ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2011. Том 18, № 2. С. 18–28

УДК 519.17

# 2-ДИСТАНЦИОННАЯ 4-РАСКРАСКА ПЛОСКИХ СУБКУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ *)

*О. В. Бородин, А. О. Иванова*

**Аннотация.** Тривиальная нижняя граница для 2-дистанционного хроматического числа $\chi_2(G)$ любого графа $G$ с максимальной степенью $\Delta$ равна $\Delta+1$. Известно, что $\chi_2 = \Delta+1$, если обхват $g$ не меньше 7, а $\Delta$ достаточно велико. Существуют примеры графов со сколь угодно большой $\Delta$ и обхватом $g \leqslant 6$, для которых $\chi_2(G) \geqslant \Delta + 2$. В статье доказана 4-раскрашиваемость плоских субкубических графов с $g \geqslant 23$, что усиливает аналогичный результат О. В. Бородина, А. О. Ивановой и Т. К. Неустроевой (2004) и Дворжака, Шкрековски и Танцера (2008) для $g \geqslant 24$.

**Ключевые слова**: плоский граф, 2-дистанционная раскраска, субкубический граф.

## Введение

Под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Через $V(G)$, $E(G)$, $\Delta(G)$ и $g(G)$ обозначим множества вершин, рёбер, максимальную степень и обхват графа $G$ соответственно (будем опускать аргумент всякий раз, когда граф ясен из контекста).

Раскраска $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа $G$ называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более 2 друг от друга получают разные цвета. Минимальное число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа $G$ называется его 2-*дистанционным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_2(G)$.

В 1977 г. Вегнер [20] (см. также книгу Йенсена и Тофта [16]) высказал следующую гипотезу.

**Гипотеза.** *Для любого плоского графа справедливы следующие утверждения*:

(i) $\chi_2 \leqslant 7$, *если* $\Delta = 3$;

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00673, 09–01–00244).

(ii) $\chi_2 \leqslant \begin{cases} \Delta+5, & \text{если } 4 \leqslant \Delta \leqslant 7, \\ \lfloor 3\Delta/2 \rfloor + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Получены следующие верхние оценки: $\lfloor 9\Delta/5 \rfloor + 2$ при $\Delta \geqslant 749$ Агнарсоном и Холдорсоном [9, 10] и $\lceil 9\Delta/5 \rceil + 1$ при $\Delta \geqslant 47$ О. В. Бородиным, Брусмой, А. Н. Глебовым и Ван-Ден-Хойвелом [1, 2]. Наилучшие из известных верхних оценок при больших $\Delta$ принадлежат Молою и Салаватипуру [17, 18]: $\lceil 5\Delta/3 \rceil + 78$ при всех $\Delta$ и $\lceil 5\Delta/3 \rceil + 25$ при $\Delta \geqslant 241$.

В [3, 6] получены достаточные условия (в терминах $g$ и $\Delta$) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta+1$. В частности, установлено, что минимальное $g$ такое, что $\chi_2 = \Delta + 1$, если $\Delta$ достаточно велико (в зависимости от $g$), равно 7.

**Теорема 1.** *Если $G$ – плоский граф, то $\chi_2 = \Delta + 1$ в каждом из случаев*:

(i) $\Delta = 3,\ \ g \geqslant 24$;
(ii) $\Delta = 4,\ \ g \geqslant 15$;
(iii) $\Delta = 5,\ \ g \geqslant 13$;
(iv) $\Delta = 6,\ \ g \geqslant 12$;
(v) $\Delta \geqslant 7,\ \ g \geqslant 11$;
(vi) $\Delta \geqslant 9,\ \ g = 10$;
(vii) $\Delta \geqslant 15,\ \ g \geqslant 8$;
(viii) $\Delta \geqslant 30,\ \ g = 7$.

*Существуют плоские графы с $g \leqslant 6$ такие, что $\chi_2 = \Delta + 2$ для произвольно больших $\Delta$.*

О. В. Бородин, А. О. Иванова и Т. К. Неустроева [4, 5] доказали, что $\chi_2 = \Delta + 1$ при всех $\Delta \geqslant 31$ для плоских графов обхвата 6 при дополнительном условии, что каждое ребро инцидентно вершине степени 2.

Дворжак, Крал, Ниедлы и Шкрековски [13] доказали, что каждый плоский граф с $\Delta \geqslant 8821$ и $g \geqslant 6$ имеет $\chi_2 \leqslant \Delta + 2$, а О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [11, 12] условие на $\Delta$ было ослаблено до 18.

В [7] теорема 1 улучшена А. О. Ивановой при $\Delta \geqslant 5$ следующим образом.

**Теорема 2.** *Если $G$ — плоский граф с обхватом $g$ и максимальной степенью $\Delta$, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$ в каждом из следующих случаев*:

(i) $\Delta \geqslant 16$, $g = 7$;
(ii) $\Delta \geqslant 10$, $8 \leqslant g \leqslant 9$;
(iii) $\Delta \geqslant 6$, $10 \leqslant g \leqslant 11$;
(iv) $\Delta = 5$, $g \geqslant 12$.

Особый интерес вызывает раскраска графов с $\Delta = 3$ (называемых *субкубическими*). Для таких графов Дворжак, Шкрековски и Танцер [14] доказали, что $\chi_2 = 4$ при $g \geqslant 24$ (т. е. независимо получили п. (i) теоремы 1) и $\chi_2 \leqslant 5$ при $g \geqslant 14$. Второй из этих результатов также получен Монтасьером и Распо [19], а А. О. Иванова и А. С. Соловьева [8] и Аве [15] улучшили его до $g \geqslant 13$.

Целью данной статьи является

**Теорема 3.** *Плоский субкубический граф с обхватом не менее* 23 *является* 2*-дистанционно* 4*-раскрашиваемым.*

## 1. Доказательство теоремы 3

Пусть граф $G'$ — контрпример к теореме, т. е. $\Delta(G') = \Delta = 3$, $g(G') \geqslant 23$, а $\chi_2(G') > 4$. Пусть далее $G$ — наименьший по числу вершин граф со свойствами $\Delta(G) \leqslant \Delta$, $g(G) = g \geqslant g(G')$, $\chi_2(G) > 4$. Множество графов с этими свойствами непусто, так как, например, $G'$ всеми ими обладает. Доказательство теоремы состоит в доказательстве несуществования графа $G$, что противоречит сделанному нами предположению о существовании графа $G'$.

Легко видеть, что граф $G$ является 2-связным и, в частности, не имеет висячих вершин.

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде

$$(21|E| - 23|V|) + (2|E| - 23|F|) = -46,$$

где $F$ — множество граней графа $G$. Отсюда

$$\sum_{v\in V}\left(\frac{21}{2}d(v) - 23\right) + \sum_{f\in F}(r(f) - 23) = -46, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины $v$, $r(f)$ — ранг грани $f$. Пусть *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины $v$ графа $G$ равен $\frac{21}{2}d(v) - 23$, а *заряд* каждой грани $f$ графа $G$ равен $r(f) - 23$. Поскольку заряд каждой грани неотрицателен, из (1) имеем

$$\sum_{v\in V}\left(\frac{21}{2}d(v) - 23\right) < 0. \tag{2}$$

Заметим, что заряд 2-вершины равен $-2$, заряд 3-вершины равен $8\frac{1}{2}$. Опишем ряд структурных свойств графа $G$, опираясь на которые, перераспределим заряды вершин так, чтобы новый заряд $\mu^*(v)$ каждой вершины стал неотрицательным. Поскольку сумма зарядов вершин при

перераспределении сохраняется, мы получим противоречие с (2), что и завершит доказательство теоремы.

Далее под $k$-*цепью* понимаем цепь, состоящую в точности из $k$ вершин степени 2, а под $(k, l, m)$-*вершиной* — вершину степени 3, инцидентную $\geqslant k$-, $\geqslant l$- и $\geqslant m$-цепям.

**1.1. Структурные свойства графа $G$.**

**Лемма 1** [15]. *Цепь $x_1x_2x_3x_4$ из вершин, имеющих $2, 2, 3$ и $2$ допустимых цвета соответственно, 2-дистанционно раскрашиваема.*

В дальнейшем через $c(v)$ будем обозначать цвет вершины $v$ в частичной 2-дистанционной раскраске $c$ графа $G$.

**Лемма 2.** *Цепь $x_1 \dots x_5$ из вершин, имеющих $2, 2, 3, 3$ и $2$ допустимых цвета соответственно, 2-дистанционно раскрашиваема.*

Доказательство. Если среди допустимых цветов вершин $x_2$ и $x_5$ имеется общий цвет, скажем 1, то, полагая $c(x_2) = c(x_5) = 1$, мы сможем покрасить вершины $x_1$, $x_3$ и $x_4$ в этом порядке, поскольку для каждой из них в момент окрашивания остаётся один допустимый цвет.

Пусть теперь на вершинах $x_2$ и $x_5$ нет общего цвета. Тогда первой покрасим вершину $x_3$ в цвет, отличный от цветов, имеющихся на $x_1$. Поскольку допустимые цвета на вершинах $x_2$, $x_5$ попарно различны, на одной из них по-прежнему остаётся два цвета; продолжим раскраску на $x_2$, $x_5$, начав с той из них, на которой остался только один цвет. Затем красим $x_4$ и последней — $x_1$. Лемма 2 доказана.

**Лемма 3** [3, 14]. *В $G$ нет*

(i) $\geqslant 6$-*цепей,*

(ii) $(1, 4, 5)$-*вершин,*

(iii) $(2, 3, 5)$-*вершин.*

**Лемма 4.** *В $G$ нет $(3, 3, 3)$-вершин.*

Доказательство. Пусть $u$ — (3,3,3)-вершина, инцидентная цепям $uu_1u_2u_3$, $uu_1'u_2'u_3'$ и $uu_1''u_2''u_3''$. Рассмотрим 2-дистанционную раскраску графа $G - u$ и обесцветим вершины $u_1$, $u_2$, $u_1'$, $u_2'$, $u_1''$, $u_2''$, а затем продолжим раскраску на $u$ и обесцвеченные вершины. Пусть $c(u_3') = 1$. Положим $c(u) = 1$, тогда вершины $u_1'$, $u_2'$ можно покрасить в последнюю очередь в указанном порядке. Имеется лишь единственный случай, когда нельзя продолжить раскраску на оставшиеся вершины: когда $u_2$, $u_1$, $u_1''$ и $u_2''$ имели $\{1, x\}$, $\{1, x, y\}$, $\{1, y, z\}$ и $\{1, z\}$ в качестве допустимых цветов.

Действительно, если цвет 1 отсутствует среди допустимых цветов хотя бы одной из вершин $u^* \in U = \{u_2, u_1, u_1'', u_2''\}$, то окраска вершины $u$ в цвет 1 не добавляет ограничений на выбор цвета для $u^*$, а 2-дистанционных соседей у вершины $u^*$ становится меньше, чем допустимых цветов, поэтому $u^*$ можно покрасить в последнюю очередь, а смежную с $u^*$ вершину — в предпоследнюю очередь (из вершин $u_2$, $u_1$, $u_1''$ и $u_2''$). Итак, цвет 1 есть в списке каждой вершины из множества $U$, а вершины $u_2$ и $u_2''$ однозначно красятся в цвета, скажем $x$ и $z$ соответственно. Теперь мы не сможем покрасить вершины $u_1$ и $u_1''$, если для них остался один и тот же цвет, пусть $y$, т. е. вершины $u_1$ и $u_1''$ имели допустимые цвета $\{1, x, y\}$ и $\{1, y, z\}$ соответственно. Далее возникают два варианта.

(A) $x = z = 2$, $y = 3$. Перекрасим $u$ в цвет 4, затем красим вершины $u_2'$ и $u_1'$, а остальные вершины докрашиваем в таком порядке: $u_1$, $u_1''$, $u_2$, $u_2''$.

(B) $x = 2$, $z = 4$, $y = 3$. Перекрасим $u$ в цвет 3. Вершины $u_2$ и $u_2''$ можем покрасить последними, так как на выбор цвета для них остаётся по одному ограничению (от вершин $u_1$ и $u_1''$ соответственно). Теперь красим вершины $u_2'$ и $u_1'$. Вершины $u_1$ и $u_1''$ можно покрасить при любом цвете на $u_1'$, поскольку после окрашивания $u$ на них остались разные пары цветов $\{1, 2\}$ и $\{1, 4\}$ соответственно. Лемма 4 доказана.

При доказательстве последующих четырёх лемм будем использовать следующие обозначения и определение.

Пусть вершины $u$ и $w$ соединены цепью $uv_1' \dots v_k'w$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, и инцидентны цепям $uu_1 \dots u_i$, $uu_1' \dots u_j'$, $ww_1 \dots w_n$, $ww_1' \dots w_s'$, где $i \geqslant j$, $n \geqslant s$. *Внутренними* вершинами конфигурации будем считать все перечисленные вершины, за исключением $u_i$, $u_j'$, $w_n$, $w_s'$ (рис. 1).

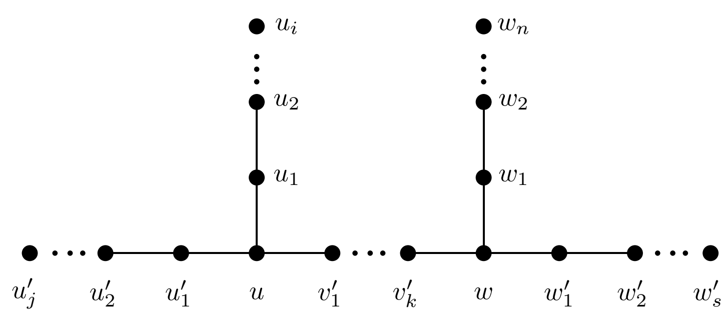


Рис. 1. Обозначения в леммах 5–8

**Лемма 5.** *В $G$ нет $(1,3,4)$-вершин, соединённых 1-цепью.*

Доказательство. Пусть $u$ и $w$ — вершины, соединённые 1-цепью $uv_1'w$. Рассмотрим 2-дистанционную раскраску графа $G-w$ и обесцветим внутренние вершины конфигурации, а затем продолжим раскраску на них.

Без ограничения общности будем считать, что среди допустимых цветов вершин $u_3$ и $w_3$ есть цвета 1 и 2 соответственно. Положим $c(u_3) = c(u) = 1$ и $c(w_3) = c(w) = 2$. Вершины $u_1, u_2$ и $w_1, w_2$ могут быть окрашены в последнюю очередь в указанном порядке, поскольку в момент окрашивания они будут иметь допустимых цветов больше, чем уже окрашенных 2-дистанционных соседей. (В дальнейшем в такой ситуации будем говорить, что цепь или другое множество вершин *разбираются*. В данном случае цепь $u_3u_2u_1u$ разбирается, начиная с вершины $u_2$.) Остаётся раскрасить вершины $u_2', u_1', v_1', w_1', w_2'$.

Заметим, что если после окрашивания $u$ и $w$ хотя бы на одной из вершин $u_2'$, $w_2'$ остаётся два допустимых цвета, скажем на $w_2'$, то раскраску можно продолжить, начиная с вершины $u_2'$. Значит, цвета 1 и 2 присутствовали среди разрешённых на вершинах $u_2'$ и $w_2'$ соответственно, т. е. имеем однозначную раскраску $c(u_2') = y$, $c(w_2') = x$. Если на $u_1'$ и $w_1'$ остаётся один и тот же цвет, то $v$ можно покрасить. Следовательно, имеем единственный случай, когда, положив $c(u) = 1$ и $c(w) = 2$, раскраску нельзя продолжить на вершины $u_2', u_1', v_1', w_1', w_2'$, а именно, вершины $u_2', u_1', w_1', w_2'$ имеют списки допустимых цветов $\{1, y\}$, $\{1, y, 3\}$, $\{2, x, 4\}$, $\{2, x\}$ соответственно. В этом случае, положив $c(u_3) = c(u) = 1$ и $c(v_1') = c(w_2') = 2$, имеем: цепь $u_3u_2u_1u$ разбирается, $c(u_2') = y$, $c(u_1') = 3$, а вершины $w_3, w_2, w_1, w, w_1'$ имеют 2, 3, 3, 2, 2 допустимых цвета соответственно, и их можно покрасить согласно лемме 2. Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** *В $G$ нет смежных $(5, 4, 0)$-вершин.*

Доказательство. Пусть $u$ и $w$ — смежные (5,4,0)-вершины. Рассмотрим 2-дистанционную раскраску графа $G - w$ и обесцветим внутренние вершины конфигурации. Заметим, что вершины $u_4$, $w_4$, $u_3'$ и $w_3'$ имеют по 2 допустимых цвета, $u_3$, $w_3$, $u_2'$ и $w_2'$ имеют по 3 допустимых цвета, а остальные вершины — по 4. Покрасим $u_3$ и $w_3$ в цвета, отсутствующие среди допустимых на вершинах $u_4$ и $w_4$ соответственно. Теперь $u_1$, $w_1$ имеют по 3 цвета, а вершины $u_4$, $u_2$, $w_4$ и $w_2$ могут быть покрашены в последнюю очередь в порядке, обратном указанному.

Положим $c(w_1')$ отличным от цветов, разрешённых на вершине $w_2'$, тогда вершину $w_2'$ можно покрасить последней, а $w_3'$ получает оставшийся на ней цвет. После этого на $u$ и $w$ остаётся по 3 цвета, а на $w_1$ — два. Покрасив $w$ отлично от цветов, имеющихся на $w_1$, оставляем цве-

та 2, 3, 3, 2, 2 на вершинах $u_3'$, $u_2'$, $u_1'$, $u$ и $u_1$ соответственно, а значит, они раскрашиваемы согласно лемме 2. После этого красим $w_1$. Лемма 6 доказана.

**Лемма 7.** *В $G$ нет $(5,5,0)$-вершины, смежной с $(3,3,0)$-вершиной.*

Доказательство. Пусть $u$ и $w$ — смежные (5,5,0)- и (3,3,0)-вершины. Рассмотрим 2-дистанционную раскраску графа $G-w$ и обесцветим внутренние вершины конфигурации. Покрасим $u_3$ и $u_3'$ в цвета, отсутствующие среди допустимых на вершинах $u_4$ и $u_4'$ соответственно, тогда вершины $u_4$, $u_2$, $u_4'$, $u_2'$ разбираются в указанном порядке. Теперь $u_1$ и $u_1'$ имеют по 3 цвета.

Покрасим $w$ отлично от цветов, разрешённых на вершине $u_1$, скажем $c(w) = 1$. Тогда вершины $u_1$, $u_1'$ и $u$ разбираются в указанном порядке (т. е. их можно покрасить в обратном порядке). Нетрудно видеть, что нельзя продолжить раскраску на оставшиеся вершины $w_1$, $w_2$, $w_1'$, $w_2'$ только тогда, когда цвет 1 присутствовал среди разрешённых на каждой из них.

В этом случае покрасим $w_1$ отлично от цветов, имеющихся на вершине $w_2$, и покрасим в этот же цвет вершину $u_1$ (последнее возможно, так как на вершине $u_1$ нет цвета 1). Теперь снова оказываемся в ситуации леммы 2, поскольку вершины $u_1'$, $u$, $w$, $w_1'$ и $w_2'$ имеют 2, 3, 3, 2, 2 разрешённых цвета соответственно. Лемма 7 доказана.

**Лемма 8.** *В $G$ нет $(5,2,2)$-вершин, имеющих общую 2-цепь.*

Доказательство. Пусть $u$ и $w$ — такие (5,2,2)-вершины. Рассмотрим 2-дистанционную раскраску графа $G - w$ и обесцветим внутренние вершины конфигурации. Вершины $u_1'$ и $w_1'$ имеют по два разрешённых цвета, поэтому их можно покрасить в разные цвета. Без ограничения общности предположим, что $c(u_1') = 1$, $c(w_1') = 2$. Теперь полагаем $c(v_1') = 2$ и $c(v_2') = 1$.

Заметим, что внутренние вершины 5-цепи $uu_1u_2u_3u_4u_5$ не разбираются только тогда, когда на вершине $u_4$ разрешёнными являются именно цвета 1 и 2, разрешёнными на $u_3$ являются цвета 1, 2, 4, а на $u$ — цвета 1, 2, 3 (с точностью до перестановки цветов 3 и 4). В этом случае будем говорить, что вершины $u_1'$, $v_1'$, $u_4$, $u_3$ и $u$ имеют *плохую предраскраску*.

Действительно, пусть цвет 1 отсутствует среди разрешённых на вершине $u_4$. Полагая $c(u_2) = 1$, видим, что вершины $u_4$, $u_3$, $u_1$ и $u$ разбираются в указанном порядке. Из симметрии следует, что на $u_4$ разрешёнными являются цвета 1 и 2. Предположим без ограничения общности, что $c(u) = 3$. Если цвет 3 присутствует среди разрешённых цветов

вершины $u_3$, то, положив $c(u_3) = 3$, красим вершины $u_1$, $u_2$, $u_4$ в этом порядке. Итак, хотя бы одна из пятёрок вершин $u'_1$, $v_1$, $u_4$, $u_3$, $u$ и $w'_1$, $v_2$, $w_4$, $w_3$, $w$ имеет плохую предраскраску, пусть первая. В этом случае полагаем $c(u) = 2$, $c(u_4) = 1$, а $c(u_3) = 2$, тогда вершины $u_2$, $u_1$ и $v_1$ разбираются в этом порядке. Остаётся раскрасить вторую пятёрку. Если предраскраска её вершин не являлась плохой, то раскраску можно продолжить на оставшиеся вершины. Значит (напомним, что $c(v_2) = 1$, $c(w'_1) = 2$), вершины $w_4$, $w_3$ и $w$ имеют в качестве разрешённых цветов $\{1, 2\}$, $\{1, 2, y\}$ и $\{1, 2, x\}$ соответственно. В этом случае полагаем $c(w) = c(w_3) = 1$, $c(w'_1) = c(w_4) = 2$, а на вершинах $w_2$, $w_3$, $v_2$ остаются цвета 3 и 4, и их можно раскрасить в указанном порядке. Лемма 8 доказана.

При доказательстве последующих двух лемм будем использовать следующие обозначения и определение.

Пусть вершины $u$ и $v$ соединены цепью $uv'_1 \dots v'_k v$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, и инцидентны цепям $uu_1 \dots u_i$, $uu'_1 \dots u'_j$, $vv_1 \dots v_l$, $vv'_{k+1} \dots v'_{k+m}$, где $i \geqslant j$, $l \geqslant m$, и пусть вершины $v$ и $w$ соединены цепью $vv'_{k+1} \dots v'_{k+m} w$, а $w$ инцидентна цепям $ww_1 \dots w_n$, $ww'_1 \dots w'_s$, где $n \geqslant s$. *Внутренними* вершинами конфигурации будем считать все перечисленные вершины, кроме $u_i$, $u'_j$, $v_l$, $w_n$, $w'_s$ (рис. 2). Далее при доказательстве рассматриваем раскраску графа $G - v$ и продолжаем её на внутренние вершины, предварительно их обесцветив.

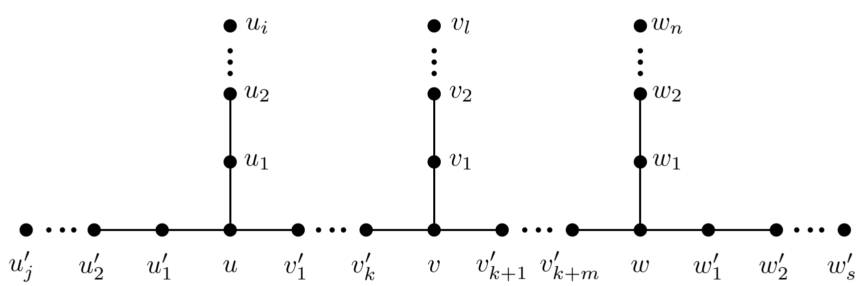


Рис. 2. Обозначения в леммах 9 и 10

**Лемма 9.** *В $G$ нет $(5, 2, 0)$-вершины, соединённой с $(5, 2, 2)$-вершиной 2-цепью и одновременно смежной с $(5, 5, 0)$-вершиной.*

Доказательство. Пусть $u$, $v$, $w$ — такие (5,5,0)-, (5,2,0)-, (5,2,2)-вершины, как на рис. 2. Покрасим вершины $u_3$, $u'_3$ и $v_3$ отлично от допустимых цветов вершин $u_4$, $u'_4$ и $v_4$ соответственно и разберём вершины $u_4$, $u_2$, $u'_4$, $u'_2$, $v_4$, $v_2$. Теперь вершины $u_1$, $u'_1$ и $v_1$ имеют по три допусти-

мых цвета, а остальные вершины имеют исходное количество допустимых цветов.

Покрасим $v$ отлично от цветов, оставшихся на $u_1$. Теперь вершины $u_1$, $u_1'$, $u$, $v_1$, $v_1'$ разбираются, а вершины $v_2'$ и $w$ имеют по три допустимых цвета. Раскраску можно продолжить на оставшиеся вершины, поскольку по числу допустимых цветов на каждой ещё не окрашенной вершине мы оказались в ситуации, несколько лучшей, чем случай (5,3,2)-вершины, (нет вершины с двумя допустимыми цветами, смежной с $v_2'$), которая сводима согласно лемме 3(iii)). Лемма 9 доказана.

**Лемма 10.** *В $G$ нет $(5,2,1)$-вершины, соединённой 1-цепью с $(4,3,1)$-вершиной и 2-цепью с $(5,2,2)$-вершиной одновременно.*

Доказательство. Пусть $u$, $v$, $w$ — (4,3,1)-, (5,2,1)-, (5,2,2)-вершины соответственно. Положим $c(u_3) = c(u)$, тогда вершины $u_1$ и $u_2$ разбираются. Покрасим сначала вершину $u_2'$, а затем — $u_1'$. Теперь вершина $v_1'$ имеет два разрешённых цвета, а вершина $v$ — три, и оказываемся в ситуации леммы 8. Лемма 10 доказана.

**1.2. Завершение доказательства.** Используем следующие правила перераспределения зарядов.

R1. Каждая 2-вершина получает заряд 1 от каждого конца инцидентной ей $k$-цепи.

R2. Каждая (5,5,0)-вершина получает заряд 3/2 от смежной с ней 3-вершины.

R3. Каждая (5,4,0)-вершина получает заряд 1/2 от смежной с ней 3-вершины.

R4. Каждая (4,4,1)- и (5,3,1)-вершина получает заряд 1/2 от другого конца инцидентной ей 1-цепи.

R5. Каждая (5,2,2)-вершина получает заряд 1/4 от другого конца каждой инцидентной ей 2-цепи.

Отметим, что 3-вершина отдаёт заряд $k$ вдоль каждой инцидентной $k$-цепи по R1 и правила R2–R5 корректны ввиду лемм 5–8 соответственно.

Убедимся, что после перераспределения зарядов $\mu^*(v) \geqslant 0$ для любой $v \in V(G)$, что будет противоречить (2) и завершит наше доказательство.

Пусть сначала $d(v) = 2$. Имеем $\mu^*(v) = -2 + 2 = 0$ согласно правилу R1. Рассмотрим случай $d(v) = 3$. Напомним, что $\mu(v) = 8\frac{1}{2}$. Заметим, что после применения правила R1 с учётом лемм 3 и 4 заряд (5,5,0)-вершины становится равным $-3/2$, вершины (5,4,0), (5,3,1), (4,4,1)

и (5,2,2) имеют заряд $-1/2$, а заряды остальных вершин неотрицательны.

После применения правил R2–R5 $\mu^*(v) = 0$ для перечисленных вершин. Остаётся убедиться, что заряды всех остальных вершин по-прежнему неотрицательны.

Если $v$ инцидентна двум 0-цепям, то $\mu^*(v) \geqslant 8\frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{2} - 5 > 0$ согласно R1–R3 и лемме 3. Пусть $v$ инцидентна одной 0-цепи, тогда $v$ может отдавать смежной 3-вершине заряд $\leqslant \frac{3}{2}$ по R2–R3. Если $v$ участвует в R3, то $\mu^*(v) \geqslant 8\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 8 = 0$ согласно лемме 6. Если $v$ отдаёт заряд $\frac{3}{2}$ по 0-цепи, то по двум другим инцидентным ей цепям от $v$ уходит заряд не более 7 благодаря леммам 7 и 9, откуда $\mu^*(v) \geqslant 8\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 7 = 0$.

Если $v$ инцидентна 1-цепи и отдаёт $1 + \frac{1}{2}$ по R0 и R4, то по двум другим инцидентным цепям $v$ не может отдавать более 7 по леммам 10 и 5. Если $v$ инцидентна 2-цепи, по которой отдаёт $2 + \frac{1}{4}$ согласно R0 и R5, то по двум другим инцидентным $v$ цепям уходит суммарный заряд не более 6 ввиду леммы 10. Таким образом, $\mu^*(v) \geqslant 0$ для любой вершины $v \in V$, что противоречит (2). Теорема 3 доказана.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за тщательную проверку доказательства и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.** Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звёзд // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 15–39.
2. **Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.** Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 9–33.
3. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. — 2004. — № 1. — С. 76–90. (http://semr.math.nsc.ru/)
4. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 32–47.
5. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** Достаточные условия минимальной 2-дистанционной раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Сиб. электрон. мат. изв. — 2006. — № 3. — С. 441–450. (http://semr.math.nsc.ru)
6. **Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.** Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta + 1)$-рас-

крашиваемости плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. — 2004. — № 1. — С. 129–141. (http://semr.math.nsc.ru)

7. **Иванова А. О.** Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска плоских графов с обхватом не менее 7 // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 5. — С. 22–36.
8. **Иванова А. О., Соловьева А. С.** 2-Дистанционная $(\Delta+2)$-раскраска разреженных плоских графов с $\Delta = 3$ // Мат. заметки ЯГУ. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 32–41.
9. **Agnarsson G., Halldorsson M. M.** Coloring powers of planar graphs // Proc. 11th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms (San Francisco, CA, 2000). — New York: ACM Press, 2000. — P. 654–662.
10. **Agnarsson G., Halldorsson M. M.** Coloring powers of planar graphs // SIAM J. Discrete Math. — 2003. — Vol. 16, N 4. — P. 651–662.
11. **Borodin O. V., Ivanova A. O.** 2-Distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six and $\Delta \geqslant 18$ // Discrete Math. — 2009. — Vol. 309. — P. 6496–6502.
12. **Borodin O. V., Ivanova A. O.** List 2-distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six // Europ. J. Combin. — 2009. — Vol. 30. — P. 1257–1262.
13. **Dvořák Z., Kràl D., Nejedlŷ P., Škrekovski R.** Coloring squares of planar graphs with girth six // Europ. J. Combin. — 2008. — Vol. 29, N 4. — P. 838–849.
14. **Dvořák Z., Škrekovski R., Tancer M.** List-coloring squares of sparse subcubic graphs // SIAM J. Discrete Math. — 2008. — Vol. 22, N 1. — P. 139–159.
15. **Havet F.** Choosability of square of planar subcubic graphs with large girth // Discrete Math. — 2009. — Vol. 309. — P. 3353–3563.
16. **Jensen T., Toft B.** Graph coloring problems. Wiley-interscience series on discrete mathematics and optimization. A Wiley-interscience publication. — New York: John Willey & Sons, 1995. — XXII+295 p.
17. **Molloy M., Salavatipour M. R.** Frequency channel assignment on planar networks // Proc. ESA'02. — London: Springer-Verl., 2002. — P. 736–747. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2461.)
18. **Molloy M., Salavatipour M. R.** A bound on the chromatic number of the square of a planar graph // J. Combin. Theory. Ser. B. — 2005. — Vol. 94. — P. 189–213.
19. **Montassier M., Raspaud A.** A note on 2-facial coloring of plane graphs // Inform. Process. Lett. — 2006. — Vol. 98, N 6. — P. 235–241.
20. **Wegner G.** Graphs with given diameter and a coloring problem // Technical Report. — Dortmund: University of Dortmund, 1977.

*Бородин Олег Вениаминович,*
e-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

*Иванова Анна Олеговна,*
e-mail: shmgnanna@mail.ru

Статья поступила
14 октября 2010 г.