

УДК 519.178

МИНИМАЛЬНЫЕ СЛОЖНЫЕ КЛАССЫ ГРАФОВ
ДЛЯ ЗАДАЧИ О РЕБЕРНОМ СПИСКОВОМ
РАНЖИРОВАНИИ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Рассматривается понятие минимального сложного класса графов применительно к задаче о рёберном списковом ранжировании. Для этой задачи исследуется способ получения таких классов и на его основе выявляется новый класс. Показывается полнота некоторой совокупности классов графов как системы минимальных сложных классов, которые можно получить в рамках предлагаемого подхода.

Ключевые слова: вычислительная сложность, минимальный сложный класс, задача о рёберном списковом ранжировании.

Введение

Данная работа является продолжением цикла работ [1–3], в которых рассмотрены вопросы описания тупиковых наследственных классов графов по сложности решения задач о списковом ранжировании. *Наследственный* класс графов — это множество графов, замкнутое относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс графов \mathcal{X} определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов \mathcal{S} , что записывается так: $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{S})$. Минимальное по включению множество запрещённых порождённых подграфов для \mathcal{X} единственно и обозначается через $\text{Forb}(\mathcal{X})$.

Пусть Π — какая-нибудь NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется Π -*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима, и Π -*сложным* в противном случае. На протяжении настоящей статьи предполагается, что $P \neq NP$, и это условие не

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00357), лаборатории «ТАПРАДЕСС» (номер проекта 61.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (номер ГК 16.740.11.0310).

включается явно в формулировки теорем и других утверждений. Например, такого: если задача Π остаётся NP-полной для графов из наследственного класса \mathcal{X} , то \mathcal{X} является Π -сложным.

Естественный способ описания границы между Π -простыми и Π -сложными классами состоит в поиске максимальных (по включению) Π -простых и минимальных Π -сложных классов. Известно, что максимальных Π -простых классов не существует ни для одной задачи Π . С другой стороны, в [2] показано, что при любом $k > 2$ для задачи о k -раскраске нет минимальных сложных классов, а для задачи о вершинном списковом ранжировании были указаны такие классы. Исследования по выявлению минимальных сложных классов были продолжены в [1, 3]. Так, в [3] доказано, что класс полных графов является минимальным для задачи о рёберном списковом ранжировании. Из результатов [1] легко следует, что класс *Star*, описание которого дано в конце введения, также является минимальным сложным для этой же задачи. В настоящей работе продолжаются исследования по выявлению минимальных сложных классов для задачи о рёберном списковом ранжировании (задачи РСР).

Задача РСР заключается в следующем. Пусть заданы граф G с множеством рёбер E и множество $L = \{L(e) \mid e \in E\}$, где $L(e)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить ребро e). *L-ранжированием рёбер* графа G называется такая раскраска c его вершин, что

- (i) $c(e) \in L(e)$ для каждого ребра e ;
- (ii) если $c(e_1) = c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2 , содержит такое ребро e_3 , что $c(e_3) > c(e_1)$.

Задача РСР состоит в том, чтобы по данным G и L определить, существует ли L -ранжирование рёбер графа G . Под РСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача РСР решается для графов этого класса за полиномиальное время при любом множестве L .

Полезным инструментом поиска новых (минимальных) Π -сложных классов является преобразование уже известных классов с сохранением NP-полноты задачи Π . Вполне возможно, что полученный при такой операции класс будет либо минимальным Π -сложным, либо близким к минимальному. Эта идея используется в данной работе при доказательстве РСР-минимальности некоторого класса графов.

Введём понятие продолжения класса графов. Класс \mathcal{Y} называется *продолжением* класса \mathcal{X} , если выполняются следующие условия: (а) для любого графа $G \in \mathcal{X}$ существует такой граф $H \in \mathcal{Y}$, что G являет-

ся остовным подграфом графа H ; (b) в любом графе из \mathcal{U} существует остовный подграф, принадлежащий классу \mathcal{X} .

Данная работа содержит результаты двойного рода. В первой части доказывается замкнутость классов графов с NP-полной задачей РСР относительно перехода к продолжению и на основании этого свойства устанавливается РСР-минимальность класса *Camomile*. Во второй части полностью описана совокупность минимальных РСР-сложных классов графов, которые можно получить продолжениями класса *Star*.

В статье приняты следующие обозначения: $K_4 - e$ — граф, получаемый из графа K_4 удалением ребра, S_i — граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$ (его вершину степени i будем называть *центральной*), *Clique* — класс полных графов, *CBipartite* — множество полных двудольных графов, *Star* — совокупность графов, являющихся порождёнными подграфами для графов из $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{S_i\}$, *Camomile* — класс графов, являющихся порождёнными подграфами для графов из $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{(K_1 \circ iK_2)\}$ (через $G_1 \circ G_2$ обозначается граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством рёбер $E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$).

1. О минимальности класса *Camomile* для задачи о рёберном списковом ранжировании

Лемма 1. Пусть \mathcal{U} — произвольный класс графов, являющийся продолжением класса \mathcal{X} с NP-полной задачей РСР. Тогда задача РСР NP-полна в классе \mathcal{U} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что задача РСР в классе графов \mathcal{X} полиномиально сводима к той же задаче в классе \mathcal{U} . Отсюда будет следовать утверждение леммы.

Пусть G — произвольный граф класса \mathcal{X} , являющийся остовным подграфом графа $H \in \mathcal{U}$. Рассмотрим L — назначение допустимых цветов рёбер графа G . Пусть k — наибольший цвет в L . Рассмотрим следующее множество допустимых цветов L' для рёбер графа H . Рёбра из $E(G)$ имеют то же множество допустимых цветов, что и в G , а для каждого добавленного ребра эта совокупность совпадает с $\{k + 1, k + 2, \dots, k + |E(H)| - |E(G)|\}$. Очевидно, что L -ранжирование рёбер графа G существует тогда и только тогда, когда существует L' -ранжирование рёбер графа H . Поэтому имеет место указанное в первом абзаце сведение. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Класс *Camomile* является минимальным РСР-сложным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку класс *Star* является РСР-сложным, из леммы 1 следует, что класс *Camomile* также является РСР-сложным. Докажем теперь его минимальность. Для этого покажем, что для любого фиксированного $G \in \text{Camomile}$ класс $\text{Camomile} \cap \text{Free}(\{G\})$ является РСР-простым. Ранжирование рёбер несвязного графа есть объединение ранжирований рёбер его компонент связности. Поэтому при доказательстве минимальности можно ограничиться рассмотрением связных графов класса $\text{Camomile} \cap \text{Free}(\{G\})$. Легко проверить, что любой связный граф из этого класса содержит не более чем $|V(G)|$ нелистовых вершин. В [5] показано, что для любого фиксированного k задача РСР полиномиально разрешима в классе графов, у которых количество нелистовых вершин не превосходит k . Отсюда следует, что класс *Camomile* является минимальным РСР-сложным. Теорема 1 доказана.

Докажем следующую характеристику класса *Camomile* в терминах запрещённых порождённых подграфов.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\text{Forb}(\text{Camomile}) = \{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ни один из графов $C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4$ не принадлежит классу *Camomile* и любой порождённый подграф каждого из указанных графов принадлежит этому классу, справедливо включение

$$\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\} \subseteq \text{Forb}(\text{Camomile}).$$

Таким образом, $\text{Camomile} \subseteq \text{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\})$. Докажем обратное включение.

Пусть G — произвольный граф класса $\text{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\})$. Можно считать, что при любых p и q граф G отличен от графа $pK_2 \oplus qK_1$, поскольку все такие графы принадлежат классу *Camomile*. Отсюда следует, что граф G является связным (так как $G \in \text{Free}(\{P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1\})$). Если G не содержит вершин степени 3 и более, то $G = P_3$ (ввиду того, что $G \in \text{Free}(\{C_4, P_4\})$). Граф P_3 принадлежит классу *Camomile*. Теперь будем предполагать, что граф G содержит вершину x , смежную с вершинами y_1, y_2, y_3 .

Покажем, что в графе G нет вершины, находящейся от x на расстоянии 2. Предположим противное, тогда существует путь P длины 2, одним из концов которого является вершина x . Легко проверить, что среди вершин y_1, y_2, y_3 существует вершина y , не смежная ни с одной

вершиной пути $P \setminus \{x\}$ (в противном случае порождается один из графов $C_4, K_4, K_4 - e$). Но тогда вершина y и вершины пути P порождают подграф P_4 . Получаем противоречие, т.е. все вершины из $V(G) \setminus \{x\}$ смежны с x . Поскольку $G \in \text{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_4\})$, в графе G окрестность вершины x порождает подграф вида $pK_2 \oplus qK_1$. Таким образом, $G \in \text{Camomile}$, поэтому

$$\text{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}) \subseteq \text{Camomile}.$$

Итак, из обоих доказанных включений заключаем, что

$$\text{Camomile} = \text{Free}(\{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}).$$

Отсюда и из рассуждений первого абзаца следует, что

$$\text{Forb}(\text{Camomile}) = \{C_4, K_4, K_4 - e, P_3 \oplus P_1, C_3 \oplus P_1, P_4\}.$$

Лемма 2 доказана.

2. О полноте множества минимальных РСР-сложных классов, полученных в рамках рассматриваемого подхода

Идея замкнутости множества классов графов с NP-полной задачей РСР использована в [3] при доказательстве минимальности класса *Clique* для задачи РСР и при установлении РСР-сложности класса *BComplete* и показано, что существует единственный минимальный РСР-сложный подкласс класса *BComplete*. Обозначим этот подкласс через *BC*. В данном разделе доказывается непополняемость относительно рассматриваемого преобразования множества $\{Star, Camomile, Clique, BC\}$. Иными словами, будет показано, что добавление рёбер к графам класса *Star* порождает только минимальные РСР-сложные классы *Star*, *Camomile*, *Clique* и *BC*.

Напомним, что *наследственным замыканием* некоторой совокупности графов называется множество всех их порождённых подграфов. Наследственное замыкание класса \mathcal{X} будем обозначать через $[\mathcal{X}]$.

Теорема 2. Пусть \mathcal{X} — продолжение класса *Star*. Тогда либо $[\mathcal{X}] \supseteq Star$, либо $[\mathcal{X}] \supseteq Camomile$, либо $[\mathcal{X}] \supseteq Clique$, либо $[\mathcal{X}] \supseteq BC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда $[\mathcal{X}] \not\supseteq Star$, $[\mathcal{X}] \not\supseteq Camomile$, $[\mathcal{X}] \not\supseteq Clique$, $[\mathcal{X}] \not\supseteq BC$. Поскольку $[\mathcal{X}] \not\supseteq Clique$, для некоторого s справедливо включение $[\mathcal{X}] \subseteq \text{Free}(\{K_s\})$. Пусть k — произвольное

натуральное число. Рассмотрим произвольный граф $G \in [\mathcal{X}]$, для которого относительно рассматриваемого преобразования S_i является остовным графом с центральной вершиной x . Пусть i достаточно большое. Поскольку G не содержит клики размера s , по теореме Рамсея в подграфе, порождённом окрестностью x , содержится достаточно большое независимое множество V_1 . Рассмотрим в G вершины (кроме x), смежные хотя бы с одной вершиной из V_1 . Ясно, что порождённый данными вершинами граф содержит достаточно большое независимое множество V_2 . Поскольку i достаточно большое, граф G содержит такой порождённый подграф H , что $V(H) \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \{x\}$ и S_k является остовным графом в H (S_k назовём носителем графа H). Таким образом, при любом k класс $[\mathcal{X}]$ содержит граф, получаемый из S_k добавлением рёбер, инцидентных вершинам, находящимся на разных расстояниях от центральной вершины. Обозначим через \mathcal{Y} всю совокупность графов такого типа по всем значениям k . Поскольку $[\mathcal{X}] \not\subseteq \text{Catomile}$, то и $\mathcal{Y} \not\subseteq \text{Catomile}$. Отсюда следует, что \mathcal{Y} содержит бесконечное множество графов, не содержащих треугольников. Данное множество (т.е. графы из \mathcal{Y} без треугольников) обозначим через \mathcal{Z} . Через \mathcal{Z}' обозначим совокупность графов, получаемых из графов класса \mathcal{Z} удалением центральных вершин их носителей. Очевидно, что все графы из \mathcal{Z} и \mathcal{Z}' двудольны. Поскольку $[\mathcal{X}] \not\subseteq \text{BC}$, при некотором t справедливо включение $\mathcal{Z}' \subseteq \text{Free}(\{K_{t,t}\})$.

Известно [4], что количество рёбер в сбалансированном двудольном графе с n вершинами, не содержащем подграфа $K_{t,t}$, не превосходит $(t-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{t-1}{2} n$. Очевидно, что при любом n класс \mathcal{Z}' содержит двудольный граф G с 2^n вершинами в каждой из долей. Пусть n достаточно большое. Рассмотрим в графе G произвольное паросочетание M с 2^n рёбрами. Покажем, что M содержит паросочетание M' из $n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}] + 2)$ рёбер, каждое из которых смежно не более чем с $[2^{n(1-\frac{1}{2t})}]$ рёбрами графа G . Предположив противное, заключаем, что в множестве $M \setminus M'$ не менее чем $2^n - n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}] + 2)$ рёбер, каждое из которых смежно с не менее чем $[2^{n(1-\frac{1}{2t})}]$ рёбрами графа G . Таким образом, граф G содержит не менее чем $\frac{(2^n - n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}] + 2))([2^{n(1-\frac{1}{2t})}])}{2}$ рёбер. Легко проверить выполнение неравенства

$$\frac{(2^n - n([2^{n(1-\frac{1}{2t})}] + 2))([2^{n(1-\frac{1}{2t})}])}{2} > (t-1)^{\frac{1}{2t}} 2^{n(2-\frac{1}{t})} + \frac{t-1}{2} 2^n,$$

что противоречит оценке из [4]. Тем самым сделанное предположение неверно, т.е. существует множество M' с указанными свойствами. Из

принципа Дирихле следует, что M' содержит n рёбер, порождающих в G паросочетание.

Итак, рассуждения привели к тому, что для любого k граф S_k принадлежит классу \mathcal{Z} , а значит, и классу $[\mathcal{X}]$. Отсюда следует, что $[\mathcal{X}] \supseteq \textit{Star}$, поэтому изначальное предположение неверно. Таким образом, выполняется хотя бы одно из включений формулировки теоремы. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев Д. С. О минимальных сложных элементах решётки наследственных классов графов // Материалы VII молодёж. науч. шк. по дискрет. математике и её прил. (Москва, 18–23 мая 2009 г.), часть II. — М.: ИПМ РАН, 2009. — С. 12–17.
2. Малышев Д. С. О минимальных сложных классах графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 43–51.
3. Малышев Д. С. Последовательные минимумы решетки наследственных классов графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Вестн. Нижегородск. ун-та. — 2010. — №5. — С. 125–130.
4. Bollobas B. Extremal graph theory. — London: Academic Press, 1978. — 488 p.
5. Dereniowski D. The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. — 2008. — Vol. 86. — P. 97–114.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
18 июня 2010 г.