ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 20–26

УДК 519.87+519.854

ОБ ОДНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМОМ СЛУЧАЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ *)

В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин

Аннотация. Рассматривается частный случай децентрализованной транспортной задачи. Матрица транспортных затрат состоит из n строк, $2n$ столбцов и обладает диагональной структурой. Предлагается алгоритм решения задачи на основе метода динамического программирования с временно́й сложностью $O(n^2)$.

Ключевые слова: децентрализованная транспортная задача, динамическое программирование.

Постановка задачи

Рассматривается частный случай децентрализованной транспортной задачи [1]. Матрица транспортных затрат (c_{ij}) имеет n строк и $2n$ столбцов, где $n \geqslant 3$. Каждая строка $i = 1, \dots, n$ содержит четыре различных числа, которые обозначим через a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}. Остальные элементы строки равны достаточно большому числу или формально $c_{ij} = \infty$. Матрица имеет следующую диагональную структуру: $c_{11} = a_{11}$, $c_{12} = a_{12}$, $c_{1,2n-1} = b_{11}$, $c_{1,2n} = b_{12}$ и $c_{i,2i-3} = b_{i1}$, $c_{i,2i-2} = b_{i2}$, $c_{i,2i-1} = a_{i1}$, $c_{i,2i} = a_{i2}$, если $i \geqslant 2$. Например, при $n = 4$ матрица (c_{ij}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \infty & \infty & \infty & \infty & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & b_{31} & b_{32} & a_{31} & a_{32} & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & b_{41} & b_{42} & a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — произвольная перестановка строк матрицы (c_{ij}). Рассмотрим следующий процесс выделения элементов матрицы.

В строке π_1 выделяются два минимальных элемента, соответствующие им столбцы из матрицы удаляются. В строке π_2 выделяются два минимальных элемента среди оставшихся столбцов. Соответствующие

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00149).

выделенным элементам столбцы удаляются из матрицы. Те же действия совершаются со строкой π_3 и так далее вплоть до строки π_n.

Через $S(\pi)$ обозначим множество выделенных элементов c_{ij}. Перестановку π назовём *допустимой*, если множество $S(\pi)$ не содержит элементов $c_{ij} = \infty$. Если перестановка π допустима, то множество $S(\pi)$ однозначно определяется этой перестановкой в силу различия конечных элементов в каждой строке.

Задача заключается в нахождении минимума функции

$$f(\pi) = \sum_{s \in S(\pi)} s \to \min_{\pi} \tag{1}$$

на множестве всех допустимых перестановок π.

Результат работы выражает следующая

Теорема. *Решение задачи* (1) *может быть найдено с вычислительной сложностью* $O(n^2)$.

1. Доказательство теоремы

Для удобства изложения числа a_{i1}, a_{i2}, $i = 1, \dots, n$, назовём *белыми*, а числа b_{i1}, b_{i2}, $i = 1, \dots, n$, — *чёрными*. Допустимую перестановку π назовём *белой*, если множество $S(\pi)$ состоит только из белых элементов, *чёрной*, если множество $S(\pi)$ состоит только из чёрных элементов, и *разноцветной*, если в множество $S(\pi)$ из каждой строки входят разноцветные элементы.

Лемма 1. *Любая допустимая перестановка является либо белой, либо чёрной, либо разноцветной.*

Доказательство. Пусть перестановка π допустима и $S(\pi)$ содержит два белых элемента, например, из строки k. В силу допустимости перестановки π и структуры матрицы (c_{ij}) из строки $k+1$ в множество $S(\pi)$ должны войти только белые элементы независимо от расположения строк k и $k+1$ в перестановке π. Но тогда в силу тех же причин из строки $k+2$ в множество $S(\pi)$ должны быть включены только белые элементы. Продолжая последовательно это рассуждение для строк $k+3, \dots, n, 1, \dots, k-1$, убеждаемся в том, что множество $S(\pi)$ состоит только из белых элементов, т. е. перестановка π — белая.

Если множество $S(\pi)$ содержит два чёрных элемента, например, из строки l, то, проводя аналогичные рассуждения для строк $l-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, l+1$, приходим к тому, что перестановка π должна быть чёрной.

Таким образом, имеются только три возможности, оговорённые в лемме. Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 множество допустимых перестановок разбивается на три подмножества белых, чёрных и разноцветных перестановок, которые рассмотрим по отдельности.

Положим $I = \{1, \dots, n\}$. Через I_a обозначим множество строк матрицы (c_{ij}), в которых два минимальных элемента имеют белый цвет, через I_b — множество строк, в которых два минимальных элемента являются чёрными, и через $I_{ab} = I \setminus (I_a \cup I_b)$ — множество всех остальных строк, в которых два минимальных элемента разноцветны.

Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — белая перестановка. Нетрудно видеть, что $\pi_1 \in I_a$. Поэтому множество белых перестановок непусто, только если $I_a \neq \varnothing$. Все белые перестановки имеют одно и то же значение функционала

$$f_a = \sum_{i \in I} (a_{i1} + a_{i2}).$$

В качестве представителя белых перестановок можно взять, например, следующую перестановку π_a. Пусть $k \in I_a$, тогда

$$\pi_a = (k, k+1, \dots, n, 1, 2, \dots, k-1).$$

Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — чёрная перестановка. Очевидно, что $\pi_1 \in I_b$ и множество чёрных перестановок непусто, только если $I_b \neq \varnothing$. Все чёрные перестановки имеют значение функционала, равное

$$f_b = \sum_{i \in I} (b_{i1} + b_{i2}).$$

В качестве представителя чёрных перестановок можно взять, например, следующую перестановку π_b. Пусть $l \in I_b$, тогда

$$\pi_b = (l, l-1, \dots, 1, n, n-1, \dots, l+1).$$

Перейдём к рассмотрению разноцветных перестановок. С этой целью введём граф G_1 с множеством вершин $I = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг вида $(i, i+1)$, $(i+1, i)$, $i \in I$. Нумерация вершин графа рассматривается циклически по модулю n. Дугам графа сопоставим числовые веса. Пусть $i \in I$. Дуге $(i, i+1)$ ставится в соответствие вес $d(i, i+1)$. Если $a_{i1} < a_{i2}$, то $d(i, i+1) = a_{i1} + b_{i+1,2}$. Если $a_{i1} > a_{i2}$, то $d(i, i+1) = a_{i2} + b_{i+1,1}$. Дуге $(i+1, i)$ ставится в соответствие вес $d(i+1, i)$. Если $b_{i+1,1} < b_{i+1,2}$, то $d(i+1, i) = a_{i2} + b_{i+1,1}$. Если $b_{i+1,1} > b_{i+1,2}$, то $d(i+1, i) = a_{i1} + b_{i+1,2}$.

Произвольной перестановке $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ строк матрицы (c_{ij}) поставим в соответствие подграф $D(\pi)$ с множеством вершин $I = \{1, \ldots, n\}$ и следующим множеством дуг. Пусть $i \in I$. Дуга $(i, i+1)$ лежит в $D(\pi)$, если в перестановке π строка i предшествует строке $i+1$. Дуга $(i+1, i)$ лежит в $D(\pi)$, если в перестановке π строка $i+1$ предшествует строке i. Граф $D(\pi)$ представляет собой *неориентированный* цикл, т. е. циклический граф, обязательно содержащий вершины-источники, вершины-стоки и возможно транзитивные вершины. (*Ориентированный* цикл состоит только из транзитивных вершин.)

Пусть π — допустимая разноцветная перестановка. Порождаемый ею цикл $D(\pi)$ также будем называть *допустимым*. Нетрудно видеть, что множество $S(\pi)$ элементов матрицы (c_{ij}), выделяемых по перестановке π, однозначно определяется структурой цикла $D(\pi)$, отражающего порядок предшествования строк в перестановке π. Поэтому все разноцветные перестановки π, порождающие один и тот же цикл $D(\pi)$, имеют одно и то же значение функционала

$$f(\pi) = \sum_{(i,j) \in D(\pi)} d(i,j).$$

Пусть D — произвольный неориентированный цикл. Перестановку π, порождающую D, можно построить, например, следующим способом. Все вершины цикла D разбиваются на вершины-источники, вершины-стоки и транзитивные вершины. В искомой перестановке на первые места ставятся вершины-источники, далее следуют отрезки из последовательных транзитивных вершин, и на последние места ставятся вершины-стоки.

Тем самым задачу нахождения минимальной разноцветной перестановки можно сформулировать так: среди всех допустимых циклов D графа G_1 требуется найти цикл минимального суммарного веса.

Перейдём к более детальной характеризации допустимых циклов. Пусть D — произвольный цикл в графе G_1, проходящий через все вершины I, и пусть $i \in I$. Подграф цикла D, содержащий три вершины $i-1$, i, $i+1$ и две соединяющих их дуги, назовём *конфигурацией*. Относительно тройки вершин $i-1$, i, $i+1$ возможны следующие четыре конфигурации, которые обозначим через $v(i,k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Конфигурация $v(i,1)$ включает дуги $(i, i-1)$ и $(i, i+1)$, т. е. вершина i является источником. Конфигурация $v(i,2)$ включает дуги $(i-1, i)$ и $(i, i+1)$, т. е. вершина i транзитивна. Конфигурация $v(i,3)$ включает дуги $(i+1, i)$ и $(i, i-1)$, т. е. вершина i вновь транзитивна. Конфигурация $v(i,4)$ включает дуги $(i-1, i)$ и $(i+1, i)$, т. е. вершина i является стоком.

Конфигурацию назовём *допустимой*, если её появление возможно в некотором допустимом цикле D.

Рассмотрим конфигурацию $v(i,1)$. Она означает, что выбор элементов в строке i предшествует выбору элементов в строках $i-1$ и $i+1$. Поэтому выбор в строке i осуществляется среди всех четырёх чисел a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}. Если два минимальных числа из этой четвёрки разноцветны, то конфигурация $v(i,1)$ объявляется допустимой.

В конфигурации $v(i,2)$ выбор элементов в строке $i-1$ предшествует выбору в строке i, а выбор в строке i предшествует выбору в строке $i+1$. Предположим, что в процессе выделения элементов матрицы минимальные числа строки $i-1$ оказываются разноцветными. В силу предшествования строк $i-1$ и i белый элемент в строке $i-1$ выбирается из двух чисел $a_{i-1,1}$ и $a_{i-1,2}$. Если $a_{i-1,1} < a_{i-1,2}$, то это число $a_{i-1,1}$. В силу предшествования строк i и $i+1$ выбор элементов в строке i производится среди чисел a_{i1}, a_{i2}, b_{i2}. Если два минимальных числа этой тройки разноцветны, то конфигурация $v(i,2)$ объявляется допустимой. Если $a_{i-1,1} > a_{i-1,2}$ и два минимальных элемента из тройки a_{i1}, a_{i2}, b_{i1} разноцветны, то конфигурация $v(i,2)$ также допустима.

Аналогично анализируется конфигурация $v(i,3)$. Если $b_{i+1,1} < b_{i+1,2}$ и два минимальных элемента из тройки a_{i2}, b_{i1}, b_{i2} разноцветны, то конфигурация $v(i,3)$ объявляется допустимой. Если $b_{i+1,1} > b_{i+1,2}$ и два минимальных элемента из тройки a_{i1}, b_{i1}, b_{i2} разноцветны, то конфигурация $v(i,3)$ также допустима.

В конфигурации $v(i,4)$ выбор элементов в строках $i-1$ и $i+1$ предшествует выбору в строке i. Если в процессе выделения элементов в строках $i-1$ и $i+1$ выбираются разноцветные элементы, то в строке i остаётся пара разноцветных элементов, которая и будет выбрана. Поэтому конфигурация $v(i,4)$ объявляется допустимой.

Лемма 2. *Для того чтобы неориентированный цикл D графа G_1 был допустимым, необходимо и достаточно, чтобы все конфигурации цикла D были допустимы.*

Доказательство. Необходимость. Если D — допустимый цикл, то все его конфигурации являются допустимыми по определению.

Достаточность. Пусть D — некоторый неориентированный цикл, все конфигурации которого допустимы, и π — перестановка, порождающая D. Рассмотрим следующий фрагмент цикла D:

$$\ldots \leftarrow s_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \ldots \rightarrow i_k \rightarrow t \leftarrow j_l \leftarrow \ldots \leftarrow j_1 \leftarrow s_2 \rightarrow \ldots .$$

В строке s_1 два минимальных элемента разноцветны в силу допустимости конфигурации $v(s_1, 1)$. Поэтому в строке i_1 два минимальных элемента будут разноцветны в силу допустимости соответствующей транзитивной конфигурации. Следовательно, и в строках $i_2, \ldots, i_k$ будут выбираться разноцветные элементы.

Аналогично, в строках s_2, j_1, $\ldots$, j_l будут выбраны разноцветные элементы. И наконец, в строке t будут выбраны разноцветные элементы в силу правильности выбора элементов в строках i_k, j_l и допустимости конфигурации $v(t, 4)$. Рассматривая таким же образом все фрагменты цикла D, получаем, что множество $S(\pi)$ включает из каждой строки два разноцветных элемента, и, следовательно, цикл D является допустимым. Лемма 2 доказана.

Лемма 2 позволяет привести задачу к виду, удобному для вычислений. Рассмотрим граф G_2, вершинами которого являются все конфигурации $v(i, k)$, $i \in I$, $k = 1, 2, 3, 4$. Конфигурации $v(i, k)$, $v(i+1, l)$ объявляются смежными, если обе они допустимы и имеют в своем составе общую дугу. Например, если конфигурации $v(i, 1)$ и $v(i+1, 2)$ допустимы, то они смежны, поскольку имеют общую дугу $(i, i+1)$. Таким образом, граф G_2 состоит из n долей. В каждой доле четыре вершины. Смежными могут быть только вершины соседних долей.

Поскольку допустимый цикл D графа G_1 состоит только из допустимых конфигураций, он порождает в графе G_2 цикл, проходящий через все доли графа. Циклы графа G_2, порождаемые допустимыми циклами графа G_1, также назовём *допустимыми*.

Пусть C — некоторый цикл в графе G_2. Соответствующие вершинам цикла C конфигурации являются допустимыми и составляют в графе G_1 цикл D. Если этот цикл D является неориентированным, то он будет допустимым в силу леммы 2. Таким образом, допустимые циклы графа G_2 — это все циклы за исключением тех, которые порождают ориентированные циклы в графе G_1. Недопустимые циклы графа G_2 можно исключить следующим способом.

Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — допустимая разноцветная перестановка. Тогда $\pi_1 \in I_{ab}$ (напомним, что I_{ab} — множество строк матрицы (c_{ij}), в которых два минимальных элемента разноцветны). В цикле $D(\pi)$, порождаемом перестановкой π в графе G_1, вершина π_1 является источником. Пусть $i \in I_{ab}$. Через M_i обозначим множество циклов в графе G_2, проходящих через вершину $v(i, 1)$, и положим

$$M = \bigcup_{i \in I_{ab}} M_i.$$

Нетрудно видеть, что множество M состоит из всех допустимых циклов графа G_2 и взаимно однозначно соответствует множеству допустимых циклов графа G_1.

Каждой вершине $v(i,k)$ графа G_2 поставим в соответствие числовой вес $w(i,k)$, равный сумме весов дуг конфигурации $v(i,k)$:

$$w(i,1) = d(i,i-1) + d(i,i+1), \quad w(i,2) = d(i-1,i) + d(i,i+1),$$

$$w(i,3) = d(i,i-1) + d(i+1,i), \quad w(i,4) = d(i-1,i) + d(i+1,i).$$

Отметим, что суммарный вес вершин цикла из M равен удвоенному весу соответствующего допустимого цикла в графе G_1. Теперь задачу нахождения минимальной разноцветной перестановки можно переформулировать так: среди циклов множества M требуется найти цикл минимального веса.

Пусть $i \in I_{ab}$. Задача нахождения в множестве M_i цикла минимального веса (обозначим её через P_i) легко решается методом динамического программирования. Одновременно выясняется, является множество M_i пустым или нет. Решив все задачи P_i, $i \in I_{ab}$, находим оптимальный цикл C из M. По циклу C строится цикл D в графе G_1, и по циклу D строится искомая разноцветная перестановка, которую обозначим через π_{ab}. Сравнение величины $f(\pi_{ab})$ и найденных выше величин $f_a = f(\pi_a)$, $f_b = f(\pi_b)$ завершает решение задачи (1).

Оценим вычислительную сложность описанного подхода. Расчёт перестановок π_a и π_b требует $O(n)$ операций. Построение графов G_1, G_2 и решение задачи P_i при данном $i \in I_{ab}$ также требуют $O(n)$ операций. С учётом перебора по $i \in I_{ab}$ вычислительная сложность в целом составляет $O(n^2)$, поскольку $|I_{ab}| \leqslant n$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дементьев В. Т., Пяткин А. В.** О децентрализованной транспортной задаче // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 22–30.

Дементьев Владимир Тихонович,
e-mail: demvt@math.nsc.ru

Шамардин Юрий Вячеславович,
e-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
8 сентября 2010 г.