ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 77–84

УДК 519.87

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ *)

Э. А. Монахова

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Для графов наилучшего известного экстремального семейства циркулянтных сетей улучшена оценка диаметра, что вместе с результатами, полученными ранее для мультипликативных циркулянтных сетей, позволило улучшить нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей всех размерностей $k \geqslant 4$.

Ключевые слова: циркулянтная сеть, диаметр, максимальный порядок графа.

Введение

В статье продолжается исследование задачи оптимизации циркулянтных сетей, состоящей в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа, начатое в работах [2, 3], для размерностей $k \geqslant 4$.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k, n$ — такие целые числа, что $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n/2$. Неориентированный граф C с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и множеством рёбер $E = \{(i,j) \mid |i-j| \equiv s_l \bmod n, l = \overline{1,k}\}$ называется *циркулянтным* [1, 4, 6, 12], числа $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — *образующими*, k — *размерностью* графа C.

Диаметром графа G называется число $d(G) = \max\limits_{i,j \in V} d(i,j)$, где $d(i,j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G. Пусть $M(d,k)$ [5] — такое максимально возможное (достижимое) натуральное число n, что существует множество образующих $S = (1, s_2, \ldots, s_k)$, при котором $d(C(n;S)) \leqslant d$, для любых натуральных d и k.

Обзоры результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка циркулянтных сетей размерностей $k \geqslant 2$, а также построению их семейств можно найти в [1, 3, 4].

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00857).

Семейство циркулянтных сетей, полученное в [5], в течение длительного времени было наилучшим известным семейством по соотношению n/d для всех размерностей $k \geqslant 3$. В [5] доказана

Теорема 1. *Пусть d и k — натуральные числа, $d \geqslant k \geqslant 3$, и пусть $p = \lfloor (d-k+3)/k \rfloor$. Тогда*

$$M(d,k) \geqslant N = 2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{k}\Big)^k d^k + O(d^{k-1}). \tag{1}$$

Отметим, что в (1) на самом деле имеет место строгое неравенство, так как в [9] доказано, что значения $M(d,k)$ — нечётные числа при всех d и k.

Экстремальное семейство из [5] относится к мультипликативным циркулянтным сетям [3, 10, 11] с образующими в виде степеней чётного числа, кратного чётырем. Данное семейство также исследовалось методом эволюционного синтеза [7], для него получены аналитическое описание семейства и значения диаметров графов семейства для $k = 4$ и $p = \overline{1,5}$.

Поскольку для размерности $k = 3$ в [8] найдено точное значение экстремальной функции $M(d,k)$ для любого d и построены бесконечные семейства трёхмерных циркулянтов с порядком, равным $M(d,3)$, интерес представляет исследование значений функции $M(d,k)$ для $k \geqslant 4$.

В нашей статье улучшена оценка диаметра графов семейства из [5], а также найден их точный диаметр для ряда размерностей, в том числе для $k = 4$, теоретически обоснованы и обобщены результаты, найденные методом эволюционного синтеза. Вместе с результатами, полученными ранее для мультипликативных циркулянтных сетей, это позволило улучшить нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей для всех размерностей $k \geqslant 4$.

1. Получение оценок диаметра циркулянтных сетей

Рассмотрим семейство циркулянтных сетей, введённое в [5]. При доказательстве теоремы 1 показано, что при $d \geqslant k \geqslant 3$, $p = \lfloor (d-k+3)/k \rfloor$,

$$N = 2p\sum_{i=0}^{k-1}(4p)^i, \quad S = (1, 4p, \dots, (4p)^{k-1}) \tag{2}$$

диаметр графа $C(N;S)$ семейства (2) не превосходит d. Из определения p следует, что (1) выполняется при всех $k(p+1)-3 \leqslant d < k(p+2)-3$. Таким образом, в [5] найдена верхняя оценка диаметра графов семейства (2), равная $k(p+1)-3$. Улучшим её, для чего докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $k \geqslant 4$ *и* $d \geqslant 2k-3$ *— целые числа,* $p = \lfloor (d-k+3)/k \rfloor$. *При условии* (2)

$$d(N;S) \leqslant kp + \lfloor k/4 \rfloor. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф из семейства (2). Положим $s = 4p$. Тогда $N = s/2 \sum\limits_{i=0}^{k-1} s^i$ и $S = (1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$. Через $D(x)$, $0 \leqslant x < N$, обозначим длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x.

Для любой вершины $0 \leqslant x < N$ существует каноническое [5] разложение x по степеням s

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} c_i s^i,$$

где $-s/2 < c_i \leqslant s/2$, $i = \overline{0, k-2}$, и $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant s/2$. Коэффициенты c_i получаются следующим образом. Выбираем $c_0 \equiv x \bmod s$ такое, что $-s/2 < c_0 \leqslant s/2$. В качестве c_i, $i = \overline{1, k-1}$, выбираем целые

$$c_i \equiv \frac{1}{s^i}\left(x - \sum_{j=0}^{i-1} c_j s^j\right) \bmod s$$

такие, что $-s/2 < c_i \leqslant s/2$.

Коэффициенты c_i, $i = \overline{0, k-1}$, являются координатами пути из 0 в x прямого направления, в который максимальная образующая входит со знаком $-$. Длина этого пути равна $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i|$. Имеем $x - N = \sum\limits_{i=0}^{k-1} c'_i s^i$, где $c'_i = c_i - s/2$, $i = \overline{0, k-1}$.

Для $i = \overline{0, k-2}$ преобразуем коэффициенты c'_i в c''_i таким образом, чтобы выполнялось условие $-s/2 \leqslant c''_i \leqslant s/2$.

Преобразование коэффициентов c'_i в c''_i выполняется последовательно для $i = 0, 1, \ldots, k-1$ согласно следующим шагам 1–4.

Шаг 1. Если $i \in \overline{0, k-2}$ и $c_i < 0$, то заменяем c'_i на $c''_i = c'_i + s$ и соответственно c'_{i+1} на $c''_{i+1} = c'_{i+1} - 1$. Очевидно, при такой замене сумма $|c''_i| + |c''_{i+1}|$ не увеличивается по сравнению с суммой $|c'_i| + |c'_{i+1}|$. При этом $0 < c''_i < s/2$ и $|c_i| + |c''_i| = s/2$.

Шаг 2. Если $i = k-2$ или $c_{i+1} > 0$, то перейти на шаг 3, иначе процесс замены коэффициентов продолжаем: полагаем $c''_{i+1} := c'_{i+1} + s$ и $c''_{i+2} := c'_{i+2} - 1$. При этом $0 \leqslant c''_{i+1} < s/2$ и $|c_{i+1}| + |c''_{i+1}| = s/2 - 1$.

Увеличить i на 1, перейти на шаг 2.

Шаг 3. Имеем $|c_{i+1}| + |c''_{i+1}| = s/2 + 1$. При $i = k-2$ завершить преобразование коэффициентов, иначе увеличить i на 1 и перейти на шаг 1.

Шаг 4. Если $i \in \overline{0, k-2}$ и $c_i \geqslant 0$ или $i = k-1$ и c'_{k-1} не изменялся при выполнении шага 1, то $c''_i = c'_i$ и $|c_i| + |c''_i| = s/2$.

Коэффициенты c''_i, $i = \overline{0, k-1}$, являются координатами пути из 0 в $x - N$ обратного направления — пути, в который максимальная образующая входит со знаком $-$. Длина этого пути равна $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c''_i|$. Для любой вершины $0 \leqslant x < N$ длина кратчайшего пути удовлетворяет неравенству

$$D(x) \leqslant \min \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|,\ \sum_{i=0}^{k-1} |c''_i| \right\}.$$

Анализ результатов выполнения шагов 1–4 показывает, что величина $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i| + \sum\limits_{i=0}^{k-1} |c''_i|$ достигает максимума, когда максимально возможным является число однократных замен коэффициентов c'_i и c''_i (т. е. последовательное выполнение шагов 1 и 3). Учитывая это и суммируя результаты выполнения шагов 1–4, получаем для любой вершины $0 \leqslant x < N$

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| + \sum_{i=0}^{k-1} |c''_i| \leqslant ks/2 + \lfloor k/2 \rfloor.$$

Следовательно, либо $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i| \leqslant ks/4 + \lfloor k/4 \rfloor = kp + \lfloor k/4 \rfloor$, либо $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c''_i| \leqslant kp + \lfloor k/4 \rfloor$. Теорема 2 доказана.

Получим точное значение диаметра графов семейства (2) для ряда размерностей.

Теорема 3. *Пусть* $4 \leqslant k \leqslant 7$, $d \geqslant 2k - 3$ *и* $p = \lfloor (d - k + 3)/k \rfloor$. *Если* $k \geqslant 5$ *или* $k = 4$ *и* $p \neq 1$, *то при условии* (2)

$$d(N; S) = kp + 1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $4 \leqslant k \leqslant 7$. Имеем $d(N; S) \leqslant kp + 1 = ks/4 + 1$ согласно (3). Покажем, что в данных графах существует хотя бы одна такая вершина x_0, что $D(x_0) = ks/4 + 1$.

Возьмём в качестве искомой вершины

$$x_0 = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor-1} \bigl(-\frac{s}{4}s^{2i}+\frac{s}{4}s^{2i+1}\bigr)+s^{k-1} & \text{при чётном } k, \\ \sum\limits_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor-1} \bigl(\frac{s}{4}s^{2i}-\frac{s}{4}s^{2i+1}\bigr)+\bigl(\frac{s}{4}+1\bigr)s^{k-1} & \text{при нечётном } k. \end{cases}$$

Данное представление является каноническим разложением x_0 по степеням s и соответствует пути из 0 в x_0 прямого направления.

1. Пусть $k = 4$ и $s \neq 4$ (при $k = 4$ и $s = 4$ диаметр соответствующего графа равен 4). Получим каноническое разложение $x_0 - N$ по степеням s:

$$x_0 - N = s/4 - (s/4+1)s + (s/4)s^2 - (s/4)s^3.$$

Данное представление соответствует пути из 0 в $x_0 - N$ обратного направления. Таким образом, для канонических разложений x_0 и $x_0 - N$ по степеням s имеем

$$\sum_{i=0}^{3} |c_i| = \sum_{i=0}^{3} |c_i''| = s+1 = d(N;S).$$

Рассмотрение длин альтернативных путей из 0 в x_0 (в том числе длины пути из 0 в x_0+N, равной $3s/2+2$) показывает, что они больше $d(N;S)$. Следовательно, $D(x_0) = d(N;S)$.

2. Пусть $k = 5$. Получим каноническое разложение $x_0 - N$ по степеням s:

$$x_0 - N = -\frac{s}{4} + \frac{s}{4}s - \Bigl(\frac{s}{4}+1\Bigr)s^2 + \frac{s}{4}s^3 - \frac{s}{4}s^4.$$

Для канонических разложений x_0 и $x_0 - N$ имеем

$$\sum_{i=0}^{4} |c_i| = \sum_{i=0}^{4} |c_i''| = 5s/4+1 = d(N;S).$$

Рассмотрение длин альтернативных путей из 0 в x_0 (в том числе длины пути из 0 в x_0+N, равной $7s/4+3$) показывает, что они больше $d(N;S)$. Следовательно, $D(x_0) = d(N;S)$.

3. Пусть $k = 6$. Получим каноническое разложение $x_0 - N$ по степеням s:

$$x_0 - N = \frac{s}{4} - \Bigl(\frac{s}{4}+1\Bigr)s + \frac{s}{4}s^2 - \Bigl(\frac{s}{4}+1\Bigr)s^3 + \frac{s}{4}s^4 - \frac{s}{4}s^5.$$

Для канонических разложений x_0 и $x_0 - N$ имеем

$$\sum_{i=0}^{5} |c_i| = 6s/4 + 1 = d(N;S), \quad \sum_{i=0}^{5} |c_i''| = 6s/4 + 2 = d(N;S) + 1.$$

Рассмотрение длин альтернативных путей из 0 в x_0 показывает, что они больше $d(N;S)$. Следовательно, $D(x_0) = d(N;S)$.

4. Пусть $k = 7$. Получим каноническое разложение $x_0 - N$ по степеням s:

$$x_0 - N = -\frac{s}{4} + \frac{s}{4}s - \left(\frac{s}{4} + 1\right)s^2 + \frac{s}{4}s^3 - \left(\frac{s}{4} + 1\right)s^4 + \frac{s}{4}s^5 - \frac{s}{4}s^6.$$

Для канонических разложений x_0 и $x_0 - N$ имеем

$$\sum_{i=0}^{6} |c_i| = 7s/4 + 1 = d(N;S), \quad \sum_{i=0}^{6} |c_i''| = 7s/4 + 2 = d(N;S) + 1.$$

Рассмотрение длин альтернативных путей из 0 в x_0 показывает, что они больше $d(N;S)$. Следовательно, $D(x_0) = d(N;S)$. Теорема 3 доказана.

2. Нижние оценки функции $M(d,k)$

Теорема 2 позволяет улучшить нижние оценки функции $M(d,k)$ для всех размерностей $k \geqslant 4$. Приведём скорректированную по сравнению с [5] оценку $M(d,k)$, учитывающую оценку диаметра графов семейства (2).

Теорема 4. *Пусть $p = \left\lfloor \frac{d - \lfloor k/4 \rfloor}{k} \right\rfloor$, где d и $k > 4$ — натуральные числа и $d \geqslant k + \lfloor k/4 \rfloor$. Тогда*

$$M(d,k) \geqslant n = 2p \sum_{i=0}^{k-1} (4p)^i. \tag{5}$$

Доказательство. Для размерностей $k = 3$ и $k = 4$ новая оценка функции $M(d,k)$ совпадает с (1). Поэтому будем рассматривать $k > 4$. Сравнивая (1) и (5), видим, что значения n в (5) имеют место для меньших диаметров. Теорема 4 доказана.

Таким образом, на основе исследования диаметров графов рассматриваемого семейства найдены улучшенные оценки функции $M(d,k)$ при $k > 4$.

Для дальнейшего улучшения оценок экстремальной функции $M(d,k)$ нам понадобится результат, полученный ранее для мультипликативных циркулянтных сетей, а именно следующее утверждение из теоремы 1 [3].

Пусть $k \geqslant 3$, $s \geqslant 3$ — нечётное число, $S = (1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$. Тогда если

$$n = \lceil s/2 \rceil \sum_{i=0}^{k-1} s^i, \tag{6}$$

то

$$d(n; S) = \Big\lfloor \frac{k}{2} \lceil s/2 \rceil \Big\rfloor. \tag{7}$$

Зададим $s = 4p + 1$, где p — натуральное число. Согласно (6) и (7) получим $d(n; S) = kp + \lfloor k/2 \rfloor$ при $n = (2p+1) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p+1)^i$. Аналогично, задав $s = 4p + 3$, получим $d(n; S) = kp + k$ при $n = (2p+2) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p+3)^i$.

Объединение этого результата и теоремы 4 даёт новые оценки экстремальной функции $M(d, k)$ при $k > 4$.

Теорема 5. *Пусть $p = \lfloor \frac{d - \lfloor k/4 \rfloor}{k} \rfloor$, где d и $k > 4$ — натуральные числа и $d \geqslant k + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor$. Тогда*

$$M(d,k) \geqslant n = \begin{cases} 2p \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p)^i & \text{при } kp + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor \leqslant d < kp + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \\ (2p+1) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p+1)^i & \text{при } kp + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leqslant d < k(p+1), \\ (2p+2) \sum\limits_{i=0}^{k-1} (4p+3)^i & \text{при } k(p+1) \leqslant d < k(p+1) + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor. \end{cases}$$

Пример. Пусть $k = 7$. Тогда согласно (1)

$$M(d, 7) \geqslant 10922 \text{ при } 11 \leqslant d \leqslant 17.$$

Теорема 5 даёт следующие оценки:

$$M(d,7) \geqslant n = \begin{cases} 58593 & \text{при } 10 \leqslant d \leqslant 13, \\ 549028 & \text{при } d = 14, \\ 1198372 & \text{при } 15 \leqslant d \leqslant 16, \\ 2989355 & \text{при } d = 17. \end{cases}$$

Значения параметра s для образующих вида $S = (1, s, s^2, s^3, s^4, s^5, s^6)$, при которых достигаются вышеуказанные значения порядков n и нижние границы диаметров d циркулянтных графов, равны соответственно $5, 7, 8, 9$.

Для $k = 4$ остаётся лучшей на сегодняшний день оценка функции $M(d, 4)$, данная в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монахов О. Г., Монахова Э. А.** Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. — 242 с.
2. **Монахова Э. А.** Оптимизация циркулянтных сетей связи размерности четыре // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 58–64.
3. **Монахова Э. А.** Мультипликативные циркулянтные сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. —Т. 17, № 5. — С. 56–66.
4. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. — 1995. — Vol. 24. — P. 2–10.
5. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. — 1993. — Vol. 23. — P. 257–260.
6. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theoret. Comput. Sci. — 2003.– Vol. 299. — P. 107–121.
7. **Monakhov O. G., Monakhova E. A.** Computer discovery of analytical descriptions of families of circulant networks // Proc. 6th Intern. Conf. Soft Computing and Measurements SCM'2003 (St.-Petersburg, Russia, 2003). Vol. 1. — St. Petersburg: LETI, 2003. — P. 345–348.
8. **Monakhova E.** Optimal triple loop networks with given transmission delay: topological design and routing // Proc. Intern. Network Optimization Conf. (INOC'2003) (Evry/Paris, France, 2003). — Paris: INT, 2003. — P. 410–415.
9. **Muga F. P.** Undirected circulant graphs // Proc. Intern. Symp. Parallel Architectures, Algorithms, and Networks. — Los Alamitos: IEEE Press, 1994. — P. 113–118.
10. **Parhami B.** A class of odd-radix chordal ring networks // The CS'J J. Comput. Sci. Engineering. — 2006. — Vol. 4, N 2–4. — P. 1–9.
11. **Stojmenovic I.** Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discrete Appl. Math. — 1997. — Vol. 77. — P. 281–305.
12. **Wong C. K., Don Coppersmith.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — Vol. 21. — P. 392–402.

Монахова Эмилия Анатольевна,
e-mail: emilia@rav.sscc.ru

Статья поступила
29 июля 2010 г.

Переработанный вариант —
11 ноября 2010 г.