

УДК 621.391.15

СОВЕРШЕННЫЕ 2-РАСКРАСКИ ТРАНЗИТИВНЫХ КУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ *)

С. В. Августинovich, М. А. Лисицына

Аннотация. Для всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18, получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок.

Ключевые слова: кубический граф, транзитивный граф, совершенная раскраска.

Введение

Данная работа посвящена исследованию совершенных раскрасок в два цвета некоторых бесконечных серий транзитивных кубических графов. Для достижения результата, сформулированного в аннотации, пришлось рассмотреть графы призмы, лестницы Мёбиуса, скрещенной призмы, хордальные циклы, обобщённые графы Петерсена, усечённые графы. Таким образом, в статье доказано несколько больше, чем анонсировалось.

Раскраска вершин графа G называется *совершенной*, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают. В частности, это означает, что все соцветные вершины в G имеют одинаковую степень.

Изучение совершенных раскрасок обычно начинается со случая двух цветов. Этот случай представляется самым простым, но он и наиболее интересен, поскольку обладает большим потенциалом обобщения. Как правило, рассматриваемые графы вершинно транзитивны. К редким исключениям следует отнести работы [1, 3], в которых неоднородность графа является условием невыхожденности исследования. Так сложилось исторически, что в данной теме исследователи уделяли внимание классам регулярных графов достаточно большой степени [2, 4, 7, 8, 11]. Слу-

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00244).

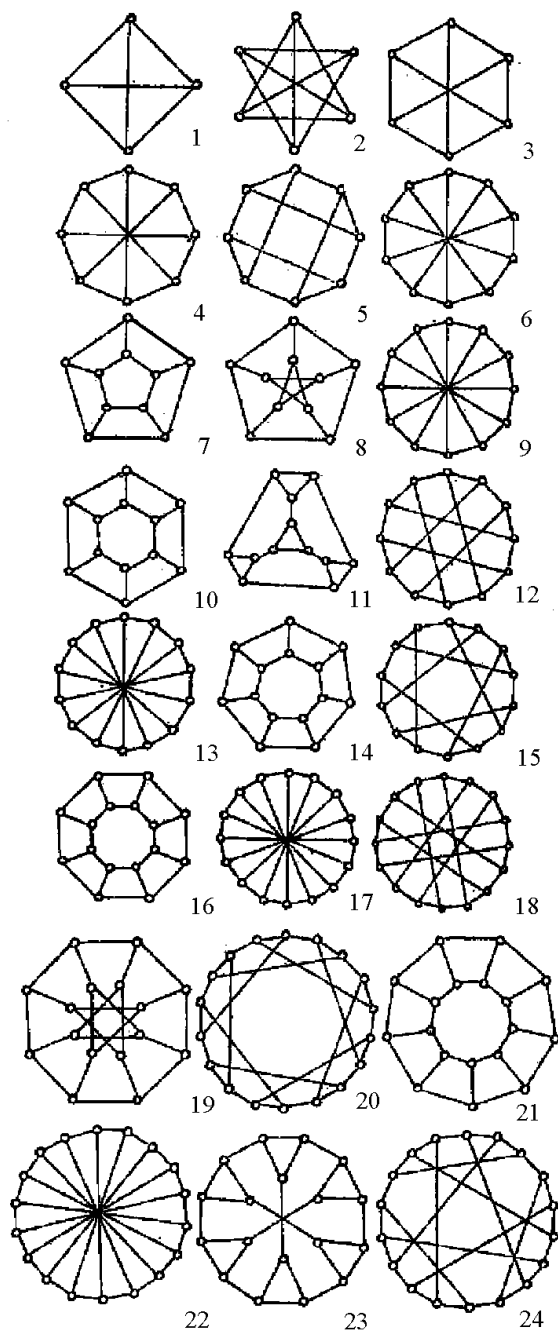


Рис. 1. Диаграммы кубических транзитивных графов

чай степени 3 был незаслуженно пропущен, возможно, из-за своей кажущейся простоты. Вместе с тем транзитивных кубических графов очень много, что видно уже на примере списка диаграмм таких графов с числом вершин, не превосходящих 18 (рис. 1). Все диаграммы оставлены в редакции автора [6], поэтому читателю потребуется затратить некоторые усилия, чтобы узнать в графе 2 призму, а в графе 19 — хордальный цикл.

1. Предварительные сведения

Для удобства совершенные раскраски в два цвета будем называть *совершенными 2-раскрасками*, причём первый цвет будем называть белым, а второй — чёрным.

Матрица параметров совершенной 2-раскраски имеет вид $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и означает следующее. Каждая вершина белого цвета соседствует ровно с a и b вершинами белого и чёрного цветов соответственно. Аналогичный смысл имеют параметры c и d для чёрных вершин. Параметры a и d будем называть *внутренними степенями*, а b и c — *внешними степенями* белого и чёрного цветов соответственно.

Матрица M называется *допустимой для графа G* , если существует совершенная 2-раскраска вершин графа G с параметрами a, b, c и d .

Две матрицы совершенных раскрасок называются *эквивалентными*, если одна может быть получена из другой перестановкой строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов.

Не теряя общности, можно считать, что каждая матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, допустимая для некоторого кубического графа, удовлетворяет соотношениям $1 \leq b \leq c \leq 3$. И, естественно, $a + b = 3$, $c + d = 3$.

С учётом сказанного справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Матрицами параметров совершенной 2-раскраски кубического графа G являются только следующие шесть матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Везде в дальнейшем используются именно эти обозначения для рассматриваемых матриц. Проще всего решать вопрос о допустимости матрицы F — проверка двудольности графа обычно не вызывает затруднений.

Лемма 2. Пусть матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ допустима для графа G . Тогда

- (i) число белых вершин графа G относится к числу его чёрных вершин, как c/b ;
- (ii) число вершин графа G кратно $(b+c)/(b, c)$, где (b, c) — наибольший общий делитель чисел b и c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти очевидно, поскольку вершины белого и чёрного цветов в графе G порождают бигулярный двудольный граф со степенями долей b и c соответственно. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть G — кубический граф с N вершинами. Следующие ограничения на N являются необходимыми условиями допустимости матриц для графа G :

- (i) если матрица A допустима для двудольного графа G , то N кратно 4;
- (ii) если матрица B допустима для графа G , то N кратно 3;
- (iii) если матрица C допустима для графа G , то N кратно 4;
- (iv) если матрица D допустима для графа G , то N кратно 4;
- (v) если матрица E допустима для графа G , то N кратно 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 в доказательстве нуждаются только пп. (i) и (iii).

(i) Пусть G — двудольный кубический граф и матрица A допустима для него. Внутренние степени обоих цветов в соответствующей раскраске равны двум, значит, каждый цвет образует циклы, причём в силу двудольности — чётные. Отсюда число вершин каждого цвета чётно и эти числа совпадают. Значит, необходимым условием допустимости матрицы A для двудольного графа G является кратность N четырём.

(iii) Рассуждения аналогичны пункту (i). Разница в том, что чётность числа белых вершин обеспечена внутренней степенью 1 — они образуют паросочетание. Лемма 3 доказана.

Для дальнейшего нам потребуются новые понятия. Пусть T — произвольный фрагмент (подмножество вершин) транзитивного графа G . Под действием каждого из автоморфизмов G фрагмент T занимает некоторое новое положение, причём множество всех таких положений с постоянной кратностью покрывает множество вершин графа G . Это соображение делает очевидной следующую лемму.

Лемма 4 (о среднем). Если доля белых вершин в некотором фрагменте совершенной 2-раскраски транзитивного графа G больше соответствующей доли во всём графе, то найдётся такое положение фрагмента,

в котором доля белых вершин меньше средней, и наоборот.

Как следствие, если усреднённое число белых вершин по всем положениям фрагмента дробное, то реализуются обе ситуации. Заметим, что число цветов и совершенство раскраски не играют никакой роли в доказательстве данной леммы.

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных серий графов, скажем несколько слов об идейной стороне доказательств. Каждое доказательство имеет позитивную часть (конструкции раскрасок), подкреплённую рисунками, и негативную часть (доказательство несуществования раскрасок), опирающуюся на доказанные выше леммы и локальный перебор. Сократить перебор помогает понятие локально жёсткого фрагмента.

Подмножество T вершин графа G называется *локально жёстким фрагментом*, если из совпадения на T двух совершенных раскрасок графа G с одинаковыми параметрами вытекает их полное совпадение. Ясно, что для описания всех совершенных раскрасок достаточно перебрать варианты раскрасок локально жёстких фрагментов. Правда, не всегда для бесконечной серии графов можно подыскать подходящий ограниченный фрагмент (см. скрещенная призма).

2. Призма и лестница Мёбиуса

Далее всюду n — натуральное число.

Назовём граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и рёбер $E = \{(i, i+1) \mid i = \overline{0, 2n-1}, i \text{ чётное}\} \cup \{(i, i+2) \mid i = \overline{0, 2n-1}\}$ (сложение по модулю $2n$) *призмой* $P(n)$.

Граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и рёбер $E = \{(i, i+1), (i, i+n) \mid i = \overline{0, 2n-1}\}$ (сложение по модулю $2n$) называется *лестницей Мёбиуса* $M(n)$.

На рис. 2 показано локальное строение призмы и лестницы Мёбиуса. Разница в том, что у лестницы Мёбиуса концы полосы перед соединением перекручиваются на один оборот.

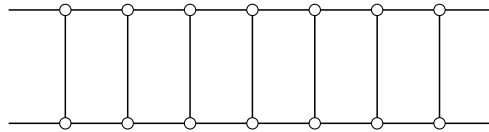


Рис. 2. Локальное строение призмы и лестницы Мёбиуса

На рис. 1 призмами и лестницами Мёбиуса являются диаграммы под номерами 2, 5, 7, 10, 14, 16, 21 и 3, 4, 6, 9, 13, 17, 22 соответственно. Легко

убедиться в том, что призма и лестница Мёбиуса являются кубическими транзитивными графами.

Лемма 5 (о локальной жёсткости). *В графах $P(n)$ и $M(n)$ всякий 4-цикл является локально жёстким фрагментом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зная цвета вершин 4-цикла и параметры совершенной раскраски, легко продолжить раскраску на пару вершин соседнего 4-цикла и т. д. Это, конечно, не гарантирует непротиворечивости, но зато гарантирует единственность. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. *Допустимые матрицы призмы $P(n)$ исчерпываются следующим списком:*

- (i) A при любых n ;
- (ii) B при n , кратных 3;
- (iii) C при чётных n ;
- (iv) D при n , кратных 4;
- (v) E не является допустимой ни при каких n ;
- (vi) F при чётных n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждаются только пп. (iv) и (v), справедливость остальных пунктов либо очевидна, либо следует из рис. 3 и леммы 3.

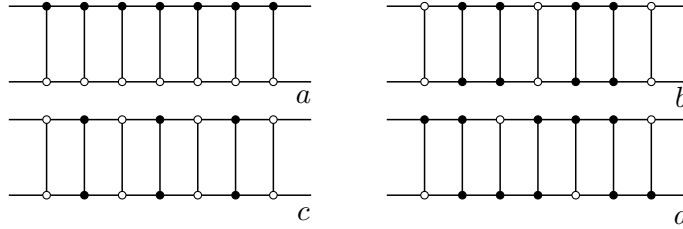


Рис. 3. Совершенные 2-раскраски призмы

(iv) Рассмотрим совершенную 2-раскраску графа $P(n)$ с матрицей параметров D . Белые вершины не могут находиться на расстоянии меньше 3 друг от друга, поэтому найдётся 4-цикл, в котором одна вершина покрашена белым цветом, а остальные — чёрным. По указанному фрагменту призмы без труда восстанавливается раскраска всего графа. Последняя изображена на рис. 3 d . Заметим, что эта раскраска единственна с точностью до автоморфизмов графа и существует, если и только если n кратно 4.

(v) Согласно лемме о среднем найдётся 4-цикл, в котором не менее трех чёрных вершин. У одной из них два соседа чёрного цвета; проти-

воречие. Следовательно, матрица E не является допустимой для графа $P(n)$ ни при каких n . Теорема 1 доказана.

Для лестницы Мёбиуса справедлива

Теорема 2. Допустимые матрицы лестницы Мёбиуса $M(n)$ исчерпываются следующим списком:

- (i) A при n , кратных 4;
- (ii) B при n , кратных 3;
- (iii) C при чётных n ;
- (iv) D при $n = 2p$, где p — нечётное число;
- (v) E не является допустимой ни при каких n ;
- (vi) F при нечётных n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пп. (ii)–(v) доказываются аналогично соответствующим пунктам теоремы 1, поэтому в подробном доказательстве нуждаются только пп. (i) и (vi).

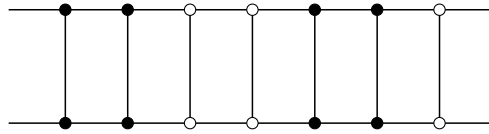


Рис. 4. Совершенная 2-раскраска лестницы Мёбиуса

Пусть совершенная 2-раскраска графа $M(n)$ с матрицей параметров A существует. Заметим, что во всяком 4-цикле чётное число вершин одного цвета, иначе нашлась бы вершина с внешней степенью, большей 1. Более того, не могут все 4-циклы оказаться одноцветными. Значит, есть цикл с двумя чёрными и двумя белыми вершинами. Антиподальное расположение белых вершин противоречиво, поскольку внешняя степень не может быть больше двух. Легко убедиться в том, что из двух оставшихся вариантов расположения чёрных и белых вершин в 4-цикле до совершенной 2-раскраски может быть продолжен лишь один, изображённый на рис. 4. Эта раскраска единственна и существует, если и только если n кратно 4.

Доказательство утверждения (vi) оставляем читателю в качестве лёгкого упражнения.

3. Обобщённый граф Петерсена $P(n)$

Назовём граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и рёбер

$$E = \{(i, i + 1), (i, i + 2) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ чётное}\} \\ \cup \{(i, i + 4) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ нечётное}\}$$

(сложение по модулю $2n$) обобщённым графом Петерсена $P(n)$.

Чётные вершины графа $P(n)$ назовём *нижними*, а нечётные — *верхними*.

Локальное строение обобщённого графа Петерсена $P(n)$ показано на рис. 5.

Теорема 3. Допустимые матрицы обобщённого графа Петерсена $P(n)$ исчерпываются следующим списком:

- (i) A при любых n ;
- (ii) B при n , кратных 3;
- (iii) C не является допустимой ни при каких n ;
- (iv) D не является допустимой ни при каких n ;
- (v) E при n , кратных 5;
- (vi) F не является допустимой ни при каких n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу рис. 6 и леммы 3 только пп. (iii) и (iv) нуждаются в доказательстве.

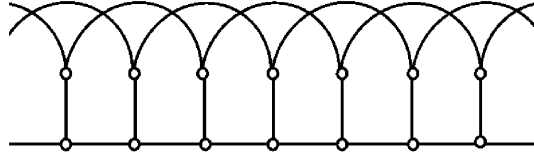


Рис. 5. Локальное строение обобщённого графа Петерсена

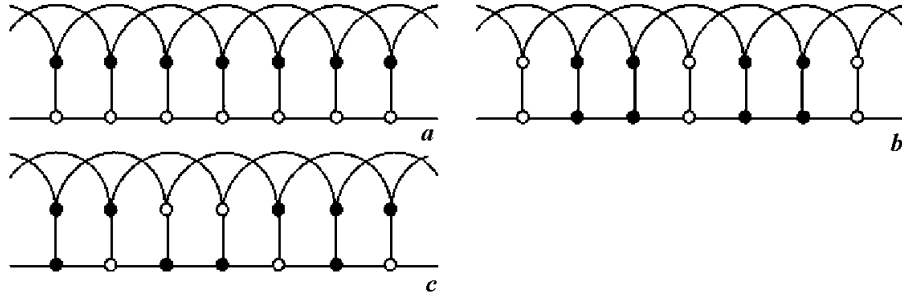


Рис. 6. Совершенные 2-раскраски обобщённого графа Петерсена

(iii) Цвета нижних вершин не могут чередоваться, поэтому найдётся ребро, соединяющее две нижние вершины белого цвета (см. рис. 7с). Цвета 1-окрестности этого ребра все чёрные. Вершины, обозначенные X на рисунке, белые, поскольку соседствуют с парой чёрных, а вершины,

обозначенные Y и Z , чёрные, поскольку их соседи чёрного цвета уже видят по две белых вершины; противоречие.

(iv) Обязательно найдётся нижняя белая вершина. В её 2-окрестности не может быть других белых вершин (см. рис. 7d). Заметим, что тогда вершины X и Y должны быть белыми, что приводит к противоречию.

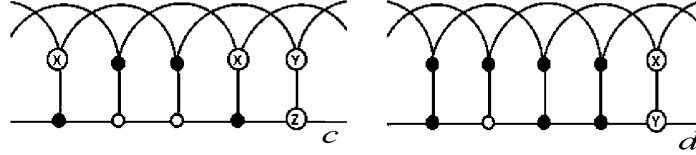


Рис. 7. Недопустимость матриц C и D для обобщённого графа Петерсена

4. Скрещенная призма

Скрещенной призмой $CP(n)$ назовём граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\}$ и рёбер

$$E = \{(i, i + 2) \mid i = \overline{0, 4n - 1}\} \cup \{(i, i + 3) \mid i = 4p, p = \overline{0, n - 1}\} \\ \cup \{(i, i - 1) \mid i = 4p + 2, p = \overline{0, n - 1}\}$$

(сложение по модулю $4n$).

Локальное строение скрещенной призмы показано на рис. 8.

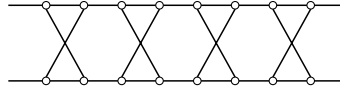


Рис. 8. Локальное строение скрещенной призмы

На рис. 1 диаграммами скрещенных призм являются диаграммы под номерами 5, 12 и 18.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 4. Допустимые матрицы скрещенной призмы $CP(n)$ исчерпываются следующим списком:

- (i) A при любых n ;
- (ii) B не является допустимой ни при каких n ;
- (iii) C при любых n ;
- (iv) D при чётных n ;
- (v) E не является допустимой ни при каких n ;
- (vi) F при любых n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу рис. 9 и леммы 3 в доказательстве нужны только пп. (ii), (iv) и (v).

(ii) Согласно лемме о среднем найдётся 4-цикл с двумя белыми вершинами, причём соседними. В 2-окрестность этой пары попадают оба соседних 4-цикла, и все их вершины обязательно должны быть окрашены в чёрный цвет. Тогда для оставшихся двух вершин первоначального 4-цикла непротиворечивой раскраски не найдётся.

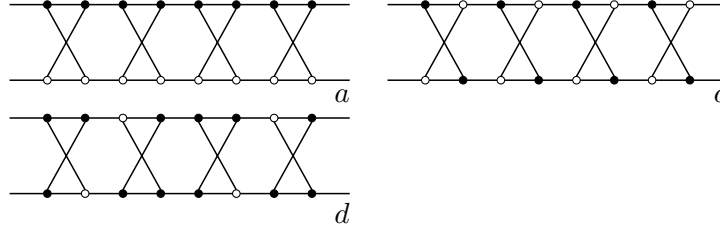


Рис. 9. Совершенные 2-раскраски скрещенной призмы

(iv) Никакой 4-цикл не может содержать две белые вершины. По лемме о среднем получается, что все 4-циклы содержат ровно одну белую вершину, причём для раскраски одного из соседних 4-циклов останется ровно один вариант (рис. 10). Таким образом, все 4-циклы разобьются на пары, что и означает чётность n .

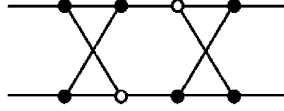


Рис. 10. Раскраска фрагмента скрещенной призмы

(v) По лемме о среднем найдётся 4-цикл с двумя белыми несмежными вершинами. В соседнем 4-цикле, ближайшем к этой паре белых вершин, все вершины должны быть окрашены в чёрный цвет; противоречие.

Теорема 4 доказана.

5. Хордальный цикл

Хордальным циклом $H(n)$ назовём граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и рёбер

$$E = \{(i, i + 1) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\} \cup \{(i, i + 5) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ чётное}\}$$

(сложение по модулю $2n$).

Локальное строение хордального цикла $H(n)$ показано на рис. 11.

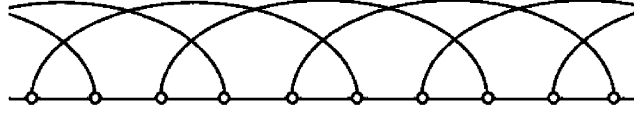


Рис. 11. Локальное строение хордального цикла

Теорема 5. Допустимые матрицы хордального цикла исчерпываются следующим списком:

- (i) A при чётных n ;
- (ii) B не является допустимой ни при каких n ;
- (iii) C при чётных n ;
- (iv) D при n , кратных 4;
- (v) E не является допустимой ни при каких n ;
- (vi) F при любых n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждаются только пп. (ii), (iv) и (v), справедливость остальных пунктов следует из рис. 12 и леммы 3.

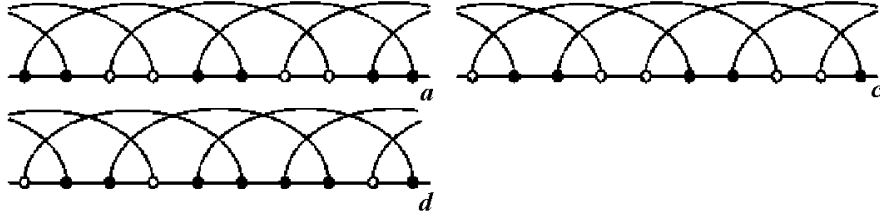
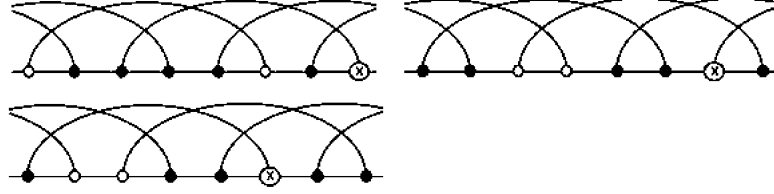


Рис. 12. Совершенные 2-раскраски хордального цикла

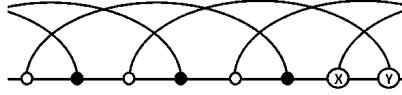
(ii) Заметим, что 2-окрестность каждого ребра, соединяющего пару белых вершин, может содержать только чёрные вершины. Поэтому всякий 6-цикл содержит не более двух белых вершин и, как следствие из леммы о среднем, ровно две. Все возможные варианты расположения двух соседних белых вершин в 6-цикле приведены на рис. 13. Каждый раз для вершины X не найдётся подходящего цвета.

(iv) Каждая белая вершина является концом некоторого дугообразного ребра, замыкающего некоторый 6-цикл. Если в этом 6-цикле имеется еще одна белая вершина, то она находится на расстоянии 3 от первой. Другой вариант — дополнительных вершин нет. Оба варианта допустимы и однозначно продолжают друг друга до раскраски с периодом 8 (см. рис. 12 d). Как следствие, n кратно 4.

Рис. 13. Недопустимость матрицы B для хордального цикла

(v) По лемме о среднем найдётся 6-цикл с тремя белыми вершинами, которые обязаны чередоваться с чёрными (см. рис. 14). На рисунке вершина Y обязательно чёрная, а для X вариантов нет.

Теорема 5 доказана.

Рис. 14. Недопустимость матрицы E для хордального цикла

6. Усечённые кубические графы

В этом разделе речь пойдёт об усечённых кубических графах и их совершенных 2-раскрасках. Условие транзитивности здесь не требуется.

Пусть G — произвольный кубический граф. Граф, полученный из графа G вставкой вместо каждой вершины треугольника (см. рис. 15), будем называть *усечённым графом* (*truncated graph*) и обозначать через $T(G)$. В некотором смысле граф $T(G)$ получен отсечением вершин графа G .

На рис. 1 диаграммы под номерами 11 и 23 являются диаграммами усечённых графов $M(2)$ и $M(3)$.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 6. Пусть G — произвольный кубический граф. Допустимые матрицы графа $T(G)$ исчерпываются следующим списком:

- (i) A допустима для графа $T(G)$, если и только если F допустима для графа G ;
- (ii) B допустима для графа $T(G)$, если и только если в G есть совершенное паросочетание;
- (iii) C допустима для графа $T(G)$, если и только если C допустима для графа G ;
- (iv) D допустима для графа $T(G)$, если и только если D допустима для графа G ;

- (v) E не является допустимой ни для какого графа $T(G)$;
- (vi) F не является допустимой ни для какого графа $T(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести в соответствии с нумерацией пунктов теоремы.

(i) Легко понять, что все треугольники графа $T(G)$ одноцветны, иначе нашлась бы вершина с внутренней степенью меньше 2. Кроме того, соседние треугольники должны быть окрашены в разные цвета. Соответствующая раскраска вершин графа G правильная, что означает его двудольность. Аналогично в обратную сторону.

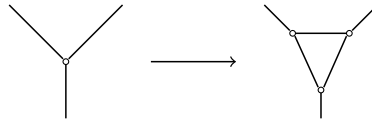


Рис. 15. Усечённые кубические графы

(ii) Назовём рёбра графа $T(G)$, соединяющие треугольники, *реликтовыми*. Все реликтовые рёбра соединяют вершины одинакового цвета, поэтому им можно приписать соответствующий цвет. Вернувшись к графу G , обнаружим, что белые рёбра в нём образуют совершенное паросочетание. Построить нужную раскраску графа (G) , отправляясь от совершенного паросочетания в графа $T(G)$, тоже нетрудно. Заметим также, что теорема Татта (см., например, [5]) гарантирует существование совершенного паросочетания в каждом транзитивном кубическом графе.

(iii) Опять воспользуемся раскраской реликтовых рёбер. На этот раз появятся белые, чёрные и пёстрые рёбра. В совокупности белые и чёрные рёбра образуют в графе (G) совершенное паросочетание, обладающее тем свойством, что рёбра одного цвета не смежны между собой. А это как раз и означает раскраску с матрицей C . При переходе от графа (G) к графу $T(G)$ достаточно назначить цвета вершинам пёстрых рёбер, что происходит вполне однозначно.

(iv) Теперь в графе $T(G)$ реликтовые рёбра приобретут два цвета: пёстрый и чёрный. Вершину графа (G) покрасим в белый цвет, если её окружают только чёрные рёбра. В противном случае используем чёрный цвет. Легко убедиться в том, что полученная раскраска будет искомой. Обратный процесс тоже однозначный.

(v) По лемме о среднем найдётся треугольник с двумя белыми вершинами; противоречие.

(vi) Треугольник является нечётным циклом.

Стоит сказать, что однозначное соответствие раскрасок (G) и $T(G)$

друг другу означает заодно и равенство их количеств. Теорема 6 доказана.

6.1. Граф Паппа. Граф Паппа (Pappus graph) остался за рамками бесконечных серий. На рис. 1 его диаграммой является диаграмма под номером 24.

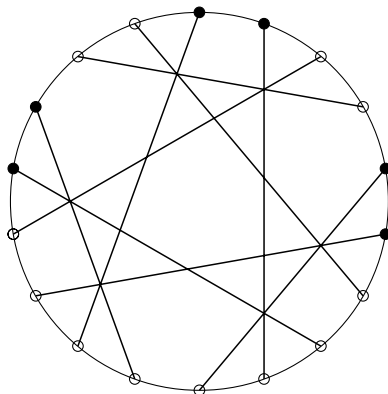


Рис. 16. Совершенная 2-раскраска графа Паппа

Теорема 7. Для графа Паппа допустимыми являются лишь матрицы B и F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустимость матрицы F для графа Паппа очевидна. Рис. 16 подтверждает допустимость матрицы B . Негативная часть теоремы немедленно следует из леммы 3. Теорема 7 доказана.

Заключение

Заметим, что полученные результаты носят предварительный характер. Как подчеркивалось выше, множество транзитивных кубических графов необозримо. Трудности перечисления совершенных раскрасок таких графов растут с ростом их обхвата, ибо перестают работать методы, связанные с понятием локальной жёсткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э. Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 3. — С. 3–16.
2. Августинович С. В., Могильных И. Ю. Совершенные раскраски графов Джонсона $J(8, 3)$ и $J(8, 4)$ в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 3–19.

3. Визинг В. Г. Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 3–12.
4. Воробьев К. В., Фон-Дер-Флаасс Д. Г. О совершенных 2-раскрасках гиперкуба // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 65–75.
5. Дистель Р. Теория графов. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. — 336 с.
6. Кохов В. А. Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. — Новосибирск: Наука, 1986. — С. 113–114.
7. Кротов Д. С. О совершенных раскрасках половинного 24-куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 35–46.
8. Фон-Дер-Флаасс Д. Г. Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 924–931.
9. Хорошилова Д. Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80–92.
10. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. — Киев: Наукова думка, 1984. — С. 121–138.
11. Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu. Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6, 3)$ and $J(7, 3)$ // ICMCTA'2008 (Castillo de la Mota, Medina del Campo, Spain, September 15–19, 2008). Proc.: — Berlin: Springer-Verl., 2008. — P. 11–19. (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 5228.)
12. Axenovich M. A. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. — Vol. 268, N 1–3. — P. 31–49.
13. Puzynina S. A., Avgustinovich S. V. On periodicity of two-dimensional words // Theor. Comput. Sci. — 2008. — Vol. 391. — P. 178–187.

Августинович Сергей Владимирович,
e-mail: avgust@math.nsc.ru
Лисицына Мария Александровна,
e-mail: lisicinama@math.nsc.ru

Статья поступила
16 августа 2010 г.