ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2011. Том 18, № 1. С. 85–97

УДК 119.1

МНОГОГРАННИК РАСПИСАНИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ ИДЕНТИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ

Р. Ю. Симанчёв, И. В. Уразова

Аннотация. В статье изучается многогранник расписаний обслуживания частично упорядоченного множества требований, имеющих одинаковые длительности обслуживания, параллельными идентичными приборами. Построена полиэдральная релаксация этого многогранника, описан класс правильных неравенств. Показано, что полученные неравенства могут служить отсечениями в соответствующих алгоритмах. Обсуждается задача идентификации этих неравенств для данной нецелочисленной точки.

Ключевые слова: расписание, ациклический орграф, ЦЛП, многогранник, опорное неравенство.

Введение

В статье рассматриваются расписания обслуживания идентичных требований параллельными приборами, которые описываются следующими условиями. Требования множества V, $|V| = n$, обслуживаются m параллельными идентичными приборами. Все требования поступают в очередь на обслуживание одновременно (в момент времени $k = 0$) и имеют одинаковые (равные 1) длительности обслуживания. Запрещены прерывания в обслуживании требований. На множестве V задано отношение частичного порядка $\lhd$, определяющее условия предшествования в обслуживании требований. Всякий порядок обслуживания требований на множестве V, допустимый относительно частичного порядка $\lhd$, называется *допустимым расписанием*, или просто *расписанием* (см., например, [1, 3]). Мы рассматриваем расписания, в которых все работы завершаются к моменту времени d. При этом очевидно, что если d слишком мало, то множество определённых выше расписаний может оказаться пустым.

Это множество расписаний допускает следующую формализацию [1]. *Расписанием* называется функция $\sigma : V \to D = \{1, 2, \dots, d\}$ такая, что

(i) соотношение $i \lhd j$ влечёт неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$;

(ii) для любого $k \in D$ имеется не более m требований $i \in V$ таких, что $\sigma(i) = k$.

Множество расписаний, определённых условиями (i)–(ii), обозначим через $\mathcal{S}_d$. Заметим, что если $d < d'$, то $\mathcal{S}_d \subset \mathcal{S}_{d'}$ (при этом полагаем, что пустое множество является подмножеством любого множества).

Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть описан с помощью ориентированного ациклического графа. Ациклический орграф, задающий частичный порядок на множестве требований V, будем обозначать буквой G. При этом V — множество его вершин, а множество дуг орграфа G обозначим через E. Вершины орграфа G будем обозначать буквами i или j, индексируя их при необходимости. Дугу с началом в i и концом в j будем обозначать через (i, j). Дуга (i, j) называется *транзитивной*, если в орграфе G существует путь из i в j, отличный от дуги (i, j). Исходя из определения расписания, будем далее полагать, что орграф G не содержит транзитивных дуг. Для любого орграфа H, отличного от G, через $V(H)$ и $E(H)$ будем обозначать множество его вершин и дуг соответственно. *Вершинной базой* (*антибазой*) всякого ациклического орграфа называется подмножество его вершин такое, что полустепень исхода (полустепень захода) каждой из них равна нулю. Всякий ациклический орграф имеет вершинные базу и антибазу [2]. Если $W \subset V(H)$ — подмножество вершин орграфа H, то под орграфом $H - W$ будем понимать орграф, полученный из H удалением вершин множества W вместе с инцидентными дугами. Ясно, что если H — ациклический орграф, то эта операция вновь даёт ациклический орграф. *Длиной пути P в орграфе* будем называть число $|P|$ содержащихся в нём дуг.

Многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек в конечномерном пространстве, *полиэдром* — множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств, если оно ограничено. Полиэдр, содержащий данный многогранник, будем называть *полиэдральной релаксацией многогранника.*

Пусть M — подмножество t-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^t$, $a \in \mathbb{R}^t$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Линейное неравенство $ax \leqslant a_0$ называется *правильным относительно* M, если любая точка $x \in M$ ему удовлетворяет. Правильное неравенство называется *опорным к* M, если существует точка $\overline{x} \in M$ такая, что $a\overline{x} = a_0$.

Опорные неравенства имеют важное значение при построении выпуклых оболочек комбинаторных множеств. Как известно, любое правильное неравенство, не являющееся опорным к исследуемому многогранннку, является избыточным относительно многогранника.

В нашей статье рассматривается полиэдральная структура множества $\mathcal{S}_d$ безотносительно к целевым функциям. А именно, множеству $\mathcal{S}_d$ сопоставляется полиэдр, целочисленные вершины которого взаимно однозначно соответствуют расписаниям. Строится класс неравенств, правильных относительно выпуклой оболочки целочисленных точек (расписаний) этого полиэдра. Получены достаточные условия опорности построенных неравенств к многограннику. Приводятся примеры, показывающие, что при определённых условиях на d полученные неравенства обладают свойствами отсечений. Кроме этого, показана полиномиальная разрешимость задачи идентификации неравенств описанного класса.

1. Полиэдральная релаксация многогранника расписаний

Пусть $\sigma \in \mathcal{S}_d$ — расписание. Сопоставим ему $(0,1)$-вектор $x^\sigma = \big(x^\sigma_{ik},\ i \in V,\ k \in D\big) \in \mathbb{R}^{nd}$ по правилу:

$$x^\sigma_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(i) = k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Вектор x^σ будем называть *вектором инциденций расписания* σ. Под многогранником расписаний будем понимать множество

$$\mathcal{M}_{d,Z} = \operatorname{conv}\{x^\sigma \in \mathbb{R}^{nd} \mid \sigma \in \mathcal{S}_d\}.$$

Ясно, что в силу условий (i) и (ii) для каждой вершины $i \in V$ имеются такие $k \in D$, что для любого $\sigma \in \mathcal{S}_d$ компоненты x^σ_{ik} будут заведомо равны нулю. Формализуем это соображение следующим образом.

Дополним орграф G до орграфа $\widetilde{G}$ фиктивным источником u и фиктивным стоком υ, т. е.

$$V(\widetilde{G}) = V \cup \{u, \upsilon\}, \quad E(\widetilde{G}) = E \cup \{(u,i),\ i \in B\} \cup \{(j,\upsilon),\ j \in \overline{B}\},$$

где B и $\overline{B}$ — вершинные база и антибаза орграфа G соответственно. Для каждой $i \in V$ обозначим через P_i самый длинный путь из u в i, а через Q_i — самый длинный путь из i в υ. Если σ — расписание, то в силу условия (i) имеем

$$x^\sigma_{ik} = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, |P_i| - 1 \text{ и } k = d - |Q_i| + 2, d - |Q_i| + 3, \ldots, d. \tag{2}$$

Обозначим множество всех предков вершины $i \in V$ в орграфе G через $\mathcal{U}_i = \{j \in V \mid j \lhd i\}$, а множество всех потомков — через $\mathcal{W}_i = \{j \in V \mid$

$i \lhd j\}$. Для любого $\sigma \in \mathcal{S}_d$ в силу условия (ii) можем написать, что

$$x^{\sigma}_{ik} = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, \lceil |\mathcal{U}_i|/m\rceil \text{ и } \\ k = d - \lceil |\mathcal{W}_i|/m\rceil + 1, d - \lceil |\mathcal{W}_i|/m\rceil + 2, \ldots, d. \quad (3)$$

Объединяя (2) и (3), положим $p_i = \max\{|P_i|,\ \lceil |\mathcal{U}_i|/m\rceil + 1\}$ и $q_i = \max\{|Q_i| - 1,\ \lceil |\mathcal{W}_i|/m\rceil\}$. Теперь для каждой вершины $i \in V$ и каждого расписания $\sigma \in \mathcal{S}_d$ имеем

$$x_{ik} = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, p_i - 1,\ d - q_i + 1,\ d - q_i + 2\ ,\ldots,\ d. \quad (4)$$

Для упрощения дальнейших обозначений определим для каждой вершины $i \in V$ множество $D_i = \{p_i,\ p_i + 1,\ p_i + 2,\ \ldots,\ d - q_i\}$, а для каждого $k \in D$ — множество $V_k = \{i \in V \mid k \in D_i\}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений и неравенств в пространстве $\mathbb{R}^{nd}$:

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1, \quad i \in V, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in V_k} x_{ik} \leqslant m, \quad k \in D, \quad (6)$$

$$x_{ik} \leqslant \sum_{l \in D_j,\, l > k} x_{jl}, \quad (i, j) \in E,\ k \in D_i, \quad (7)$$

$$0 \leqslant x_{ik} \leqslant 1, \quad i \in V,\ k \in D_i, \quad (8)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V,\ k \in D \setminus D_i. \quad (9)$$

Полиэдр, определённый ограничениями (5)–(9), обозначим через $\mathcal{M}_d$. Целочисленные точки полиэдра $\mathcal{M}_d$ и только они являются расписаниями в смысле соотношения (1). Действительно, ограничения (5) означают, что каждое требование обслуживается ровно одним прибором. Ограничения (6) гарантируют, что одновременно могут обслуживаться не более m требований (условие (ii)). Выполнение условий предшествования (i) обеспечивается ограничениями (7). В самом деле, если $x_{ik} = 1$, то из (7) следует, что любое требование j, следующее за i, должно обслуживаться в более поздний момент, чем i. Ограничения (8) очевидны, а ограничения (9) исключают заведомо недопустимую область обслуживания требования i.

Теперь, обозначив через $\mathbf{Z}^{nd}$ точки целочисленной решётки в $\mathbb{R}^{nd}$, мы можем говорить, что

$$\mathcal{M}_{d,Z} = \mathrm{conv}(\mathcal{M}_d \cap \mathbf{Z}^{nd}).$$

При этом ясно, что $\mathcal{M}_d$ является полиэдральной релаксацией многогранника $\mathcal{M}_{d,Z}$. Важным свойством релаксации $\mathcal{M}_d$ является то, что она не содержит «лишних» целочисленных точек, не являющихся векторами инциденций расписаний, или, что то же самое, множество векторов инциденций расписаний является множеством целочисленных решений системы (5)–(9).

2. Класс правильных неравенств

В этом разделе описан класс неравенств, правильных относительно многогранника $\mathcal{M}_{d,Z}$. Неравенства этого класса, вообще говоря, усиливают ограничения полиэдра $\mathcal{M}_d$ в том смысле, что в $\mathcal{M}_d$ существуют точки, «отсекаемые» этими неравенствами.

Пусть $P \subset G$ — путь, $k \in D$. Так как вершины множества $V(P)$ линейно упорядочены, то $\sum\limits_{j \in V(P)} x^\sigma_{jk} \leqslant 1$ для любого расписания $\sigma \in \mathcal{S}_d$ в силу условия (i). Отсюда следует, что неравенство

$$\sum_{j \in V(P)} x_{jk} \leqslant 1 \tag{10}$$

является правильным относительно многогранника $\mathcal{M}_{d,Z}$.

Теорема 1. *Пусть $P \subset G$ — путь, $k \in D$, $k < d$, и пусть $i, z \in V(P)$ — первая и последняя вершины пути P. Тогда неравенство*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leqslant 1 \tag{11}$$

является правильным относительно многогранника $\mathcal{M}_{d,Z}$.

Доказательство. Если $\mathcal{M}_{d,Z} = \varnothing$, то утверждение теоремы выполняется автоматически.

Пусть $\mathcal{M}_{d,Z} \neq \varnothing$. Теорему достаточно доказать только для вершин многогранника $\mathcal{M}_{d,Z}$, т. е. для векторов инциденций расписаний. Для любого $\sigma \in \mathcal{S}_d$ будет выполнено неравенство $\sum\limits_{j \in V(P)} x^\sigma_{jk} \leqslant 1$, так как этот блок слагаемых в неравенстве (11) совпадает с левой частью неравенства (10).

Покажем вначале, что для любого $\sigma \in \mathcal{S}_d$ будет правильным неравенство

$$\sum_{j \in V(P)} x^\sigma_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x^\sigma_{il} \leqslant 1. \tag{12}$$

Предположим, что существует такое раписание $\sigma_* \in \mathcal{S}_d$, что

$$\sum_{j \in V(P)} x_{jk}^{\sigma_*} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} > 1.$$

Из ограничений (5) следует, что

$$\sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} \leqslant \sum_{l \in D_i} x_{il}^{\sigma_*} = 1.$$

Так как точка x^{σ_*} целочисленная, из предположения следует, что

$$\sum_{j \in V(P)} x_{jk}^{\sigma_*} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} = 1.$$

Тогда в силу целочисленности x^{σ_*} среди компонент $x_{jk}^{\sigma_*}$, $j \in V(P)$, ровно одна единица, остальные — нули. Среди компонент $x_{il}^{\sigma_*}$, $l = k+1, \ldots, d$, также ровно одна единица, остальные — нули.

Рассмотрим два случая.

(a) $x_{ik}^{\sigma_*} = 1$. Тогда

$$2 = \sum_{j \in V(P)} x_{jk}^{\sigma_*} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} = x_{ik}^{\sigma_*} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} \leqslant \sum_{l \in D_i} x_{il}^{\sigma_*},$$

что противоречит ограничениям (5).

(б) $x_{jk}^{\sigma_*} = 1$ для некоторой вершины $j \in V(P)$, отличной от i. Тогда $i \lhd j$. Кроме того, $\sigma_*(j) = k$ и $\sigma_*(i) = l$ для некоторого $l > k$. Это, как нетрудно заметить, противоречит условиям (i). Значит, для любого $\sigma \in \mathcal{S}_d$ будет верным неравенство

$$\sum_{j \in V(P)} x_{jk}^{\sigma} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma} \leqslant 1.$$

Предположим теперь, что найдётся такое расписание $\sigma_* \in \mathcal{S}_d$, что

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl}^{\sigma_*} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk}^{\sigma_*} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} > 1.$$

Из предположения, ограничений (5), правильности неравенства (12) и целочисленности всех переменных следует, что

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl}^{\sigma_*} = 1, \qquad \sum_{j\in V(P)} x_{jk}^{\sigma_*} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il}^{\sigma_*} = 1.$$

Значит, найдётся $l \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ такой, что $x_{zl}^{\sigma_*} = 1$. Среди $j \in V(P)$ и $s = \{k, k+1, \ldots, d\}$ найдутся такие, что $x_{js}^{\sigma_*} = 1$. Это означает, что $\sigma_*(z) = l$ и $\sigma_*(j) = s$. Если $j \lhd z$, то получаем противоречие с условиями (i) (так как $l < s$), а если $j = z$, то получаем противоречие с тем, что каждое требование обслуживается ровно одним прибором. Теорема 1 доказана.

Класс неравенств, описанных в теореме 1, обозначим буквой I.

Будем говорить, что неравенство $ax \leqslant a_0$, правильное относительно $\mathcal{M}_{d,Z}$, *отсекает* точку $\overline{x} \in \mathcal{M}_d \setminus \mathcal{M}_{d,Z}$, если $a\overline{x} > a_0$. Покажем, что в $\mathcal{M}_d$ существуют нецелочисленные точки, отсекаемые неравенствами класса I.

Пример 1. Рассмотрим орграф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$ и множеством дуг $E = \{(1,2), (1,7), (2,3), (3,4), (4,5), (4,7), (5,6), (6,9), (7,9), (8,9), (9,10)\}$ (рис. 1). Пусть $d = 10$.

Точку $\overline{x}$ удобно задавать с помощью таблицы 10×10, строки которой соответствуют множеству V, а столбцы — множеству D. Пусть $\overline{x}$ имеет следующие координаты:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,8	0	0	0,2	0	0	0	0	0
2	0,4	0	0,6	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,4	0	0,4	0,2	0	0	0	0	0
4	0	0	0,4	0,2	0,2	0,2	0	0	0	0
5	0	0	0	0,2	0,6	0	0,2	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0,8	0	0,2	0	0
7	0	0	0	0,2	0,6	0	0	0,2	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0,8	0	0,2	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0	0,2

Возьмём $P \subset G$ — путь с $V(P) = \{3, 4, 5\}$ и $k = 5$. Неравенство вида (11), отсекающее точку $\overline{x}$, будет иметь вид:

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{310} \leqslant 1.$$

Подставив в это неравенство координаты точки $\overline{x}$, в левой части получаем значение 1,2. Следовательно, построенное неравенство отсекает точку $\overline{x}$.

На этапе включения построенных неравенств в качестве отсечений в соответствующие алгоритмы целесообразно использовать лишь те из них, которые являются наиболее «сильными» среди всех неравенств рассматриваемого класса.

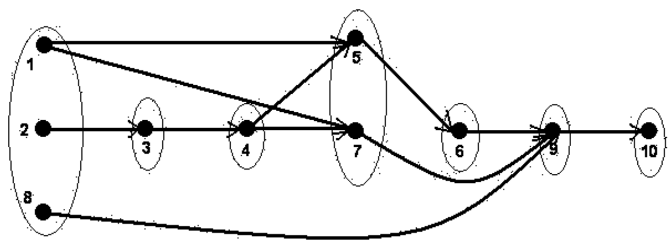

Рис. 1

Будем говорить, что *неравенство* $ax \leqslant a_0$ *не сильнее неравенства* $bx \leqslant b_0$ относительно $\mathcal{M}_d$, если $\{x \in \mathcal{M}_d \mid ax > a_0\} \subseteq \{x \in \mathcal{M}_d \mid bx > b_0\}$.

Легко заметить, что среди неравенств вида (10) и (12) наиболее «сильными» являются неравенства, построенные на максимальных по включению путях орграфа G. Что касается класса I в целом, то следующий пример показывает, что провести сравнение неравенств внутри класса I в общем случае не представляется возможным.

Пример 2. Пусть теперь $P_1, P_2 \subset G$, где G — орграф из примера 1 и $P_1 \subset P_2$, $d = 10$. Рассмотрим точку $\overline{x} \in \mathcal{M}_d$ из примера 1. Возьмём путь P_1 с $V(P_1) = \{3, 4\}$ и $k = 4$. Неравенство вида (11), построенное на пути P, отсекает точку $\overline{x}$. Возьмём путь P_2 с $V(P_2) = \{3, 4, 5\}$ и $k = 4$. Неравенство вида (11), построенное на пути P_2, не отсекает точку $\overline{x}$.

Рассмотрим обратную ситуацию. Возьмём путь P_1 с $V(P_1) = \{3, 7\}$ и $k = 5$. Неравенство вида (11), построенное на пути P_1, не отсекает точку $\overline{x}$. Однако неравенство вида (11), построенное на пути P_2 с $V(P_2) = \{3, 4, 7\}$, точку $\overline{x}$ отсекает.

3. Некоторые условия опорности

В этом разделе описаны достаточные условия опорности неравенств из класса I.

Как следует из определений понятий «правильность» и «опорность», опорные неравенства в определённом смысле более предпочтительны при построении выпуклых оболочек. Однако в общем случае доказать опорность неравенств к многограннику $\mathcal{M}_{d,Z}$ не представляется возможным, так как при относительно малых d множество $\mathcal{S}_d$ может оказаться пустым. Так как $\mathcal{S}_d \subset \mathcal{S}_{d'}$ при $d < d'$, вопрос существования расписаний фактически совпадает с задачей нахождения минимального d, при котором $\mathcal{S}_d \neq \varnothing$. Эта задача совпадает с задачей минимизации общего времени обслуживания всех требований $(\max\limits_{i\in V} \sigma(i) \to \min\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_d})$, являющейся открытой в смысле комбинаторной сложности [5].

Сформулируем сначала некоторое достаточное условие непустоты множества $\mathcal{S}_d$. Для этого нам понадобится следующая конструкция, которая также будет использована для доказательства достаточных условий опорности неравенств из класса I. Пусть B_1 — вершинная база орграфа G. Назовём её базой 1-го уровня. Положим $G_1 = G - B_1$. Ясно, что G_1 — вновь ациклический орграф. Его вершинную базу обозначим через B_2 и назовём её базой 2-го уровня. Продолжая эту процедуру, получим базы 3-го, 4-го и т. д. уровней, т. е. база p-го уровня B_p — это вершинная база орграфа $G_{p-1} = G_{p-2} - B_{p-1}$. В результате множество вершин орграфа G будет разбито на семейство попарно не пересекающихся баз $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_t$.

Утверждение 1. *Пусть $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_t$ — разбиение множества вершин орграфа G на базы. Если $d \geqslant \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil |\ B_p\ |/m \rceil$, то множество $\mathcal{S}_d$ непусто.*

Доказательство. Так как $\mathcal{S}_d \subset \mathcal{S}_{d'}$ при $d < d'$, утверждение достаточно доказать для случая $d = \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil |\ B_p\ |/m \rceil$. Разобьём множество D на блоки $L_1,\ L_2, \ldots,\ L_t$ по правилу:

$$L_p = \left\{ \sum_{s=1}^{p-1} \lceil |\ B_s\ |/m \rceil + 1, \sum_{s=1}^{p-1} \lceil |\ B_s\ |/m \rceil + 2, \ldots, \sum_{s=1}^{p} \lceil |\ B_s\ |/m \rceil \right\},$$
$$p = 1,\ 2, \ldots,\ t.$$

Поскольку вершины, принадлежащие базе одного уровня, попарно не смежны, расписание $\sigma \in \mathcal{S}_d$ можно построить следующим образом. Сначала для каждого $p = 1,\ 2, \ldots,\ t$ произвольно определим отображение $\sigma^p : B_p \to L_p$, в котором выполнено условие $|(\sigma^p)^{-1}(k)| \leqslant m$. После этого расписание $\sigma \in \mathcal{S}_d$ можно определить условием

$$\sigma_{B_p} = \sigma^p, \quad p = 1,\ 2, \ldots,\ t.$$

Таким образом, показано, что $\mathcal{S}_d \neq \varnothing$. Утверждение 1 доказано.

Для формулировки и доказательства достаточных условий опорности неравенства из класса I будут использованы разбиения множеств V и D на базы $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_t$ и на блоки $L_1,\ L_2, \ldots,\ L_t$, описанные в доказательстве утверждения 1, соответственно. При этом с учётом случая $d > \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil |\ B_p\ |/m \rceil$ переопределим блок L_t следующим образом:

$$L_t = \left\{ \sum_{s=1}^{t-1} \lceil |\ B_s\ |/m \rceil + 1, \sum_{s=1}^{t-1} \lceil |\ B_s\ |/m \rceil + 2, \ldots, \sum_{s=1}^{t} \lceil |\ B_s\ |/m \rceil, \ldots, d \right\}.$$

Для $i \in V$ обозначим через $p(i)$ уровень базы, содержащей вершину i.

Утверждение 2. *Пусть $P \subset G$ — путь, $d \geqslant \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil |\ B_p\ |/m \rceil$ и $k \in \bigcup\limits_{j \in V(P)} L_{p(j)}$. Тогда неравенство $\sum\limits_{j \in V(P)} x_{jk} \leqslant 1$ является опорным к многограннику $\mathcal{M}_{d,Z}$.*

Доказательство. Для построения точки $x^\sigma \in \mathcal{M}_{d,Z}$, обращающей ограничение (10) в равенство, вновь воспользуемся тем, что вершины орграфа G, принадлежащие одной базе, попарно не смежны. Для каждого $p \neq p(j_*)$ определим произвольно отображение $\sigma^p : B_p \to L_p$, в котором выполнено условие $|(\sigma^p)^{-1}(l)| \leqslant m$ при $l \in L_p$. Отображение $\sigma^{p(j_*)} : B_{p(j_*)} \to L_{p(j_*)}$ определим так:

$$\sigma^{p(j_*)}(j_*) = k, \quad \sigma^{p(j_*)} : B_{p(j_*)} \setminus \{j_*\} \to L_{p(j_*)} \text{ произвольно.}$$

Теперь расписание $\sigma : V \to D$ можно определить условием

$$\sigma_{B_p} = \sigma^p, \quad p = 1,\, 2, \ldots,\, t.$$

Очевидно, что вектор x^σ будет требуемым. Утверждение 2 доказано.

Следствие 1. *Пусть $P \subset G$ — путь с начальной вершиной i и последней вершиной z, $d \geqslant \sum\limits_{p=1}^{t} \lceil |\ B_p\ |/m \rceil$ и $k \in \bigcup\limits_{j \in V(P)} L_{p(j)}$. Тогда неравенство*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leqslant 1$$

является опорным к многограннику $\mathcal{M}_{d,Z}$.

4. Задача идентификации

Правильные неравенства могут быть полезными при реализации процедур отсечения в качестве отсекающих плоскостей. На этом этапе на передний план выходит задача идентификации неравенств, которая заключается в следующем.

Задача идентификации. *Требуется либо найти в классе I неравенство, отсекающее данную точку $\overline{x} \in \mathcal{M}_d \setminus \mathcal{M}_{d,Z}$, либо доказать, что в классе I такого неравенства нет.*

В этом разделе дано решение этой задачи для класса I.

Пусть $\overline{x} \in \mathcal{M}_d \setminus \mathcal{M}_{d,Z}$, $k \in D$. Дополним орграф G до орграфа $\widetilde{G}$, сопоставив каждой вершине $i \in V$ две новые вершины $u(i)$ и $v(i)$, т. е. $V(\widetilde{G}) = V \cup \{u(i), v(i)$ для всех $i \in V\}$. Положим

$$E(\widetilde{G}) = E \cup \{(u(i), i), (i, v(i)) \text{ для всех } i \in V\}.$$

Вершинам $u(i)$, $v(i)$ присвоим веса $\sum\limits_{l=k+1}^{d} \overline{x}_{il}$, $\sum\limits_{l=1}^{k-1} \overline{x}_{il}$ соответственно. Остальным вершинам $j \in V(\widetilde{G})$ присвоим веса $\overline{x}_{jk}$. Полученный вершинно-взвешенный ациклический орграф обозначим через $\widetilde{G}_{\overline{x},k}$. *Весом подграфа* в орграфе $\widetilde{G}_{\overline{x},k}$ назовём сумму весов входящих в него вершин. Обозначим через $P_{\overline{x},k} \subset \widetilde{G}_{\overline{x},k}$ любой максимальный по весу путь среди всех путей в $\widetilde{G}_{\overline{x},k}$. Вес пути $P_{\overline{x},k}$ в $\widetilde{G}_{\overline{x},k}$ равен

$$\sum_{l=1}^{k-1} \overline{x}_{zl} + \sum_{j \in V(P_{\overline{x},k}) \setminus \{u(i), v(z)\}} \overline{x}_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} \overline{x}_{il},$$

где i, z — вторая и предпоследняя вершины пути $P_{\overline{x},k}$ (заметим, что первой вершиной пути $P_{\overline{x},k}$ является $u(i)$, а последней — $v(z)$). Тогда становится очевидным

Утверждение 3. *Среди неравенств класса I найдётся неравенство, отсекающее точку $\overline{x} \in \mathcal{M}_d \setminus \mathcal{M}_{d,Z}$, тогда и только тогда, когда существует $k \in D$ такой, что вес пути $P_{\overline{x},k} \subset \widetilde{G}_{\overline{x},k}$ больше 1. При этом в качестве отсекающего неравенства можно взять неравенство*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P_{\overline{x},k}) \setminus \{u(i), v(z)\}} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leqslant 1,$$

где $u(i)$, $v(z)$ — первая и последняя вершины пути $P_{\overline{x},k}$.

Из этого утверждения легко получается алгоритм решения задачи идентификации.

Алгоритм решения задачи идентификации для класса I.

Дано $\overline{x} \in \mathcal{M}_d \setminus \mathcal{M}_{d,Z}$.

k-я итерация, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Шаг 1. В орграфе $\widetilde{G}_{\overline{x},k}$ находим максимальный по весу путь $P_{\overline{x},k}$. Пусть $u(i)$, $v(z)$ — первая и последняя вершины пути $P_{\overline{x},k}$.

Шаг 2. Если

$$\sum_{l=1}^{k-1} \overline{x}_{zl} + \sum_{j \in V(P_{\overline{x},k}) \setminus \{u(i), v(z)\}} \overline{x}_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} \overline{x}_{il} > 1,$$

то переход на шаг 4, иначе — на шаг 3.

Шаг 3. Если $k < d$, то переход на $(k+1)$-ю итерацию, иначе конец. В классе I нет неравенства, отсекающего точку $\overline{x}$.

Шаг 4. Конец. Неравенство

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P_{\overline{x},k}) \setminus \{u(i), v(z)\}} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leqslant 1$$

является искомым неравенством, отсекающим точку $\overline{x}$.

Как видим, решение задачи идентификации сводится к задаче нахождения пути максимального веса в ациклическом вершинно-взвешенном орграфе. Покажем, что решение этой задачи в вершинно-взвешенном орграфе сводится к задаче нахождения пути максимального веса в рёберно-взвешенном орграфе.

Пусть H — вершинно-взвешенный ациклический орграф с неотрицательными весами $\overline{x}_i$, $i \in V(H)$. Построим новый орграф $\overline{H}$ следующим образом. Каждой вершине $i \in V(H)$ сопоставим упорядоченную пару вершин i', $i'' \in V(\overline{H})$. Множество дуг орграфа $\overline{H}$ определим как

$$E(\overline{H}) = \{(i', i'') \mid i \in V(H)\} \cup \{(i'', j') \mid (i, j) \in E(H)\}.$$

При этом дугам вида (i', i'') сопоставим веса $\overline{x}_i$, а дугам вида (i'', j') — веса, равные нулю. Построенный орграф $\overline{H}$ является ациклическим рёберно-взвешенным. Очевидно, что максимальный по весу путь в $\overline{H}$ однозначно определяет максимальный по весу путь в H. Алгоритм решения этой задачи на ациклическом орграфе $\overline{H}$ имеет трудоёмкость $O(n^2)$, где n — число вершин в орграфе H [5].

Вернёмся к алгоритму решения задачи идентификации неравенств класса I. В орграфе $\widetilde{G}$ число вершин равно $3n$. В силу утверждения 1 величину d можно считать не превосходящей числа n. Тогда, учитывая перебор по k, получаем, что трудоёмкость приведённого выше алгоритма решения задачи идентификации есть $O(n^3)$.

Рассуждения, проведённые в этом разделе, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Алгоритм решения задачи идентификации неравенств класса I имеет трудоёмкость $O(n^3)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. — 431 с.
3. **Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М.** Теория расписаний. Одностадийные системы. — М.: Наука, 1984. — 382 с.
4. **Lawler E. L.** Combinatorial optimization: networks and matroids. — New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1976. — 374 p.
5. http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class

Симанчёв Руслан Юрьевич,
e-mail: osiman@rambler.ru
Уразова Инна Владимировна,
e-mail: urazovainn@mail.ru

Статья поступила
3 ноября 2009 г.

Переработанный вариант —
6 декабря 2010 г.