ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 27–40

УДК 519.854

О СЛОЖНОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА *)

А. В. Еремеев

Аннотация. Рассматривается вычислительная сложность оптимальной рекомбинации для задачи коммивояжёра в симметрическом и общем случаях. Доказана NP-трудность в сильном смысле этих задач, и рассмотрены подходы к их решению.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, генетический алгоритм, оптимальная рекомбинация, вычислительная сложность, сводимость задач.

1. Введение

Задача коммивояжёра является одной из наиболее известных NP-трудных задач комбинаторной оптимизации [2]: дана произвольная матрица (c_{ij}) порядка n с неотрицательными вещественными элементами и требуется найти перестановку $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n \rangle$ элементов $1, 2, \ldots, n$ с минимальным значением суммы $c_{i_1,i_2} + c_{i_2,i_3} + \cdots + c_{i_{n-1},i_n} + c_{i_n,i_1}$. В случае, когда матрица (c_{ij}) симметрическая, задача коммивояжёра называется *симметрической*. Если же такое свойство не предполагается, будем говорить, что имеет место общий случай задачи коммивояжёра.

В общем случае «маршрут» коммивояжёра — гамильтонов контур в полном ориентированном графе без петель и кратных дуг с множествами вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и дуг A, где длина дуги $(i, j) \in A$ равна c_{ij}. В симметрическом же случае направление обхода не имеет значения, поэтому «маршрутом» коммивояжёра является гамильтонов цикл в полном неориентированном графе G с теми же множествами вершин V и рёбер E, где длина ребра $\{i, j\}$ равна $c_{ij} = c_{ji}$. Далее граф (ориентированный граф) будем обозначать как пару $(\cdot, \cdot)$, где на первом месте указано множество вершин, а на втором — множество рёбер (дуг).

В настоящей работе исследуется вычислительная сложность задачи поиска кратчайшего «маршрута» коммивояжёра, совпадающего с двумя

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 2, проект № 227).

заданными *родительскими* допустимыми решениями по тем дугам (или рёбрам), по которым проходят оба родительских решения, и не проходящего по дугам (или рёбрам), отсутствующим в обоих из них. Поиск такого «маршрута» представляет собой задачу *оптимальной рекомбинации* (см., например, [10, 13]), которая возникает при поиске наилучшего возможного результата оператора кроссинговера (рекомбинации) в генетических алгоритмах для задачи коммивояжёра.

В симметрическом случае входные данные задачи состоят из рёберно взвешенного полного графа и двух гамильтоновых родительских циклов в нём. В общем же случае входные данные задачи оптимальной рекомбинации содержат ориентированный граф с заданными длинами дуг и два родительских «маршрута» с заданными направлениями переходов от вершины к вершине. При этом искомое решение должно совпадать с родительскими по направлению движения, если только между парой вершин в родительских контурах не указаны встречные направления, в последнем случае допустимо любое из них.

Впервые оптимальная рекомбинация в генетическом алгоритме была использована в [3] для задачи о наибольшем независимом множестве в графе. К настоящему времени данный подход нашёл много приложений. В генетических алгоритмах для задач, где множество допустимых решений составляют перестановки, алгоритмы рекомбинации подобного типа применялись в [6, 7, 14, 15]. Формулировки задач оптимальной рекомбинации в [6, 7, 15] отличаются от рассматриваемой в данной статье, например, в [6] результат рекомбинации может содержать любое из рёбер, входящих хотя бы в одно из родительских решений.

В ряде генетических алгоритмов, где задача оптимальной рекомбинации является NP-трудной, авторы используют методы ветвей и границ [5, 8] или динамического программирования [15] для её решения. При этом зачастую применяются приближённые варианты этих методов во избежание чрезмерно высоких вычислительных затрат на этапе рекомбинации. Так в случае динамического программирования [15] мощность множества состояний ограничивается некоторой заданной величиной, а в случае ветвей и границ [5, 8] результатом рекомбинации является рекордное решение, полученное этим методом за ограниченные время или число итераций. Также может применяться снижение размерности задачи рекомбинации за счёт группировки переменных в «блоки», когда значения целого блока переменных переходят в решение-потомок либо от одного родительского решения, либо от другого [7]. Помимо сокращённых вариантов точных методов для приближённого решения задачи оптимальной рекомбинации могут использоваться известные приближённые эвристики. Например, в генетическом алгоритме для задачи вершинного покрытия [1] в операторе кроссинговера используется жадный алгоритм Эрдеша.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разд. 2 с использованием результатов [12] показана NP-трудность задачи оптимальной рекомбинации в симметрическом случае. Доказана NP-трудность оптимальной рекомбинации в общем случае с использованием известной идеи преобразования задачи вершинного покрытия в задачу коммивояжёра [2]. В разд. 3 предложены сводимости рассматриваемой задачи к задаче коммивояжёра на графах со степенью вершин не более чем 4 в симметрическом случае и не более чем 3 — в общем. Решение таких задач может быть получено, например, алгоритмами из [9], имеющими оценки трудоёмкости существенно ниже, чем известная оценка $O(n^2 2^n)$ алгоритма динамического программирования [11]. Заключительные замечания содержатся в разд. 4.

2. NP-трудность задачи

2.1. Симметрический случай. В [12] доказана NP-полнота задачи проверки свойства гамильтоновости решёточных графов. Напомним, что граф $G' = (V', E')$ с множествами вершин V' и рёбер E' называется *решёточным*, если его вершины имеют вид $v = (x_v, y_v)$ и лежат на евклидовой плоскости в точках с целочисленными координатами $(x_v, y_v) \in \mathbb{Z}^2$, причём пара вершин соединена ребром тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между ними равно 1. Здесь и далее $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел. Будем называть рёбра, соединяющие вершины в $\mathbb{Z}^2$ с равными первыми координатами, *вертикальными*, рёбра, соединяющие вершины с равными вторыми координатами, — *горизонтальными*.

Будем предполагать, что $V' > 4$, граф G' связен и не имеет мостов (в исключаемых из рассмотрения частных случаях проверка гамильтоновости выполнима за полиномиальное время). Построим сводимость задачи распознавания свойства гамильтоновости решёточного графа G' к задаче оптимальной рекомбинации на некотором взвешенном полном неориентированном графе $G = (V, E)$, где $V = V'$.

Пусть веса рёбер c_{ij} в графе G определены следующим образом. Если пара вершин $\{v_i, v_j\}$ соединена ребром в G', то $c_{ij} = 0$. Всем другим рёбрам в G приписан вес, равный 1. Рассмотрим следующие два родительских решения задачи коммивояжёра на графе G (пример графа G' и двух родительских решений для него приводится на рис. 1).

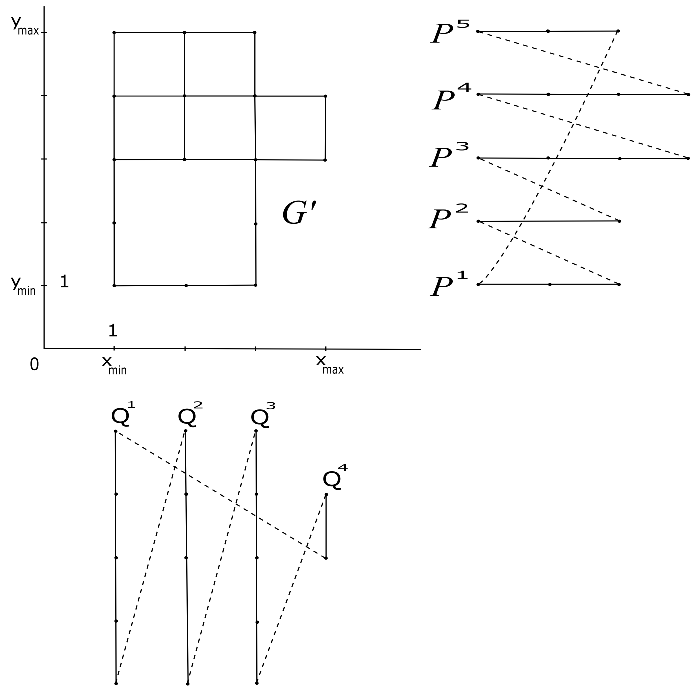

Рис. 1. Пример пары родительских «маршрутов» при сводимости задачи распознавания гамильтоновости решёточного графа к задаче оптимальной рекомбинации в симметрическом случае

Пусть $y_{\min} = \min\limits_{v \in V'} y_v$, $y_{\max} = \max\limits_{v \in V'} y_v$. Для любого целочисленного $y \in \{y_{\min}, \ldots, y_{\max}\}$ обозначим через P^y горизонтальную цепь, проходящую монотонно по возрастанию координаты x по вершинам $v \in V'$ таким, что $y_v = y$. Пусть первый родительский «маршрут» следует по цепям $P^{y_{\min}}, P^{y_{\min}+1}, \ldots, P^{y_{\max}}$, переходя с правого конца каждой цепи P^y при $y < y_{\max}$ на левый конец цепи P^{y+1}. Заметим, что такие переходы нигде не выполняются по вертикальным рёбрам ввиду того, что граф G' не имеет мостов. Для замыкания конструкции в цикл соединим ребром правый конец v_{TR} цепи $P^{y_{\max}}$ с левым концом v_{BL} цепи $P^{y_{\min}}$.

Аналогично построим второй родительский «маршрут» из вертикальных цепей. Пусть $x_{\min} = \min\limits_{v \in V'} x_v$, $x_{\max} = \max\limits_{v \in V'} x_v$. Для любого целого $x \in \{x_{\min}, \ldots, x_{\max}\}$ обозначим через Q^x вертикальную цепь, проходящую монотонно по y по вершинам $v \in V'$ таким, что $x_v = x$. Второй родительский «маршрут» следует по цепям $Q^{x_{\min}}, Q^{x_{\min}+1}, \ldots, Q^{x_{\max}}$, переходя с нижнего конца каждой цепи Q^x при $x < x_{\max}$ к верхнему концу цепи Q^{x+1}. Указанные переходы нигде не выполняются по горизонтальным рёбрам, так как граф G' не имеет мостов. Нижний конец v_{RB} цепи $Q^{x_{\max}}$ соединим с верхним концом v_{LT} цепи $Q^{x_{\min}}$.

Заметим, что первый и второй циклы не имеют общих рёбер. Действительно, общие наклонные рёбра исключаются, так как V' не может состоять из вершин единичного квадрата ($V' > 4$). Горизонтальные рёбра принадлежат только первому «маршруту» за исключением той ситуации, когда $y_{v_{\mathrm{RB}}} = y_{v_{\mathrm{LT}}}$ и замыкающее ребро $\{v_{\mathrm{RB}}, v_{\mathrm{LT}}\}$ второго «маршрута» расположено горизонтально. Но если бы в этой ситуации и первый родительский «маршрут» имел ребро $\{v_{\mathrm{RB}}, v_{\mathrm{LT}}\}$, то данное ребро являлось бы мостом графа G'. Следовательно, родительские «маршруты» по горизонтальным рёбрам пересекаться не могут. Также и вертикальные рёбра принадлежат только второму «маршруту» за исключением ситуации, когда $x_{v_{\mathrm{TR}}} = x_{v_{\mathrm{BL}}}$ и замыкающее ребро $\{v_{\mathrm{TR}}, v_{\mathrm{BL}}\}$ первого «маршрута» расположено вертикально. Но в этой ситуации второй родительский «маршрут» не может содержать ребро $\{v_{\mathrm{TR}}, v_{\mathrm{BL}}\}$, так как G' не имеет мостов.

Отметим также, что объединение рёбер родительских решений содержит в себе E'. Следовательно, любой гамильтонов цикл в графе G' — допустимое решение данной задачи оптимальной рекомбинации. С другой стороны, допустимое решение задачи оптимальной рекомбинации имеет нулевое значение целевой функции тогда и только тогда, когда оно проходит только по рёбрам из E'. Следовательно, оптимальное значение целевой функции в рассматриваемой задаче оптимальной рекомбинации равно 0 тогда и только тогда, когда в графе G' существует гамильтонов цикл. Доказана следующая

Теорема 1. *Оптимальная рекомбинация для задачи коммивояжёра в симметрическом случае NP-трудна в сильном смысле.*

В [12] также доказана NP-полнота задачи проверки наличия в решёточном графе *гамильтоновой цепи*. Оптимальная рекомбинация для этой задачи состоит в поиске в графе кратчайшей гамильтоновой цепи, совпадающей с двумя заданными родительскими гамильтоновыми цепями по тем рёбрам, по которым проходят обе родительские цепи, и не проходящего по рёбрам, отсутствующим в обоих из них. Аналогично теореме 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Оптимальная рекомбинация для задачи отыскания кратчайшей гамильтоновой цепи в графе с заданными произвольно длинами рёбер NP-трудна в сильном смысле.*

При доказательстве теоремы 2, в отличие от теоремы 1, случаи, когда граф G' имеет мосты, не исключаются из рассмотрения. Вместо этого при построении сводимости каждый максимальный подграф без мостов рассматривается отдельно.

2.2. Общий случай. В общем случае задача оптимальной рекомбинации не является обобщением рассмотренной в п. 2.1. Действительно, даже при симметрической матрице расстояний (c_{ij}) пара родительских «маршрутов», понимаемых как контуры, обусловливает существенно иное множество допустимых решений задачи оптимальной рекомбинации, чем та же пара «маршрутов», понимаемых как циклы. Таким образом, общий случай требует отдельного доказательства сложности.

Теорема 3. *Оптимальная рекомбинация для задачи коммивояжёра в общем случае NP-трудна в сильном смысле.*

Доказательство. Для установления сложности общего случая может быть использован аналог известной сводимости задачи о вершинном покрытии к задаче коммивояжёра [2].

Пусть индивидуальная задача вершинного покрытия задана графом $G' = (V', E')$. Требуется найти вершинное покрытие графа G' минимальной мощности. Будем считать, что вершины множества V' пронумерованы, т. е. $V' = \{v_1, \ldots, v_n\}$, где $n = |V'|$, и пусть $m = |E'|$.

Рассмотрим полный ориентированный граф $G = (V, A)$, где множество вершин V состоит из $|E'|$ *проверяющих покрытие* компонент по 12 вершин в каждой: $V_e = \{(v_i, e, k), (v_j, e, k) : 1 \leqslant k \leqslant 6\}$ для каждого $e = \{v_i, v_j\} \in E',\ i < j$. Кроме того, в V входят n *выбирающих* вершин, обозначим их через $a_1, \ldots, a_n$, а также *вспомогательная* вершина a_{n+1}.

Пусть в качестве родительских «маршрутов» в графе G заданы следующие два контура (пример пары таких контуров для случая $G' = K_3$ приведён на рис. 2).

1. Каждую проверяющую покрытие компоненту V_e, где $e = \{v_i, v_j\} \in E'$ и $i < j$, первый контур проходит за два раза. В первый раз будут пройдены вершины, относящиеся к v_i, в порядке

$$(v_i, e, 1), \ldots, (v_i, e, 6), \tag{1}$$

а во второй раз — вершины, относящиеся к v_j, в порядке

$$(v_j, e, 1), \ldots, (v_j, e, 6). \tag{2}$$

2. Второй контур каждую проверяющую покрытие компоненту V_e,

где $e = \{v_i, v_j\} \in E'$ и $i < j$, проходит в следующем порядке:

$$(v_i, e, 2), (v_i, e, 3), (v_j, e, 1), (v_j, e, 2), (v_j, e, 3), (v_i, e, 1),$$
$$(v_i, e, 6), (v_j, e, 4), (v_j, e, 5), (v_j, e, 6), (v_i, e, 4), (v_i, e, 5).$$

Между проверяющими покрытие компонентами первый родительский «маршрут» проходит следующим образом. Для каждой вершины $v \in V'$ произвольно упорядочим рёбра $e^{v,1}, e^{v,2}, \ldots, e^{v,\deg(v)}$ графа G', инцидентные v, где $\deg(v)$ — степень вершины v в графе G'. Во всех компонентах проверки покрытия последовательно в выбранном порядке $e^{v,1}, e^{v,2}, \ldots, e^{v,\deg(v)}$ первый «маршрут» проходит по 6 вершин вида $(v, e, k),\ k = 1, \ldots, 6,\ e \in \{e^{v,1}, e^{v,2}, \ldots, e^{v,\deg(v)}\}$. Таким образом, каждая проверяющая покрытие компонента V_e, где $e = \{u, v\} \in E'$, окажется полностью пройдена двумя участками «маршрута» по 6 вершин в каждом.

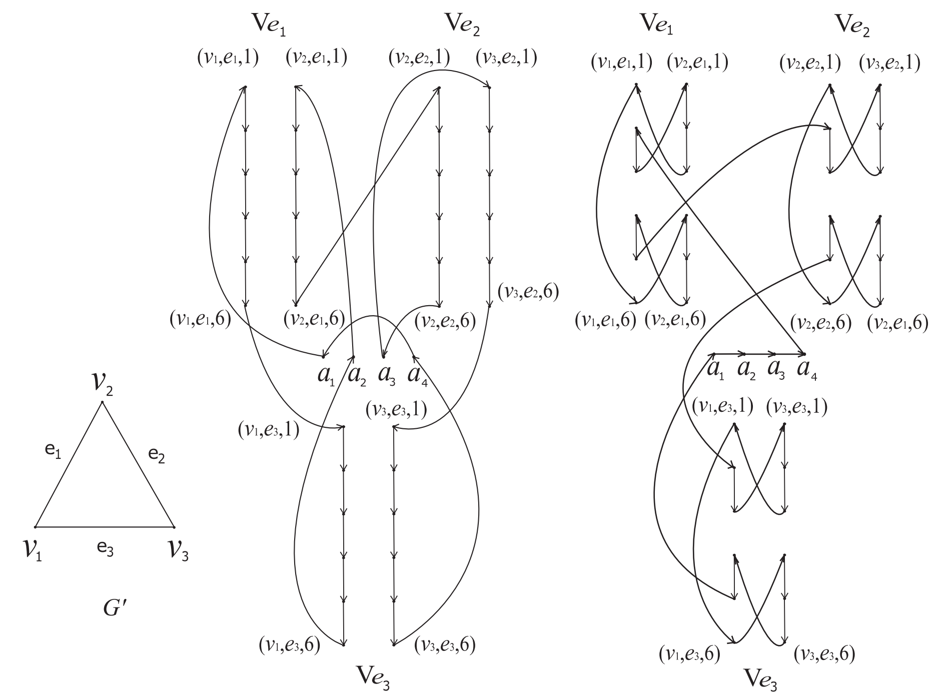

Рис. 2. Пара родительских контуров для случая $G' = K_3$. Последовательности обхода рёбер: для вершины v^1: $e^{v_1,1} = e_1,\ e^{v_1,2} = e_3$; для вершины v^2: $e^{v_2,1} = e_1,\ e^{v_2,2} = e_2$; для вершины v^3: $e^{v_3,1} = e_2, e^{v_3,2} = e_3$

Второй родительский «маршрут» проходит проверяющие покрытие компоненты в произвольном порядке рёбер $V_{e_1}, \ldots, V_{e_m}$, начиная прохождение компоненты V_{e_k} для каждого $e_k = \{v_{i_k}, v_{j_k}\} \in E'$, $i_k < j_k$, $k = 1, \ldots, m$, с вершины $(v_{i_k}, e_k, 2)$ и заканчивая вершиной $(v_{i_k}, e_k, 5)$. Таким образом определяется последовательность индексов вершин $i_1, \ldots, i_m$, в которой возможны повторения.

Построенные участки родительских «маршрутов» замыкаются в гамильтоновы обходы графа G с использованием вершин $a_1, \ldots, a_{n+1}$: первый контур замыкается дугами

$$(a_1, (v_1, e^{v_1,1}, 1)),\ ((v_1, e^{v_1,\deg(v_1)}, 6), a_2),$$
$$(a_2, (v_2, e^{v_2,1}, 1)),\ ((v_2, e^{v_2,\deg(v_2)}, 6), a_3),$$
$$\ldots,$$
$$(a_n, (v_n, e^{v_n,1}, 1)),\ ((v_n, e^{v_n,\deg(v_n)}, 6), a_{n+1}), (a_{n+1}, a_1),$$

а второй — дугами

$$(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_{n+1}),$$
$$(a_{n+1}, (v_{i_1}, e_1, 2)),\ ((v_{i_m}, e_m, 5), a_1).$$

Назначим в полном ориентированном графе G единичные веса всем дугам $(a_i, (v_i, e^{v_i,1}, 1))$, $i = 1, \ldots, n$. Кроме того, назначим веса, равные $n + 1$, всем дугам второго «маршрута», соединяющим между собой компоненты $V_{e_1}, \ldots, V_{e_m}$, и дугам $(a_{n+1}, (v_{i_1}, e_1, 2))$ и $((v_{i_m}, e_m, 5), a_1)$. Всем другим дугам графа G приписывается вес 0.

Заметим, что для любого вершинного покрытия C графа G' множество допустимых решений задачи оптимальной рекомбинации с указанными двумя родительскими «маршрутами» содержит контур $R(C)$ (см. рис. 3), устроенный следующим образом. Пусть для каждой $v_i \in C$ в $R(C)$ входят дуги $(a_i, (v_i, e^{v_i,1}, 1))$ и $((v_i, e^{v_i,\deg(v_i)}, 6), a_{i+1})$, а компоненты V_e, $e \in \{e^{v_i,1}, e^{v_i,2}, \ldots, e^{v_i,\deg(v_i)}\}$, между собой связываются дугами из первого «маршрута». Для каждой вершины v_i, не входящей в C, в контуре $R(C)$ присутствует дуга (a_i, a_{i+1}), а также дуга (a_{n+1}, a_1).

Пусть $R(C)$ проходит по каждой компоненте V_e проверки покрытия одним из двух способов:

1) если оба конца ребра e принадлежат C, то $R(C)$ проходит данную компоненту по тем же дугам, что и первый родительский «маршрут»;

2) если $e = \{u, v\}$, $u \in C$, $v \notin C$, то $R(C)$ проходит вершины данной компоненты в порядке

$$(u, e, 1), (u, e, 2), (u, e, 3), \quad (v, e, 1), \ldots, (v, e, 6), \quad (u, e, 4), (u, e, 5), (u, e, 6).$$

Непосредственная проверка показывает, что в последнем случае обход компоненты V_e не нарушает условий задачи оптимальной рекомбинации.

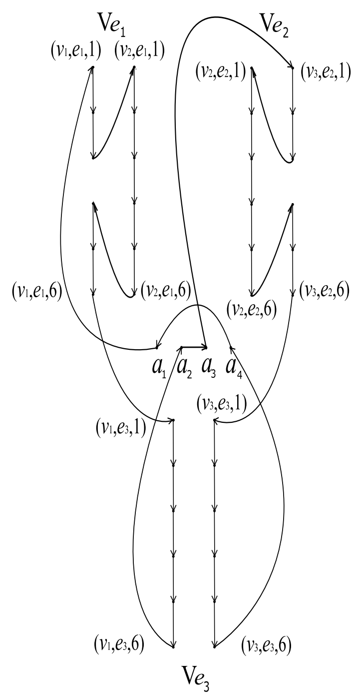

Рис. 3. Решение $R(C)$ задачи оптимальной рекомбинации, соответствующее вершинному покрытию $\{v_1, v_3\}$ графа $G' = K_3$

Выполнение условий задачи оптимальной рекомбинации для построенного контура следует из того, что, с одной стороны, все дуги, использованные в $R(C)$, представлены по крайней мере в одном из родительских решений, с другой стороны, в оба родительских маршрута входят лишь дуги вида

$$((u, e, 2), (u, e, 3)),\ ((u, e, 4), (u, e, 5)),\ ((v, e, 1), (v, e, 2)),$$

$$((v, e, 2), (v, e, 3)),\ ((v, e, 4), (v, e, 5)), ((v, e, 5), (v, e, 6))$$

из проверяющих покрытие компонент V_e, $e = \{u, v\} \in E'$, где u имеет меньший порядковый номер, чем v. Все эти дуги входят в $R(C)$. Суммарная длина дуг контура $R(C)$ равна $|C|$.

Поставим в соответствие каждому допустимому решению R построенной задачи оптимальной рекомбинации набор вершин $C(R)$ следующим образом: v_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, входит в $C(R)$ тогда и только тогда, когда в R входит дуга $(a_i, (v_i, e^{v_i,1}, 1))$.

Будем рассматривать только решения R со значением целевой функции не более n, что означает отсутствие в них дуг второго «маршрута», соединяющих между собой компоненты проверки покрытия, а также дуг $(a_{n+1}, (v_{i_1}, e_1, 2))$ и $((v_{i_m}, e_m, 5), a_1)$. Этому условию отвечает, например, первый родительский «маршрут».

Рассмотрим случай, когда дуга $(a_i, (v_i, e^{v_i,1}, 1))$ входит в R. Каждая проверяющая покрытие компонента V_e, где $e = \{v_i, v_j\} \in E'$, в таком случае может быть пройдена одним из двух способов: либо как в первом «маршруте» (в этом случае ввиду гамильтоновости R v_j также будет выбрана в $C(R)$), либо в порядке

$$(v_i, e, 1), (v_i, e, 2), (v_i, e, 3), \quad (v_j, e, 1), \ldots, (v_j, e, 6),$$
$$(v_i, e, 4), (v_i, e, 5), (v_i, e, 6)$$

(в этом случае v_j не будет выбрана в $C(R)$). Поскольку сделано предположение, что дуга $(a_i, (v_i, e^{v_i,1}, 1))$ входит в R, компоненты проверки покрытия V_e, $e \in \{e^{v_i,1}, e^{v_i 2}, \ldots, e^{v_i,\deg(v_i)}\}$, связываются между собой дугами из первого «маршрута» и, кроме того, в R входит дуга $((v_i, e^{v_i,\deg(v_i)}, 6), a_{i+1})$. Заметим, что суммарная длина дуг контура R равна $|C(R)|$, а множество $C(R)$ является вершинным покрытием в графе G', так как прохождение «маршрута» R по каждой компоненте V_e гарантирует покрытие каждого ребра $e \in E'$.

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее значения целевых функций, между вершинными покрытиями в графе G' и допустимыми решениями построенной задачи оптимальной рекомбинации с длиной «маршрута» не более n. Отсюда следует утверждение теоремы.

3. Сводимость к задаче коммивояжёра на графах с ограниченной степенью вершин

В этом разделе устанавливается связь рассматриваемых задач оптимальной рекомбинации с модификацией задачи коммивояжёра на графе с ограниченной степенью вершин, произвольными положительными длинами рёбер и заданным множеством *предписанных* рёбер или дуг. В таком графе требуется найти кратчайший гамильтонов цикл или контур, проходящий по всем предписанным рёбрам или дугам.

3.1. Общий случай. Рассмотрим общий случай задачи, когда в ориентированном полном графе $G = (V, A)$ задано два родительских гамильтоновых «маршрута» с множествами дуг A_1, A_2 и требуется решить задачу оптимальной рекомбинации. Данная задача преобразуется в задачу отыскания кратчайшего гамильтонова контура в ориентированном графе $G' = (V', A')$, полученном из G исключением всех дуг, лежащих в

$A\backslash(A_1 \cup A_2)$, и стягиванием каждого пути, содержащегося в обоих родительских «маршрутах», в предписанную *псевдодугу* той же длины и направленности, что и данный путь. Длины прочих сохранившихся дуг в G' остаются теми же, что и в G. Кратчайший гамильтонов контур в G' трансформируется в оптимум задачи оптимальной рекомбинации на G обратной заменой каждой псевдодуги соответствующим ей путём в оптимальном «маршруте».

Заметим, что каждая вершина в G' имеет две входящие дуги и две исходящие. Задача коммивояжёра на таком ориентированном графе эквивалентна задаче коммивояжёра на кубическом ориентированном графе $G'' = (V'', A'')$, где каждая вершина $v \in V'$ заменена двумя вершинами $\check{v}, \hat{v}$, соединенными *фиктивной* дугой нулевой длины $(\check{v}, \hat{v})$, при этом в $\check{v}$ входят дуги, входившие в v, а из $\hat{v}$ выходят дуги, выходившие из v. Дуга $e \in A''$ является предписанной и называется *псевдодугой*, если ей соответствует псевдодуга графа G'.

Решение последней задачи может быть получено перебором всех допустимых решений задачи коммивояжёра с предписанными рёбрами на вспомогательном неориентированном графе $\overline{G} = (V'', \overline{E})$, где пара вершин u, v соединяется ребром тогда и только тогда, когда эти вершины связывала дуга (или пара дуг) в графе G'', а ребро $\{u, v\} \in \overline{E}$ полагается предписанным, если (u, v) или (v, u) — псевдодуга или фиктивная дуга в графе G''. Множество предписанных рёбер в $\overline{G}$ обозначим через $\overline{F}$. Выписать все гамильтоновы циклы в графе $\overline{G}$ с учётом предписанных рёбер позволяет алгоритм трудоёмкости $O(|V''| \cdot 2^{(|\overline{E}|-|\overline{F}|)/4})$, предложенный в [9]. Далее, для любого гамильтонова цикла из $\overline{G}$ за время $O(|V''|)$ выясняется возможность провести по нему контуры в G'' в каждом из двух направлений и вычисляются длины таких контуров, если они существуют. Заметим, что $|\overline{E}| - |\overline{F}| = d \leqslant |E'| \leqslant 2n$, где d — число дуг, присутствующих ровно в одном из родительских «маршрутов». Следовательно, трудоёмкость решения задачи оптимальной рекомбинации на графе G равна $O(n \cdot 2^{d/4})$, или $O(n \cdot 1.42^n)$.

На практике при реализации данного подхода к поиску решения задачи оптимальной рекомбинации стягивание путей, содержащихся в обоих родительских «маршрутах», может существенно сократить затраты памяти и трудоёмкость алгоритма оптимальной рекомбинации, если имеется большое число совпадений между родительскими решениями.

3.2. Симметрический случай. Пусть имеет место симметрический случай: в графе $G = (V, E)$ задано два родительских гамильтоновых цикла с множествами рёбер E_1, E_2 и требуется решить задачу оптимальной рекомбинации. Построим сводимость данной задачи к задаче коммивояжёра на графе со степенью вершин не более 4 и заданным подмножеством предписанных рёбер. Подобно общему случаю задача оптимальной рекомбинации сводится к задаче коммивояжёра на графе $G' = (V', E')$, полученном из G исключением всех рёбер, лежащих в $E \backslash (E_1 \cup E_2)$, и стягиванием цепей, содержащихся в обоих родительских циклах. Под стягиванием в данном случае понимается следующее отображение. Пусть некоторая цепь P_{uv} с концами в вершинах u и v является общим участком родительских циклов и не является частью какой-то другой цепи, содержащейся в обоих родительских циклах. Стягивание цепи P_{uv} переводит все её вершины и рёбра в одно предписанное ребро $\{u, v\}$ нулевой длины. Все прочие вершины и рёбра графа остаются без изменений. Пусть F' обозначает множество рёбер, предписанных в G' при стягивании всех цепей, содержащихся в обоих родительских циклах.

Степень вершин в G' не превышает четырёх, а число вершин не превышает n. Если оптимум в задаче коммивояжёра с обязательным включением рёбер из F' на графе G' некоторым образом уже получен, то замена предписанных рёбер из F' соответствующими им цепями в графе G обеспечивает выполнение условий задачи оптимальной рекомбинации. Целевые функции двух этих задач отличаются на константу, равную общей длине исключенных цепей.

Для поиска оптимума задачи коммивояжёра на графе G' может быть использован рандомизированный алгоритм, предложенный в [9] для решения задачи коммивояжёра на графах со степенью вершин не более 4 и заданным множеством предписанных рёбер. Особенность данного алгоритма состоит в том, что кроме исходных данных задачи на вход подается значение p, указывающее требуемую вероятность получения оптимального решения. Если $p \in [0, 1)$ — константа, не зависящая от исходных данных задачи, то трудоёмкость рандомизированного алгоритма [9] составляет $O((27/4)^{n/3})$, что есть $O(1.89^n)$. Дерандомизированный вариант алгоритма из [9], соответствующий случаю $p = 1$, имеет несколько бóльшую трудоёмкость.

Заключение

Полученные результаты показывают, что оптимальная рекомбинация для задачи коммивояжёра NP-трудна, однако для получения оптимального решения-потомка существуют более быстрые алгоритмы, чем известный метод динамического программирования для общего случая задачи коммивояжёра.

По-видимому, утверждения о NP-трудности оптимальной рекомбинации могут быть распространены и на некоторые другие задачи, область допустимых решений которых задана множеством перестановок. В случае использования двоичной кодировки решений с этой целью может быть использован подход [10], основанный на сводимости задач оптимальной рекомбинации.

Предложенные в [9] алгоритмы для задачи коммивояжёра на графе со степенями вершин не более 3 и 4 могут не быть наилучшими по трудоёмкости. В связи с этим представляется перспективным дальнейшее исследование этих частных случаев. Кроме того, представляет интерес экспериментальное исследование предложенных операторов оптимальной рекомбинации в составе генетических алгоритмов и их сравнение с операторами оптимальной рекомбинации, основанными на динамическом программировании [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Борисовский П. А., Еремеев А. В.** Генетический алгоритм для задачи о вершинном покрытии графа // Математика и информатика: наука и образование. Вып. 7. — Омск: ОмГПУ, 2008. — С. 49–54.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
3. **Agarwal C. C., Orlin J. B., Tai R. P.** Optimized crossover for the independent set problem // Working paper # 3787-95. — Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1995. — 17 p.
4. **Balas E., Niehaus W.** Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // J. Heuristics. — 1998. — Vol. 4, N 2 — P. 107–122.
5. **Borisovsky P., Dolgui A., Eremeev A.** Genetic algorithms for a supply management problem: MIP-recombination vs greedy decoder // Europ. J. Oper. Res. — 2009. — Vol. 195, N 3. — P. 770–779.
6. **Cook W., Seymour P.** Tour merging via branch-decomposition // INFORMS J. Computing. — 2003. — Vol. 15, N 2. — P. 233–248.
7. **Cotta C., Alba E., Troya J. M.** Utilizing dynastically optimal forma recombination in hybrid genetic algorithms // Proc. 5th Int. Conf. on Parallel Problem Solving from Nature. — Berlin: Springer-Verl., 1998. — P. 305–314. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1498.)
8. **Dolgui A., Eremeev A., Guschinskaya O.** MIP-based GRASP and genetic algorithm for balancing transfer lines // Matheuristics. Hybridizing metaheuristics and mathematical programming. — Berlin: Springer-Verl., 2010. — P. 189–208.
9. **Eppstein D.** The traveling salesman problem for cubic graphs // J. Graph Algorithms Appl. — 2007. — Vol. 11, N 1. — P. 61–81.

10. **Eremeev A. V.** On complexity of optimal recombination for binary representations of solutions // Evolutionary Computation. — 2008. — Vol. 16, N 1. — P. 127–147.
11. **Held M., Karp R. M.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Ind. Appl. Math. — 1962. — Vol. 10. — P. 196–210.
12. **Itai A., Papadimitriou C. H., Szwarcfiter J. L.** Hamilton paths in grid graphs // SIAM J. Computing. — 1982. — Vol. 11, N 4. — P. 676–686.
13. **Reeves C. R.** Genetic algorithms for the operations researcher // INFORMS J. Comput. — 1997. — Vol. 9, N 3. — P. 231–250.
14. **Whitley D., Hains D., Howe A.** A hybrid genetic algorithm for the traveling salesman problem using generalized partition crossover // Proc. 11th Int. Conf. on Parallel Problem Solving from Nature. — Berlin: Springer-Verl., 2010. — P. 566–575. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6238.)
15. **Yagiura M., Ibaraki T.** The use of dynamic programming in genetic algorithms for permutation problems // Europ. J. Oper. Res. — 1996. — Vol. 92. — P. 387–401.

Еремеев Антон Валентинович,
e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

Статья поступила
2 августа 2010 г.

Переработанный вариант —
18 октября 2010 г.