_1}(n)$ и $D_1 \equiv D_2$.

Транзитивность. Покажем, что если $D_1 \leqslant D_2$ и $D_2 \leqslant D_3$, то $D_1 \leqslant D_3$. Поскольку $D_2 \leqslant D_3$, из D_3 можно получить D_2 или эти деревья одинаковы. Так как $D_1 \leqslant D_2$, из D_2 можно получить D_1 или эти деревья одинаковы. Тогда из D_3 можно получить D_1 или эти деревья одинаковы и по определению $D_1 \leqslant D_3$. Следовательно, $(D(n), \leqslant)$ — частично упорядоченное множество.

Число элементов ранга k равно $|D_k(n)|$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$, и K_{nk}. Следствие 6 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузьмин О. В.** Обобщённые пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. — 294 с.
2. **Кузьмин О. В., Леонова О. В.** О полиномах разбиений // Дискрет. математика. — 2001. — Т. 13, вып. 2. — С. 144–158.
3. **Кузьмин О. В., Тюрнева Т. Г.** Числа Шрёдера, их обобщения и приложения // Асимптотич. и перечислит. задачи комбинат. анализа. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1997. — С. 117–125.
4. **Платонов М. Л.** Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979. — 152 с.
5. **Риордан Дж.** Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 287 с.
6. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. — М.: Мир, 2005. — 767 с.

Балагура Анна Александровна,
e-mail: irk25@rambler.ru
Кузьмин Олег Викторович,
e-mail: quzminov@mail.ru

Статья поступила
23 июля 2010 г.