ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 41–60

УДК 519.8

ПРИБЛИЖЁННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФОВ

В. П. Ильев, С. Д. Ильева, А. А. Навроцкая

Аннотация. Рассматриваются несколько вариантов задачи аппроксимации графа. Предложены приближённые алгоритмы для этих задач, получены гарантированные оценки точности алгоритмов. В частности, показано, что задача аппроксимации графами с ограниченным числом компонент связности принадлежит классу APX.

Ключевые слова: задача аппроксимации графа, приближённый алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

Задачи аппроксимации графов наряду с задачами о минимальных разрезах в графах являются наиболее адекватными математическими моделями задач классификации взаимосвязанных объектов. Однако, в отличие от задачи о минимальном разрезе в задаче аппроксимации графа минимизируется не только число «лишних» связей между классами, но и число «недостающих» связей внутри классов. Постановки и различные интерпретации этой задачи см. в [5, 6, 8, 11, 12].

Будем рассматривать только обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных рёбер. Граф называется M*-графом*, если каждая его компонента связности есть полный граф. Обозначим через $\mathcal{M}(V)$ класс всех M-графов на множестве вершин V, через $\mathcal{M}_k(V)$ — класс всех M-графов на множестве вершин V, имеющих ровно k непустых компонент связности, через $\mathcal{M}_k^1(V)$ — класс всех M-графов на множестве вершин V, имеющих не более k компонент связности, $2 \leqslant k \leqslant n$.

В классе всех помеченных графов введём понятие расстояния. *Расстояние* между помеченными графами $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ определяется следующим образом: $\rho(G_1, G_2) = |E_1 \triangle E_2|$, где

$$E_1 \triangle E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1).$$

В литературе рассматривались три варианта задачи аппроксимации графа.

Задача А. *Для произвольного помеченного графа* $G = (V, E)$ *найти граф* $M^* \in \mathcal{M}(V)$ *такой, что* $\rho(G, M^*) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}(V)} \rho(G, M)$.

Задача А$_k$. *Даны граф* $G = (V, E)$ *и целое число* k, $2 \leqslant k \leqslant n$. *Найти такой граф* $M^* \in \mathcal{M}_k(V)$, *что* $\rho(G, M^*) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}_k(V)} \rho(G, M)$.

Задача А^1_k. Даны граф $G = (V, E)$ и целое число k, $2 \leqslant k \leqslant n$. Найти такой граф $M^* \in \mathcal{M}^1_k(V)$, что $\rho(G, M^*) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}^1_k(V)} \rho(G, M)$.

Рассматривались взвешенные и ориентированные версии этих задач.

Вычислительная сложность задач аппроксимации графов долгое время оставалась неизвестной. В 2004 г. В. П. Ильев и А. С. Талевнин [7] доказали, что взвешенная задача А$_k$ является NP-трудной при любом фиксированном $k \geqslant 2$. В 2006 г. А. В. Кононов показал, что задача A_2 на кубических графах NP-трудна, благодаря чему удалось доказать, что все варианты задачи аппроксимации графа являются NP-трудными [1], откуда следует, что они NP-трудны и для ориентированных графов.

До недавнего времени практически отсутствовали алгоритмы решения задач аппроксимации графов. В [10] показано, что задача аппроксимации графа без треугольников сводится к построению в нём наибольшего паросочетания. В 1971 г. Г. А. Вейнер [2] предложил алгоритм решения задачи аппроксимации графов, не содержащих четырёхвершинных подграфов ровно с пятью рёбрами, однако не доказал, что результатом работы алгоритма действительно является M-граф, оптимально аппроксимирующий данный граф. Обоснование алгоритма Г. А. Вейнера дано Г. Ш. Фридманом [9].

Целью настоящей статьи является разработка и анализ приближённых алгоритмов для задач аппроксимации графов. Напомним, что алгоритм решения комбинаторной оптимизационной задачи называется *α-приближённым*, если для любого входа I он за полиномиальное время находит допустимое решение задачи I, вес которого отличается от веса оптимального решения не более чем в α раз. Говорят, что задача комбинаторной оптимизации принадлежит классу APX, если для неё существует α-приближённый алгоритм, где α — некоторая константа. Семейство алгоритмов A_ε называют *полиномиальной приближённой схемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ любой алгоритм из A_ε является $(1 + \varepsilon)$-приближённым алгоритмом.

Рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{G}_n$ n-вершинных графов. Графы семейства $\mathcal{G}_n$ назовём *неплотными*, если $|E| \leqslant \alpha n^\beta$ для любого графа $G = (V, E)$ из $\mathcal{G}_n$, где α, β — некоторые константы, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 2$.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс задач минимизации. Для $I \in \mathcal{K}$ обозначим через $\mathrm{OPT}(I)$ оптимальное значение целевой функции, а через $A(I)$ — значение, найденное приближённым алгоритмом A. Алгоритм A называется *гарантированно асимптотически точным*, если

$$A(I) \leqslant (1+\varepsilon_n)\mathrm{OPT}(I)$$

на множестве $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ задач размерности n, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ (об алгоритмах с оценками см. [3]).

В [1] доказано существование полиномиальной приближённой схемы для задачи A_2^1, а в [4] предложены простые приближённые алгоритмы с константными оценками точности для задач A_2^1 и A_2. В нашей статье предложены алгоритмы приближённого решения различных вариантов задачи аппроксимации графа. Разработан гарантированно асимптотически точный алгоритм и полиномиальная приближённая схема для задачи A_k^1 на неплотных графах, а также 3-приближённый алгоритм для задачи A_2. Доказано, что задача A_k^1 принадлежит классу APX для любого фиксированного $k \geqslant 2$. Предложен также приближённый алгоритм для задачи A, получены гарантированные оценки точности этого алгоритма.

1. Полиномиальная приближённая схема для задачи $\mathbf{A}_k^1$ на неплотных графах

Рассмотрим следующую эквивалентную постановку задачи A_k^1.

Для графа $G = (V, E)$ найти разбиение $P = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ множества V, на котором достигает минимума функция

$$\begin{aligned} f(P) = {}&|\{uv \notin E \mid u, v \in V_i,\ i \in \{1, \ldots, k\}\}| \\ &+ |\{uv \in E \mid u \in V_i,\ v \in V_j,\ i \in \{1, \ldots, k-1\},\ j \in \{i+1, \ldots, k\}\}|. \end{aligned}$$

При этом какие-то из множеств $V_1, \ldots, V_k$ могут быть пустыми.

Очевидно, что $f(P) = \rho(G, M)$, где $M \in \mathcal{M}_k^1(V)$ — M-граф с компонентами связности, порождёнными множествами $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Обозначим

$$N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}, \quad \overline{N}_G(v) = V \setminus (N_G(v) \cup \{v\}).$$

Каждой вершине $v \in V$ графа G и разбиению $P = (V_1, \ldots, V_k)$ поставим в соответствие величины

$$b_i(v, P) = |\overline{N}_G(v) \cap V_i| + |N_G(v) \cap (V \setminus V_i)|, \quad i \in 1, \ldots, k.$$

Заметим, что $b_i(v,P)$ — это вклад вершины v в целевую функцию при помещении v в V_i. Величину $b_i(v,P)$ будем называть *штрафом* вершины $v \in V_i$.

Лемма 1. *Для любого допустимого решения $P = (V_1, \ldots, V_k)$ задачи A_k^1 на n-вершинном графе $G = (V,E)$ справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{v \in V_i} b_i(v,P) = 2f(P)$.*

Доказательство. Суммируя $|\overline{N}_G(v) \cap V_i|$ по всем $v \in V_i$, мы дважды считаем каждое отсутствующее ребро uv в подграфе графа G, порождённом множеством V_i, $i \in \{1,\ldots,k\}$. Сумма $|N_G(v) \cap (V \setminus V_i)|$ по всем $v \in V_i$ определяет число рёбер разреза между множествами V_i и $V \setminus V_i$. При суммировании по всем $i \in \{1,\ldots,k\}$ каждое ребро разреза будет посчитано дважды. Тем самым

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \sum_{v \in V_i} b_i(v,P) = 2|\{uv \notin E \mid u,v \in V_i,\ i \in \{1,\ldots,k\}\}|\\ + 2|\{uv \in E \mid u \in V_i,\ v \in V_j,\ i \in \{1,\ldots,k-1\},\ j \in \{i+1,\ldots,k\}\}|.\end{aligned}$$

Отсюда, используя определение $f(P)$, получаем требуемое равенство. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $P = (V_1, \ldots, V_k)$ — произвольное разбиение множества вершин V графа $G = (V,E)$. Тогда для любой $v \in V$ верно равенство*

$$\sum_{i=1}^{k} b_i(v,P) = n - 1 + |N_G(v)|(k-2).$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ — произвольная вершина. Учитывая, что

$$|N_G(v) \cap (V \setminus V_i)| = \sum_{j \neq i} |N_G(v) \cap V_j|,$$

получаем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} b_i(v,P) = \sum_{i=1}^{k} (|N_G(v) \cap V_1| + \ldots + |N_G(v) \cap V_{i-1}| + |\overline{N}_G(v) \cap V_i|\\ + |N_G(v) \cap V_{i+1}| + \ldots + |N_G(v) \cap V_k|).\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые в две суммы так, чтобы одна состояла из слагаемых, содержащих $|\overline{N}_G(v) \cap V_i|$, а другая — из слагаемых, содержащих

$|N_G(v) \cap V_i|$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} b_i(v,P) = \sum_{i=1}^{k} |\overline{N}_G(v) \cap V_i| + (k-1)\sum_{i=1}^{k} |N_G(v) \cap V_i|.$$

Несложно заметить, что первая сумма равна числу несмежных с v вершин, или $|\overline{N}_G(v)| = n - 1 - |N_G(v)|$, а вторая — степени вершины v, т. е. $|N_G(v)|$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} b_i(v,P) = |\overline{N}_G(v)| + (k-1)|N_G(v)| = n - 1 + (k-2)|N_G(v)|.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $P = (V_1, \dots, V_k)$ — допустимое решение задачи A_k^1 на графе $G = (V,E)$ и $v \in V_p$, где $p \in \{1,\dots,k\}$. Если для некоторого $q \in \{1,\dots,k\}$ имеет место неравенство*

$$b_p(v,P) - b_q(v,P) > 0,$$

то перенос v в компоненту V_q приводит к уменьшению значения $f(P)$.

Доказательство. Ясно, что $p \neq q$. Пусть $P' = (V_1', \dots, V_k')$ — такое разбиение, что $V_i' = V_i$ для $i \notin \{p,q\}$, $V_p' = V_p \setminus \{v\}$, $V_q' = V_q \cup \{v\}$. Вычислим разность $f(P) - f(P')$. В силу леммы 1

$$2f(P) - 2f(P') = \sum_{i=1}^{k} \sum_{u \in V_i} b_i(u,P) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{u \in V_i'} b_i(u,P').$$

Так как в P' все вершины, кроме v, остались в тех же подмножествах множества V, что и в разбиении P, то $u \in V_i'$ для любых $u \neq v$ и $i \in \{1,\dots,k\}$ тогда и только тогда, когда $u \in V_i$. Поэтому

$$2f(P) - 2f(P') = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{u \in V_i,\\ u \neq v}} (b_i(u,P) - b_i(u,P')) + b_p(v,P) - b_q(v,P').$$

Кроме того, нетрудно заметить, что $b_i(u,P) - b_i(u,P') = 0$ для любых $i \notin \{p,q\}$ и $u \in V_i$, а $b_q(v,P) = b_q(v,P')$. Следовательно,

$$2f(P) - 2f(P') = \sum_{i \in \{p,q\}} \sum_{\substack{u \in V_i,\\ u \neq v}} (b_i(u,P) - b_i(u,P')) + b_p(v,P) - b_q(v,P).$$

Рассмотрим разность $b_i(u,P) - b_i(u,P')$ для произвольной вершины $u \in V_i$, $u \neq v$, где $i \in \{p,q\}$:

$$b_i(u,P) - b_i(u,P') = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in V_p \cap \overline{N}_G(v) \text{ или } u \in V_q \cap N_G(v), \\ -1, & \text{если } u \in V_p \cap N_G(v) \text{ или } u \in V_q \cap \overline{N}_G(v). \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered} 2f(P) - 2f(P') = |V_p \cap \overline{N}_G(v)| + |V_q \cap N_G(v)| - |V_p \cap N_G(v)| - |V_q \cap \overline{N}_G(v)| \\ + b_p(v,P) - b_q(v,P) = |V_p \cap \overline{N}_G(v)| + |V_q \cap N_G(v)| + |V \setminus (V_p \cup V_q) \cap N_G(v)| \\ - |V \setminus (V_p \cup V_q) \cap N_G(v)| - |V_p \cap N_G(v)| - |V_q \cap \overline{N}_G(v)| + b_p(v,P) - b_q(v,P) \\ = |\overline{N}_G(v) \cap V_p| + |N_G(v) \cap (V \setminus V_p)| - |\overline{N}_G(v) \cap V_q| - |N_G(v) \cap (V \setminus V_q)| \\ + b_p(v,P) - b_q(v,P) = b_p(v,P) - b_q(v,P) + b_p(v,P) - b_q(v,P). \end{gathered}$$

Следовательно, $2f(P) - 2f(P') = 2(b_p(v,P) - b_q(v,P)) > 0$ и $f(P) > f(P')$. Лемма 3 доказана.

Для приближённого решения задачи A_k^1 предложен алгоритм локального улучшения. Алгоритм основан на пошаговом уменьшении значения целевой функции. На каждом шаге алгоритма выбираем вершину, для которой выполнено утверждение леммы 3, и перемещаем её в соответствующую компоненту.

Алгоритм локального улучшения LA.

Шаг 0. Положим $V_1 = V$, $V_2 = V_3 = \ldots = V_k = \varnothing$ и определим разбиение $P = P(V_1, V_2, \ldots, V_k)$.

Шаг s, $s \geqslant 1$. Выберем два номера p, q и вершину $v \in V_p$ такие, что

$$b_p(v,P) - b_q(v,P) = \max_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,k\}, \\ u \in V_i}} (b_i(u,P) - b_j(u,P)).$$

Если $b_p(v,P) - b_q(v,P) > 0$, то полагаем $V_p = V_p \setminus \{v\}$, $V_q = V_q \cup \{v\}$ и переходим на шаг $s+1$, иначе стоп.

Конец.

Лемма 4. *Решение P задачи A_k^1 на n-вершинном графе $G = (V,E)$, полученное алгоритмом* LA, *таково, что*

$$f(P) \leqslant \frac{n(n-1) + 2|E|(k-2)}{2k}. \tag{1}$$

Доказательство. Покажем, что после окончания работы алгоритма для любых $p \in \{1,\ldots,k\}$ и $v \in V_p$ верна оценка

$$b_p(v,P) \leqslant \frac{n - 1 + |N_G(v)|(k-2)}{k}. \tag{2}$$

По лемме 2 имеем

$$\sum_{i=1}^{k} b_i(v,P) = n-1+|N_G(v)|(k-2)$$

для всех $v \in V$. Тогда для любой $v \in V$ найдётся номер $q \in \{1,\dots,k\}$ такой, что

$$b_q(v,P) \leqslant (n-1+|N_G(v)|(k-2))/k.$$

По окончании работы алгоритма LA для всех $p \in \{1,\dots,k\}$ и $v \in V_p$ выполнено неравенство $b_p(v,P) - b_q(v,P) \leqslant 0$. Таким образом,

$$b_p(v,P) \leqslant b_q(v,P) \leqslant (n-1+|N_G(v)|(k-2))/k,$$

т. е. оценка (2) верна.

Суммируя оценку (2) по всем $v \in V$, имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{v\in V_i} b_i(v,P) \leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{v\in V_i}\frac{n-1+|N_G(v)|(k-2)}{k} = \frac{n(n-1)+2|E|(k-2)}{k}.$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем

$$f(P) \leqslant \frac{n(n-1)+2|E|(k-2)}{2k}.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Для решения P задачи A_k^1 на произвольном неплотном графе $G \in \mathcal{G}_n$, полученного алгоритмом LA, справедлива оценка*

$$f(P) \leqslant \left(1+\frac{(n+4\alpha n^\beta)(k-1)}{n^2-kn-2\alpha n^\beta}\right) f(P^*),$$

где P^* — оптимальное решение задачи A_k^1.

Доказательство. Для любого решения P задачи A_k^1 справедливо равенство

$$f(P) = \frac{n(n-1)}{2} - |E| + 2C - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} p_i p_j,$$

где C — количество таких рёбер uv, что $u \in V_i,\ v \in V_j,\ i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, а $p_i = |V_i|$. Легко показать, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} p_i p_j \leqslant \frac{n^2(k-1)}{2k}.$$

Учитывая, что для неплотных графов $|E| \leqslant \alpha n^\beta$ и $C \geqslant 0$, получаем

$$f(P) \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - \alpha n^\beta - \frac{n^2(k-1)}{2k} \geqslant \frac{n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn}{2k}.$$

Заметим, что это неравенство верно для любого разбиения P, в том числе и для оптимального разбиения P^*. Применяя (1), оценим значение целевой функции для разбиения, полученного алгоритмом локального улучшения:

$$\begin{aligned} f(P) &\leqslant \frac{n(n-1) + 2\alpha n^\beta (k-2)}{2k} \\ &= \left(1 + \frac{(4\alpha n^\beta + n)(k-1)}{n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn}\right)\left(\frac{n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn}{2k}\right) \\ &\leqslant \left(1 + \frac{(4\alpha n^\beta + n)(k-1)}{n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn}\right) f(P^*). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Очевидно, что $(4\alpha n^\beta + n)(k-1)/(n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn) \to 0$ при $n \to \infty$ и фиксированном k.

Следствие 1. *Алгоритм локального улучшения является гарантированно асимптотически точным на неплотных графах.*

Действительно, достаточно положить

$$\varepsilon_n = \frac{(4\alpha n^\beta + n)(k-1)}{n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn}.$$

Построение полиномиальной приближённой схемы для задачи A_k^1 на неплотных графах можно разбить на два этапа. На первом этапе по заданному ε из формулы $\varepsilon = (4\alpha n^\beta + n)(k-1)/(n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn)$ определяем $n = n_\varepsilon$. На втором в зависимости от размерности конкретной задачи формулируем алгоритм A_ε решения задачи A_k^1. Обозначим размерность данной задачи через n.

Если $n \geqslant n_\varepsilon$, то решаем задачу алгоритмом LA и по теореме 1 получаем оценку

$$f(P) \leqslant \left(1 + \frac{(4\alpha n^\beta + n)(k-1)}{n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn}\right) f(P^*) \leqslant (1+\varepsilon) f(P^*).$$

При $n < n_\varepsilon$ находим точное решение с помощью метода ветвей и границ или полного перебора, что гарантирует требуемую оценку. Для полного перебора в худшем случае потребуется порядка $k^{n-1}n^2$ операций. Но для любого фиксированного n_ε существует такое число γ, что $n^\gamma \geqslant k^{n-1}n^2$ при $n < n_\varepsilon$, т. е. для заданного наперёд ε существует полиномиальный алгоритм A_ε, находящий решение задачи A_k^1, на котором значение целевой функции отличается от оптимального значения целевой функции не более чем в $1+\varepsilon$ раз. Таким образом, полиномиальная приближённая схема построена.

2. Приближённые алгоритмы для задач $\mathbf{A}_2^1$ и $\mathbf{A}_2$

Будем считать, что $n \geqslant 3$. Пусть $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ — помеченные графы, $n = |V|$. Обозначим через $D(G_1, G_2)$ граф на множестве вершин V с множеством рёбер $E_1 \Delta E_2$. Нетрудно заметить, что $\rho(G_1, G_2)$ равно числу рёбер в графе $D(G_1, G_2)$, откуда вытекает

Лемма 5. *Пусть $d_{\min}$ — минимум степеней вершин в графе $D(G_1, G_2)$. Тогда $\rho(G_1, G_2) \geqslant n d_{\min}/2$.*

Для множеств $V_1, V_2, \ldots, V_s \subseteq V$ таких, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ и $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_s = V$, обозначим через $M(V_1, V_2, \ldots, V_s)$ M-граф из класса $\mathcal{M}_s^1(V)$ с компонентами связности, порождёнными множествами $V_1, \ldots, V_s$. Некоторые из множеств V_i могут быть пустыми.

Пусть $M^* = M(V_1^*, V_2^*) \in \mathcal{M}_2^1(V)$ — оптимально аппроксимирующий M-граф для графа $G = (V, E)$, $D = D(G, M^*)$. Через $d_D(v)$ обозначим степень вершины v в графе D.

Лемма 6. *Пусть $v \in V$ — вершина минимальной степени в графе D, т. е. $d_D(v) = \min\limits_{u \in V} d_D(u) = d_{\min}$, и пусть M-граф $M_v = M(V_1, V_2)$, где $V_1 = \{v\} \cup N_G(v)$, $V_2 = V \setminus V_1 = \overline{N}_G(v)$. Тогда при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $\rho(G, M_v) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*)$.*

Доказательство. Покажем, что M-граф M_v может быть получен из графа M^* путём переноса $d_{\min}$ вершин в другую компоненту. Без ограничения общности считаем, что $v \in V_1 \cap V_1^*$.

По определению в графе D смежны те и только те вершины, которые либо смежны в графе G и находятся в разных компонентах графа M^*, либо несмежны в графе G и находятся в одной компоненте графа M^*. Следовательно, $u \in V_1^*$ для любой вершины $u \in V \setminus \{v\}$ тогда и только тогда, когда либо $u \in N_G(v) \setminus N_D(v)$, либо $u \in \overline{N}_G(v) \cap N_D(v)$ (значит, $u \in V_2^*$ тогда и только тогда, когда либо $u \in N_G(v) \cap N_D(v)$, либо $u \in \overline{N}_G(v) \setminus N_D(v)$).

Положим $U_1 = \overline{N}_G(v) \cap N_D(v)$, $U_2 = N_G(v) \cap N_D(v)$. Нетрудно видеть, что $U_1 \subseteq V_1^*$, $U_2 \subseteq V_2^*$, $V_1 = (V_1^* \setminus U_1) \cup U_2$, $V_2 = (V_2^* \setminus U_2) \cup U_1$. Так как

$$|U_1| + |U_2| = |\overline{N}_G(v) \cap N_D(v)| + |N_G(v) \cap N_D(v)| = |N_D(v)| = d_{\min},$$

граф M_v может быть получен из графа M^* путём переноса $d_{\min}$ вершин в другую компоненту.

При $d_{\min} = 0$ графы M_v и M^* совпадают, т. е.

$$\rho(G, M_v) = \rho(G, M^*) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*)$$

для $n \geqslant 3$, и утверждение леммы справедливо.

Пусть $d_{\min} \geqslant 1$. Покажем, что тогда перенос одной вершины не может увеличить значение целевой функции более, чем на $n - 3$. Пусть $u \in N_D(v)$. Через M' обозначим M-граф, полученный из графа M^* путём переноса вершины u в другую компоненту. Очевидно, графы D и $D' = D(G, M')$ отличаются только рёбрами вида uw, $w \in V$, остальные рёбра у них совпадают. Следовательно,

$$\rho(G, M') - \rho(G, M^*) = |N_{D'}(u)| - |N_D(u)|.$$

Так как $v \in N_D(u)$, а $N_{D'}(u) \subseteq V \setminus \{u, v\}$, то

$$\rho(G, M') - \rho(G, M^*) \leqslant n - 2 - 1 = n - 3.$$

Итак, при переносе одной вершины целевая функция возрастёт не более чем на $n - 3$. Так как граф M_v получен из графа M^* путём переноса $d_{\min}$ вершин, то

$$\rho(G, M_v) \leqslant \rho(G, M^*) + d_{\min}(n - 3).$$

Оценим величину $\rho(G, M_v)$ с учётом леммы 5:

$$\begin{aligned}\rho(G, M_v) \leqslant \rho(G, M^*) + d_{\min}(n - 3) \leqslant \rho(G, M^*) + 2\rho(G, M^*)(1 - 3/n) \\ = (3 - 6/n)\rho(G, M^*).\end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Рассмотрим следующий алгоритм.

Алгоритм N_2^1.

Шаг 1. Для каждой вершины $u \in V$ определим M-граф $M_u \in \mathcal{M}_2^1(V)$ следующим образом: вершина u и все смежные с ней вершины графа G принадлежат одной компоненте связности графа M_u, а все несмежные с u вершины — другой компоненте.

Шаг 2. Среди всех графов M_u выберем такой граф M_N, что

$$\rho(G, M_N) = \min_{u \in V} \rho(G, M_u).$$

Конец.

Очевидно, среди всех вершин будет выбрана вершина $v \in V$ такая, что $d_D(v) = d_{\min}$. Поэтому $\rho(G, M_N) \leqslant \rho(G, M_v)$. Отсюда с учётом леммы 6 получаем оценку точности алгоритма N_2^1.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для любого n-вершинного графа $G = (V, E)$*

$$\rho(G, M_N) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*),$$

где $M^* \in \mathcal{M}_2^1(V)$ — оптимальное решение задачи A_2^1 на графе G.

Немного изменив алгоритм N_2^1, можно получить аналогичную оценку для задачи A_2.

Далее будем считать, что $G \neq K_n$, так как для K_n задача A_2 решается аналитически.

Алгоритм N_2.

Шаг 1. Для каждой вершины $u \in V$ определим M-граф $M_u \in \mathcal{M}_2^1(V)$ следующим образом: вершина u и все смежные с ней вершины графа G принадлежат одной компоненте связности графа M_u, а все несмежные с u вершины — другой компоненте.

Шаг 2. Среди всех графов M_u выберем такой граф $M' \in \mathcal{M}_2(V)$, что

$$\rho(G, M') = \min_{u \in V,\ M_u \in \mathcal{M}_2(V)} \rho(G, M_u).$$

Шаг 3. Пусть $w \in V$ — вершина минимальной степени в графе G. Определим M-граф $M'' \in \mathcal{M}_2(V)$: вершина w принадлежит одной компоненте связности графа M'', а все оставшиеся вершины — другой. Если $\rho(G, M') \leqslant \rho(G, M'')$, то $M'_N = M'$, иначе $M'_N = M''$.

Конец.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для любого n-вершинного графа $G = (V, E)$*

$$\rho(G, M'_N) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*),$$

где $M^* \in \mathcal{M}_2(V)$ — оптимальное решение задачи A_2 на графе G.

Доказательство. Пусть $D = D(G, M^*)$, $v \in V$ — вершина минимальной степени в графе D: $d_D(v) = \min\limits_{u \in V} d_D(u) = d_{\min}$, а $w \in V$ — вершина минимальной степени в графе G.

Нетрудно убедиться, что если $d_{\min} = 0$, то M-граф M_v является оптимальным решением задачи A_2. Следовательно,

$$\rho(G, M') = \rho(G, M_v) = \rho(G, M^*).$$

Поэтому

$$\rho(G, M'_N) = \min(\rho(G, M'), \rho(G, M'')) = \rho(G, M') = \rho(G, M^*).$$

Таким образом, при $n \geqslant 3$ имеем

$$\rho(G, M'_N) = \rho(G, M^*) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*).$$

Пусть $d_{\min} \geqslant 1$. Возможны 2 случая.

Случай 1. $M_v \notin \mathcal{M}_2(V)$. Тогда вершина v смежна со всеми вершинами графа G.

Если $w \in N_D(v)$, то для получения графа M'' из графа M^* надо переместить $d_{\min} - 1$ вершин. Для этого переносим все вершины из $N_D(v)$, кроме w, в компоненту, содержащую вершину v. Как и в доказательстве леммы 6 нетрудно показать, что каждая перемещённая вершина не может увеличить значение целевой функции более чем на $n - 3$. Оценим величину $\rho(G, M'')$ с учётом леммы 5:

$$\begin{aligned}\rho(G, M'') &\leqslant \rho(G, M^*) + (d_{\min} - 1)(n - 3)\\ &\leqslant \rho(G, M^*) + 2\rho(G, M^*)(1 - 3/n) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*).\end{aligned}$$

Следовательно, $\rho(G, M'_N) \leqslant \rho(G, M'') \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*)$.

Если $w \notin N_D(v)$, то для любой вершины $w' \in N_D(v)$ верно неравенство $\rho(G, M'') \leqslant \rho(G, M)$, где $M = M(\{w'\}, V \setminus \{w'\})$. Значит,

$$\rho(G, M'') \leqslant \rho(G, M) \leqslant \rho(G, M^*) + 2\rho(G, M^*)(1 - 3/n).$$

Таким образом,

$$\rho(G, M'_N) \leqslant \rho(G, M'') \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*).$$

Случай 2. $M_v \in \mathcal{M}_2(V)$. Тогда

$$\rho(G, M') \leqslant \rho(G, M_v) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*).$$

Доказательство последнего неравенства аналогично доказательству леммы 6. Таким образом,

$$\rho(G, M'_N) \leqslant \rho(G, M') \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Существует бесконечное семейство графов $\{G_n\}$ (n — число вершин графа G_n, $n = 4r + 2$, $r = 2, 3, \ldots$) такое, что

$$\rho(G_n, M_N) = (3 - 6/n)\rho(G, M^*), \quad \rho(G_n, M'_N) = (3 - 6/n)\rho(G, M^*),$$

т. е. гарантированные оценки точности алгоритмов N_2^1 и N_2 достижимы.

При любом $n = 4r + 2$ граф G_n устроен следующим образом: вершина v_1 степени $2r + 1$ смежна с вершиной v_2 степени $2r + 1$, $2r$ вершин порождают подграф, полученный из полного графа K_{2r} удалением наибольшего паросочетания мощности r, оставшиеся $2r$ вершин порождают такой же подграф. Вершина v_1 смежна со всеми вершинами первого подграфа, а вершина v_2 смежна со всеми вершинами второго подграфа. Пример графа G_n для $n = 10$ приведён на рис. 1.

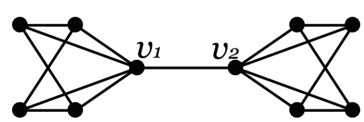

Рис. 1

Несложно проверить, что оптимальным решением задач A_2^1 и A_2 аппроксимации графа G_n является граф M^*, имеющий две компоненты, каждая из которых представляет собой клику K_{2r+1}. Вершинами одной клики являются v_1 и все смежные с ней вершины в графе G_n кроме v_2, а вершинами другой — все остальные вершины графа G_n. Следовательно, $\rho(G_n, M^*) = 2r + 1$.

Заметим, что $\rho(G_n, M_u) = 6r$ для любой вершины u графа G_n, поэтому $M_N = M_u$, где u — произвольная вершина графа G_n. А поскольку $\rho(G_n, M') = \rho(G_n, M_u) < \rho(G_n, M'')$, то $M'_N = M_N$. Таким образом,

$$\frac{\rho(G_n, M_N)}{\rho(G_n, M^*)} = \frac{\rho(G_n, M'_N)}{\rho(G_n, M^*)} = \frac{6r}{2r+1} = 3 - \frac{3}{2r+1} = 3 - \frac{6}{n}\ .$$

3. Приближённый алгоритм для задачи $\mathbf{A}_k^1$

Рассмотрим процедуру $\mathrm{P}(G, i)$, вход которой — граф $G = (V, E)$ и целое число $i \geqslant 2$, а выход — M-граф $M \in \mathcal{M}_i^1(V)$.

Процедура $\mathrm{P}(G, i)$.

Шаг 1. Если $|V| \leqslant 2$, то положим $M = G$, стоп. Иначе переходим на шаг 2.

Шаг 2. Если $i = 2$, то решим задачу A_2^1 на графе G с помощью алгоритма N_2^1. Положим $M = M_N$, где M_N — решение, построенное алгоритмом N_2^1, стоп. Если $i \neq 2$, то переходим на шаг 3.

Шаг 3. Для каждой вершины $u \in V$ выполним:

Шаг 3.1. Положим $V_1 = \{u\} \cup N_G(u)$. Если $V_1 = V$, то пусть M_u — полный граф на множестве вершин V. Иначе переходим на шаг 3.2.

Шаг 3.2. Обозначим через G_1 подграф графа G, порождённый множеством вершин $V \setminus V_1$. Выполним процедуру $\mathrm{P}(G_1, i-1)$, построенный процедурой граф обозначим через M_1. Пусть $M_1 = M(V_2, \ldots, V_j)$ для некоторого $j \leqslant i$. Положим $M_u = M(V_1, V_2, \ldots, V_j)$.

Шаг 4. Среди построенных графов M_u выберем ближайший к графу G M-граф M:

$$\rho(G, M) = \min_{u \in V} \rho(G, M_u).$$

Конец.

Для приближённого решения задачи A_k^1 на графе G будем применять следующий алгоритм.

Алгоритм N_k^1.

Шаг 1. Выполним процедуру $\mathrm{P}(G, k)$. Построенный процедурой граф обозначим через M.

Конец.

Справедлива следующая гарантированная оценка точности алгоритма N_k^1.

Теорема 4. *Для любого $k \geqslant 2$ справедливо следующее утверждение: при $n \geqslant 3$ для любого n-вершинного графа $G = (V, E)$ имеет место неравенство*

$$\rho(G, M) \leqslant (3 - 6/n)^{k-1} \rho(G, M^*) < 3^{k-1} \rho(G, M^*),$$

где $M \in \mathcal{M}_k^1(V)$ — M-граф, построенный алгоритмом N_k^1, а $M^* \in \mathcal{M}_k^1(V)$ — оптимальное решение задачи A_k^1 на графе G.

Доказательство индукцией по k. Основание индукции при $k = 2$ следует из теоремы 2.

Пусть утверждение теоремы верно для $k \leqslant i - 1$, где $i \geqslant 3$. Докажем, что оно верно для $k = i$, т. е. что для любого графа $G = (V, E)$

$$\rho(G, M) \leqslant (3 - 6/n)^{i-1} \rho(G, M^*), \tag{3}$$

где $M \in \mathcal{M}_i^1(V)$ — M-граф, построенный процедурой $P(G, i)$, а $M^* \in \mathcal{M}_i^1(V)$ — оптимальное решение задачи A_i^1 на графе G.

Пусть v — вершина минимальной степени в графе $D = D(G, M^*)$, а $d_{\min} = d_D(v)$. Рассмотрим M-граф $\overline{M} \in \mathcal{M}_i^1(V)$, полученный из графа M^* путём переноса $d_{\min}$ вершин в другие компоненты графа M^*: вершины, принадлежащие множеству $N_G(v) \cap N_D(v)$, переместим в компоненту, содержащую вершину v, а все вершины множества $\overline{N}_G(v) \cap N_D(v)$ перенесём в любые из компонент, не содержащих v.

Если $d_{\min} > 0$, то аналогично лемме 6 можно показать, что при переносе вершин значение целевой функции увеличится не более чем на $d_{\min}(n-3)$. Отсюда с учётом леммы 5 получим

$$\begin{aligned}\rho(G, \overline{M}) &\leqslant \rho(G, M^*) + d_{\min}(n-3) \\ &\leqslant \rho(G, M^*) + 2\rho(G, M^*)(1 - 3/n) = (3 - 6/n)\rho(G, M^*).\end{aligned}$$

Если $d_{\min} = 0$, то M-граф $\overline{M}$ совпадает с M-графом M^*, а значит,

$$\rho(G, \overline{M}) = \rho(G, M^*) \leqslant \rho(G, M^*)(3 - 6/n),$$

так как $n \geqslant 3$.

Итак,

$$\rho(G, \overline{M}) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*). \tag{4}$$

Пусть $V_1 = \{v\} \cup N_G(v)$. Возможны два случая.

Случай 1. $V_1 = V$. Положим $M_v = K_n$. Нетрудно убедиться, что тогда $M_v = \overline{M}$. С учётом (4) отсюда вытекает неравенство

$$\rho(G, M_v) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*) \leqslant (3 - 6/n)^{i-1}\rho(G, M^*).$$

Случай 2. $V_1 \neq V$. Пусть G_1 — подграф графа G, порождённый множеством вершин $V \setminus V_1$. Обозначим через M_1^* оптимальное решение задачи A_{i-1}^1 на графе G_1. Рассмотрим M-граф $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_i^1(V)$, содержащая v компонента связности которого совпадает с компонентой M-графа $\overline{M}$, а остальные компоненты совпадают с компонентами оптимального решения задачи A_{i-1}^1 на графе G_1, т. е. $\widetilde{M} = M(V_1) \cup M_1^*$ (здесь $M(V_1)$ — полный граф на множестве вершин V_1). Очевидно, $\rho(G, \widetilde{M}) \leqslant \rho(G, \overline{M})$, откуда с учётом (4) следует, что

$$\rho(G, \widetilde{M}) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*). \tag{5}$$

Через $M_1 \in \mathcal{M}_{i-1}^1(V \setminus V_1)$ обозначим M-граф, построенный процедурой $\mathrm{P}(G_1, i-1)$. Пусть $M_1 = M(V_2, \ldots, V_j)$ для некоторого $j \leqslant i$. Положим $M_v = M(V_1, V_2, \ldots, V_j)$.

Обозначим через $s = s(v, G)$ сумму числа отсутствующих рёбер в подграфе графа G, порождённом множеством вершин $V_1 = \{v\} \cup N_G(v)$, и величины разреза $(V_1, V \setminus V_1)$ в графе G. Очевидно, что

$$\rho(G, M_v) = s + \rho(G_1, M_1), \quad \rho(G, \widetilde{M}) = s + \rho(G_1, M_1^*).$$

Если $|V \setminus V_1| \leqslant 2$, то $M_1 = G_1$ и $\rho(G_1, M_1) = 0 = \rho(G_1, M_1^*)$. Тогда

$$\rho(G, M_v) = s + \rho(G_1, M_1) = s + \rho(G_1, M_1^*) = \rho(G, \widetilde{M}).$$

С учётом (5) отсюда вытекает неравенство

$$\rho(G, M_v) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G, M^*) \leqslant (3 - 6/n)^{i-1}\rho(G, M^*).$$

Пусть $|V \setminus V_1| \geqslant 3$. Тогда по предположению индукции

$$\rho(G_1, M_1) \leqslant (3 - 6/n)^{i-2}\rho(G_1, M_1^*).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\rho(G, M_v) &= s + \rho(G_1, M_1) \leqslant s + (3 - 6/n)^{i-2}\rho(G_1, M_1^*) \\ &\leqslant (3 - 6/n)^{i-2}s + (3 - 6/n)^{i-2}\rho(G_1, M_1^*) = (3 - 6/n)^{i-2}\rho(G, \widetilde{M}).\end{aligned}$$

С учётом (5) получаем

$$\begin{aligned}\rho(G, M_v) \leqslant (3 - 6/n)^{i-2}\rho(G, \widetilde{M}) &\leqslant (3 - 6/n)^{i-2}(3 - 6/n)\rho(G, M^*) \\ &\leqslant (3 - 6/n)^{i-1}\rho(G, M^*).\end{aligned}$$

Итак, в обоих случаях имеет место неравенство

$$\rho(G, M_v) \leqslant (3 - 6/n)^{i-1} \rho(G, M^*).$$

Поскольку на шаге 4 процедуры $\mathrm{P}(G, i)$ среди всех графов M_u будет рассмотрен, в частности, и граф M_v, отсюда вытекает неравенство (3). Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Задача аппроксимации графа* A_k^1 *принадлежит классу* APX *при любом фиксированном* $k \geqslant 2$.

4. Приближённый алгоритм для задачи A

Как и раньше, через $s(v, G)$ будем обозначать сумму числа отсутствующих рёбер в подграфе графа G, порождённом множеством вершин $\{v\} \cup N_G(v)$, и величины разреза $(\{v\} \cup N_G(v), V \setminus (\{v\} \cup N_G(v)))$ в графе G.

Для приближённого решения задачи A предлагается

Алгоритм N.

Шаг 1. Положим $G_1 = G$. Выберем вершину $v_1 \in V$ такую, что $s(v_1, G) = \min s(v, G)$, где минимум берётся по всем $v \in V$. Положим $V_1 = \{v_1\} \cup N_{G_1}(v_1)$. Если $V \setminus V_1 = \varnothing$, то стоп, иначе переходим на шаг 2.

Шаг i, $i \geqslant 2$. Обозначим через G_i подграф графа G_{i-1}, порождённый множеством $V \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{i-1})$. Пусть $v_i \in V \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{i-1})$ — такая вершина, что $s(v_i, G_i) = \min s(v, G_i)$, где минимум берётся по всем $v \in V \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{i-1})$. Положим $V_i = \{v_i\} \cup N_{G_i}(v_i)$. Если

$$V \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_i) = \varnothing,$$

то стоп. Иначе переходим на шаг i+1.

Конец.

Пусть l — число построенных алгоритмом N множеств V_i $(1 \leqslant l \leqslant n)$. Рассмотрим M-граф $M_N = M(V_1, V_2, \ldots, V_l) \in \mathcal{M}(V)$, где $M(V_1, V_2, \ldots, V_l)$ — M-граф, в котором множество V_i порождает полный подграф, $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Замечание 2. Пусть M^* — оптимально аппроксимирующий M-граф для графа G, $M_i^* \in \mathcal{M}(V \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{i-1}))$ — оптимально аппроксимирующий M-граф для графа G_i, $i \in \{1, \ldots, l\}$. Тогда

$$\rho(G, M^*) = \rho(G_1, M_1^*) \geqslant \rho(G_i, M_i^*)$$

для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Имеет место следующая оценка точности алгоритма N.

Теорема 5. *Для произвольного n-вершинного графа $G = (V, E)$ при $n \geqslant 3$ алгоритм* N *находит M-граф M_N такой, что*

$$\rho(G, M_N) \leqslant (3 - 6/n)l\, \rho(G, M^*),$$

где $M^* \in \mathcal{M}(V)$ — оптимально аппроксимирующий M-граф для графа G, l — количество компонент связности графа M_N.

Доказательство. Представим $\rho(G, M_N)$ в виде

$$\rho(G, M_N) = s(v_1, G_1) + s(v_2, G_2) + \ldots + s(v_l, G_l). \tag{6}$$

Покажем, что

$$s(v_i, G_i) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G_i, M_i^*)$$

для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Рассмотрим произвольный индекс $i \in \{1, \ldots, l\}$, обозначим через n_i число вершин графа G_i. Если $n_i \leqslant 2$, то граф G_i является M-графом. Значит,

$$s(v_i, G_i) = 0 \leqslant (3 - 6/n)\rho(G_i, M_i^*).$$

Пусть теперь $n_i \geqslant 3$. В процессе работы алгоритма на каждом шаге выбирается минимальное $s(v_i, G_i)$. Следовательно, $s(v_i, G_i) \leqslant s(v_i^*, G_i)$, где v_i^* — вершина минимальной степени в графе $D_i = D(G_i, M_i^*)$. Построим граф $\widetilde{M}_i$, изменив оптимальное решение M_i^* следующим образом. Все вершины, принадлежащие множеству $N_{G_i}(v_i^*) \cap N_{D_i}(v_i^*)$, переместим в компоненту, содержащую вершину v_i^*, а все вершины множества $\overline{N}_{G_i}(v_i^*) \cap N_{D_i}(v_i^*)$ перенесём из компоненты, содержащей v_i^*, в другие компоненты M-графа. Число перемещений равно d_i — степени вершины v_i^* в графе D_i. Если $d_i = 0$, то графы $\widetilde{M}_i$ и M_i^* совпадают. Поэтому

$$s(v_i, G_i) \leqslant s(v_i^*, G_i) \leqslant \rho(G_i, \widetilde{M}_i) = \rho(G_i, M_i^*) \leqslant (3 - 6/n_i)\rho(G_i, M_i^*)$$

(последнее неравенство следует из того, что $n_i \geqslant 3$).

Если $d_i > 0$, то каждое перемещение не может увеличить значение целевой функции более чем на $n_i - 3$. Полученное решение хуже оптимального не более чем на $d_i(n_i - 3)$. Поэтому

$$s(v_i, G_i) \leqslant s(v_i^*, G_i) \leqslant \rho(G_i, \widetilde{M}_i) \leqslant \rho(G_i, M_i^*) + d_i(n_i - 3).$$

С учётом леммы 5 получим

$$(v_i, G_i) \leqslant \rho(G_i, M_i^*) + d_i(n_i - 3) \leqslant \rho(G_i, M_i^*) + 2\rho(G_i, M_i^*)(1 - 3/n_i)$$
$$= (3 - 6/n_i)\rho(G_i, M_i^*) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G_i, M_i^*).$$

Итак, $s(v_i, G_i) \leqslant (3 - 6/n)\rho(G_i, M_i^*)$ для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$. В силу замечания 2 отсюда следует, что $s(v_i, G_i) \leqslant (3-6/n)\rho(G_i, M^*)$ для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Подставив последнее неравенство в (6), получим

$$\rho(G, M_N) \leqslant (3 - 6/n)l\, \rho(G, M^*).$$

Теорема 5 доказана.

Следствие 3. *Для произвольного n-вершинного графа $G = (V, E)$ при $n \geqslant 3$ алгоритм* N *находит M-граф $M_N \in \mathcal{M}(V)$ такой, что*

$$\rho(G, M_N) \leqslant (3n - 6)\rho(G, M^*),$$

где M^* — оптимально аппроксимирующий M-граф для графа G.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Ильев В. П., Кононов А. В., Талевнин А. С.** Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 3–15.
2. **Вейнер Г. А.** Об аппроксимации симметричного рефлексивного бинарного отношения отношением эквивалентности // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. Сер. А. — 1971. — № 313. — С. 45–49.
3. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1975. — Вып. 31. — С. 35–42.
4. **Ильев В. П., Ильева С. Д.** Приближённые алгоритмы аппроксимации графами с ограниченным числом компонент // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2010. — Т. 18, № 1. — С. 47–52.
5. **Ильев В. П., Фридман Г. Ш.** К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 264, № 3. — С. 533–538.
6. **Ляпунов А. А.** О строении и эволюции управляющих систем в связи с теорией классификации // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1973. — Вып. 27. — С. 7–18.
7. **Талевнин А. С.** О сложности задачи аппроксимации графов // Вестн. Омск. ун-та. — 2004. — № 4. — С. 22–24.

8. **Фридман Г. Ш.** Одна задача аппроксимации графов // Управляемые системы. — 1971. — Вып. 8. — С. 73–75.
9. **Фридман Г. Ш.** О некоторых результатах в задаче аппроксимации графов // Проблемы анализа дискретной информации. Ч. I. — Новосибирск: ИЭиООП СО АН СССР, 1975. — С. 125–152.
10. **Фридман Г. Ш.** Исследование одной задачи классификации на графах // Методы моделирования и обработки информации. — Новосибирск: Наука, 1976. — С. 147–177.
11. **Tomescu I.** La reduction minimale d'un graphe à une reunion des cliques // Discrete Math. — 1974. — V. 10, N 1–2. — P. 173–179.
12. **Zahn C.** Approximating symmetric relations by equivalence relations // J. SIAM. — 1964. — V. 12, N 4. — P. 840–847.

Ильев Виктор Петрович,
e-mail: iljev@mail.ru
Ильева Светлана Диадоровна,
e-mail: iljeva@mail.ru
Навроцкая Анна Александровна,
e-mail: nawrocki@yandex.ru

Статья поступила
20 июля 2010 г.

Переработанный вариант —
29 ноября 2010 г.