ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 15–19

УДК 519.2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВАТЕЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А. А. Валюженич

Аннотация. Задача нахождения числа основательных последовательностей и существования биекции между этими обьектами и множествами, соответствующими последовательности A103580, поставлена С. В. Китаевым. Основательные последовательности определяют класс графов, для которых им перечислены независимые множества. В статье найдена требуемая биекция и показано, что число основательных последовательностей растёт как $\Theta(2^{n/2})$.

Ключевые слова: основательная последовательность, множество, свободное от сумм.

Введение

Рассмотрим множество натуральных чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, упорядоченных по возрастанию, мощности $k \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ есть множество слов вида $A_i = 1\underbrace{0\dots0}_{a_i-1}1$. Предположим, что всякое слово A'_i, получающееся из слова $A_i \in \mathcal{A}$ заменой любого подмножества нулей в A_i единицами, содержит в качестве подслова некоторое слово $A_j \in \mathcal{A}$, где $j < i$. Назовём $\mathcal{A}$ *основательным множеством*, а соответствующую последовательность a_i — *основательной последовательностью.* Заметим, что любое основательное множество должно содержать слово 11, а любая основательная последовательность содержит 1. Действительно, слово A_2 при замене всех нулей единицами содержит только 11 в качестве подслова вида $1\underbrace{0\dots0}_{l\geqslant0}1$, а значит, 11 лежит в $\mathcal{A}$ и любая основательная последовательность начинается с 1. Таким образом, единственное основательное множество мощности 1 есть $\mathcal{A} = \{11\}$.

Легко видеть, что в определении основательного множества можно вместо замены любого подмножества нулей рассматривать замену только одного. Это определение эквивалентно тому, что $a_1 = 1$ и для любого a_i, $i \geqslant 2$, для всякого разложения $a_i = t + s$, где $t \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}$, верно, что $t = a_j$ или $s = a_j$, где $j < i$. Далее будем пользоваться именно этим определением основательной последовательности.

Пусть $W(n)$ — множество основательных последовательностей, элементы которых не превосходят n, а $w(n)$ — их число.

Примеры основательных последовательностей: $\langle 1, 2, 3\rangle$, $\langle 1, 2, 5\rangle$, $\langle 1, 3, 5, 7, \ldots\rangle$.

Рассмотрим последовательность, содержащую множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ и любое подмножество множества $\{k + 2, \ldots, 2k + 1\}$. Такая последовательность будет основательной, так как для любого числа из множества $\{1, 2, \ldots, 2k + 1\}$ при разбивании на два натуральных слагаемых одно из них обязательно принадлежит множеству $\{1, 2, \ldots, k\}$. Таких последовательностей 2^k. Также ясно, что для разных k такие последовательности будут разными, так как у них различаются первые натуральные числа, не входящие в них. Следовательно, получаем нижнюю оценку для числа основательных последовательностей:

$$w(2n + 1) \geqslant \sum_{m=0}^{n} 2^m + 1 = 2^{n+1}, \quad w(2n) \geqslant \sum_{m=0}^{n-1} 2^m + 1 = 2^n$$

(добавление 1 соответствует основательным последовательностям $\langle 1, 2, \ldots, 2n+1\rangle$ и $\langle 1, 2, \ldots, 2n\rangle$ соответственно), т. е. $w(n) \geqslant 2^{[n+1/2]}$. Оба неравенства строгие при $n \geqslant 5$, так как в обоих случаях не учитывалась основательная последовательность $\langle 1, 3, 5\rangle$.

1. Основательные последовательности и базисы

Назовём непустое множество $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} = [n]$ *базисом*, если никакой элемент g множества B не является неотрицательной линейной комбинацией элементов, лежащих в $B\backslash g$. Множество базисов, рассмотренное в [5, A103580], обозначим через $B(n)$.

Теорема 1. *Существует биекция между множествами $W(n)$ и $B(n)$.*

Доказательство. Вначале введём определение суммы подмножеств множества $[n]$. Пусть $C \subseteq [n]$ и $D \subseteq [n]$. Тогда

$$C + D = \{f \in [n] \mid f = c + d, \;\; c \in C \cup \{0\}, \;\; d \in D \cup \{0\}\}.$$

Непустое множество $Z \subseteq [n]$ назовём *замкнутым относительно суммы*, или просто *замкнутым*, если $Z + Z = Z$.

Покажем, что если $W \in W(n), W \neq [n]$, то $Z = [n]\backslash W$ — замкнутое множество. По предположению Z непусто. Значит, если оно не замкнуто, то существуют $x \in Z$, $y \in Z$ такие, что $u = x + y \in W$. С другой стороны, ни x, ни y не принадлежат основательной последовательности W, что противоречит определению основательной последовательности. Таким образом, дополнение к всякой основательной последовательности $W \neq [n]$ — замкнутое множество.

Теперь рассмотрим замкнутое множество $Z \neq [n]$. Покажем, что $W = [n] \backslash Z$ — основательная последовательность. Если это не так, то для некоторого $u \in W$ существует представление $u = x + y$, где ни x, ни y не принадлежат W, т. е. $x \in Z$ и $y \in Z$, но $x + y \in W$; противоречие с замкнутостью Z.

Итак, доказано, что для любого множества $V \subseteq [n]$, $V \neq \varnothing$, $V \neq [n]$, из того, что оно является основательной последовательностью, следует замкнутость его дополнения, а из замкнутости следует основательность дополнения. Теперь каждой основательной последовательности поставим в соответствие некоторое замкнутое множество. Если $W = [n]$, то ставим ему в соответствие замкнутое множество $Z = [n]$, иначе — замкнутое множество $[n] \backslash W$. Таким образом, осталось построить биекцию между замкнутыми множествами и базисами.

Обозначим через $Z(n)$ множество всех замкнутых множеств. Нетрудно убедиться, что замкнутость множества эквивалентна тому, что оно содержит все неотрицательные линейные комбинации своих элементов, лежащие в $[n]$. Действительно, если P — замкнутое множество, то $P + P = P$ и по индукции легко доказывается, что $\underbrace{P + \ldots + P}_{k} = P$ для любого натурального $k \geqslant 2$. Тогда P содержит все конечные суммы своих элементов, а значит, все неотрицательные линейные комбинации своих элементов. Обратно, пусть P содержит все неотрицательные линейные комбинации своих элементов, лежащие в $[n]$. Тогда P содержит суммы любых двух своих элементов, откуда следует, что $P + P = P$, т. е. P — замкнутое множество.

Для произвольного $Y \subseteq [n]$ определим его *линейную оболочку*

$$L(Y) = \left\{ y \in [n] \mid y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k,\ \alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ y_k \in Y \right\}.$$

Определим отображение $\varphi : B(n) \to Z(n)$ по правилу $\varphi(B) = L(B)$, где $B \in B(n)$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Отображение φ — инъекция.*

Доказательство. Предположим, что $L(B_1) = L(B_2)$, где B_1 и B_2 — различные базисы. Ясно, что первые элементы базисов совпадают, так как иначе меньший из них не принадлежал бы линейной оболочке другого базиса. Далее рассмотрим максимальное количество начальных совпадающих элементов (это множество непусто), т. е.

$$p_1 = q_1, \ldots, p_m = q_m,\ p_{m+1} < q_{m+1}.$$

Тогда поскольку $p_{m+1} \in L(B_2)$ и $p_{m+1} < q_{m+1}$, $p_{m+1} \in L(\{q_1, \ldots, q_m\})$, а значит, и $p_{m+1} \in L(\{p_1, \ldots, p_m\})$. Последнее включение противоречит тому, что $\{p_1, \ldots, p_{m+1}\} \subseteq B_1$. Случай $p_{m+1} > q_{m+1}$ рассматривается аналогично. Итак, всем базисам соответствуют разные линейные оболочки. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим произвольное множество R, содержащее все линейные неотрицательные комбинации своих элементов. Выберем в R базис следующим образом. Пусть r_1 — наименьший элемент множества R. Тогда рассматриваем $L(r_1)$. Если $L(r_1) = R$, то r_1 — искомый базис, иначе рассматриваем r_2 — наименьший элемент множества $R \backslash L(r_1)$. Если $L(r_1, r_2) = R$, то r_1, r_2 — искомый базис, иначе рассматриваем r_3 — наименьший элемент множества $R \backslash L(r_1, r_2)$, и т. д. В итоге в силу конечности множества R находим в нём базис. Следовательно, отображение φ сюръективно. Учитывая лемму 1, получаем, что φ — биекция. Теорема 1 доказана.

Пример. Построенная биекция при $n = 3$:
$\varphi(\{1\}) = \{1, 2, 3, 4\}$,
$\varphi(\{2\}) = \{2, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\} \backslash \{2, 4\} = \{1, 3\}$,
$\varphi(\{3\}) = \{3\}$, $\{1, 2, 3, 4\} \backslash \{3\} = \{1, 2, 4\}$,
$\varphi(\{4\}) = \{4\}$, $\{1, 2, 3, 4\} \backslash \{4\} = \{1, 2, 3\}$,
$\varphi(\{2, 3\}) = \{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\} \backslash \{2, 3, 4\} = \{1\}$,
$\varphi(\{3, 4\}) = \{3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\} \backslash \{3, 4\} = \{1, 2\}$.

2. Асимптотическое перечисление основательных последовательностей

Подмножество H целых чисел называется *свободным от сумм*, если для любых $a, b \in H$ число $a+b$ не принадлежит множеству H. Семейство всех подмножеств $H \subseteq [n]$, свободных от сумм, обозначим через $S(n)$. Пусть $s(n) = |S(n)|$. В 1988 г. Камерон и Эрдеш предположили [2], что $s(n) = O(2^{n/2})$. Гипотеза Камерона — Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм, на отрезке $[1, n]$ независимо доказана в 2003 г. Грином [1] и А. А. Сапоженко [3].

Заметим, что любой базис является множеством, свободным от сумм. Обратное неверно, так как, например, любое подмножество нечётных чисел есть множество, свободное от сумм, однако если его мощность не меньше 2 и оно содержит 1, то это не базис. Таким образом, имеем $B(n) \subset S(n)$, и верно неравенство $w(n) \leqslant s(n) - 2^{[(n-1)/2]}$. Значит, $w(n) = O(2^{n/2})$ и, учитывая доказанную ранее нижнюю оценку, получаем следующую теорему.

Теорема 2. $w(n) = \Theta(2^{n/2})$.

Автор признателен С. В. Китаеву и А. Э. Фрид за ценные замечания на всех этапах работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сапоженко А. А.** Гипотеза Камерона — Эрдеша //Докл. РАН. — 2003. — Т. 393, № 6. — С. 749–752.
2. **Cameron P., Erdos P.** On the number of sets of integers with various properties // Number theory (Banff, AB, 1988). — Berlin: de Gruyter, 1990. — P. 61–79.
3. **Green B. J.** The Cameron — Erdos conjecture // Bull. London. Math. Soc. — 2004. — V. 36, N 6. — P. 769–778.
4. **Kitaev S.** Counting independent sets on path-schemes // J. Integer Seq. — 2006. — V. 9, N 8. (Article 06.2.2.)
5. **Sloane N. J.** The on-line encyclopedia of integer sequences // http://www.research.att.com/njas/sequences/.

Валюженич Александр Андреевич,
e-mail: graphkiper@mail.ru

Статья поступила
1 апреля 2010 г.

Переработанный вариант —
8 сентября 2010 г.