ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2011. Том 18, № 2. С. 41–50

УДК 519.8

ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО ОПТИМУМА ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ РИСКОВ СЭВИДЖА

В. А. Емеличев, В. В. Коротков

Аннотация. Рассматривается лексикографическая булева задача формирования портфеля активов инвестора, минимизирующего максимальные риски, т. е. использующего критерии «узкого места» (крайнего пессимизма) Сэвиджа. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума задачи в случае, когда в пространстве портфелей задана октаэдральная метрика l_1, а в критериальном пространстве рисков и в пространстве состояний финансового рынка — чебышёвская метрика l_∞.

Ключевые слова: векторная булева задача, портфельная оптимизация, минимаксная задача, лексикографический оптимум, критерий риска Сэвиджа, возмущающая матрица, радиус устойчивости.

Введение

Изучению количественных характеристик различных понятий устойчивости решений скалярных и векторных задач дискретной оптимизации посвящён ряд публикаций (см., например, библиографию в [6]). Как правило, в этих работах исследование устойчивости ведётся в предположении, что во всех пространствах изменяющихся параметров задачи задана одна и та же чебышёвская метрика (l_∞). С иными метриками количественные характеристики устойчивости получены в основном для дискретных оптимизационных задач с линейными критериями [1, 2, 5, 8, 10]. Настоящая статья продолжает начатые в [3, 4, 6, 9] исследования устойчивости лексикографических оптимумов дискретных задач с различными видами векторных критериев. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной задачи портфельной оптимизации с минимаксными критериями риска Сэвиджа в случае, когда в пространстве портфелей задана октаэдральная метрика l_1, а в критериальном пространстве рисков и в пространстве состояний финансового рынка — чебышёвская метрика l_∞.

1. Определения и свойства

Рассматриваемая здесь математическая модель инвестиционного анализа основана на классической портфельной теории Марковица [11]. Предполагается, что основной целью инвестора при выборе портфеля активов является безопасность вложения денежных средств (минимизация рисков) при фиксированном ожидаемом уровне дохода. Такая постановка приводит к векторной задаче булева программирования с критериями рисков Сэвиджа [12]. Для формальной постановки задачи введём следующие обозначения:

$N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — активы (акции, облигации предприятий, недвижимость и т. п.);

N_m — возможные состояния (ситуации) финансового рынка;

N_s — риски (финансовые, имущественные, производственные и т. п.);

R — трёхиндексная матрица рисков (упущенных возможностей) размера $m \times n \times s$ с элементами r_{ijk} из $\mathbb{R}$;

r_{ijk} — величина риска, которому подвергается инвестор, выбирая актив $j \in N_n$ по критерию (виду риска) $k \in N_s$ в том случае, когда финансовый рынок находится в состоянии $i \in N_m$;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbb{E}^n$ — портфель активов инвестора (инвестиционный портфель), где $|X| > 1$, $\mathbb{E}^n = \{0, 1\}^n$ — множество вершин единичного n-мерного куба,

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если инвестор выбирает актив } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наряду с трёхиндексной матрицей $R = [r_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ будем использовать и её двумерное сечение $R_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in N_s$. Предполагается, что каждый портфель x инвестора из заданного набора X обеспечивает ему ожидаемый суммарный доход и не превышает имеющегося у него капитала.

Пусть на множестве портфелей (булевых векторов) X задана вектор-функция

$$f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), \dots, f_s(x, R_s))$$

с *критериями* минимаксного *риска* (крайнего пессимизма) *Сэвиджа*

$$f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} R_{ik} x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \to \min_{x \in X}, \qquad k \in N_s,$$

где $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, \dots, r_{ink})$ — i-я строка сечения R_k $(i \in N_m)$.

Таким образом, критерий «узкого места» (bottleneck) Сэвиджа рекомендует в условиях неопределённости состояния финансового рынка выбирать тот портфель, при котором величина суммарного риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, а именно, когда риск максимален.

Под *векторной (s-критериальной) задачей портфельной оптимизации* $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, будем понимать задачу поиска множества лексикографических оптимумов, которое, как известно [3, 4, 6, 9], задаётся формулой

$$L^s(R) = \{x \in X \mid \nexists x' \in X \ (x \underset{R}{\succ} x')\},$$

где

$$x \underset{R}{\succ} x' \Leftrightarrow \exists p \in N_s \ \ (g_p(x, x', R_p) > 0 \,\&\, p = \min\{k \in N_s \mid g_k(x, x', R_k) \neq 0\}),$$

$$g_k(x, x', R_k) = f_k(x, R_k) - f_k(x', R_k) = \min_{i' \in N_m} \ \max_{i \in N_m} \ (R_{ik}x - R_{i'k}x'), \ \ k \in N_s.$$

Как уже отмечалось в [6], множество $L^s(R)$ является непустым подмножеством множества Парето при любой матрице $R \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$. Кроме того, $L^s(R)$ может быть получено в результате решения последовательности s скалярных задач, начиная с первого критерия $f_1(x, R_1)$. Поэтому задачу $Z^s(R)$ иногда называют *задачей последовательной минимизации.*

Заметим, что задача $Z^s(R)$, так же как и задача, рассмотренная в [6], является минимаксной задачей с распадающимися переменными.

Очевидны следующие свойства.

Свойство 1. *Если для портфеля $x^0 \in X$ справедлива формула*

$$\forall x \in X \setminus \{x^0\} \ (g_1(x, x^0, R_1) > 0),$$

то $x^0 \in L^s(R)$.

Свойство 2. *Если для портфеля $x \in X$ верна формула*

$$\exists x' \in X \setminus \{x\} \ (g_1(x, x', R_1) > 0),$$

то $x \notin L^s(R)$.

В пространстве портфелей $\mathbb{R}^n$ зададим октаэдральную метрику l_1, а в пространствах состояний $\mathbb{R}^m$ и рисков $\mathbb{R}^s$ — чебышёвскую метрику l_∞, т. е. положим

$$\|R_{ik}\|_1 = \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|, \quad i \in N_m, \ k \in N_s,$$

$$\|R_k\|_\infty = \max_{i\in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \max_{i\in N_m} \sum_{j\in N_n} |r_{ijk}|, \quad k \in N_s,$$

$$\|R\|_\infty = \max_{k\in N_s} \|R_k\|_\infty = \max_{k\in N_s} \max_{i\in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \max_{k\in N_s} \max_{i\in N_m} \sum_{j\in N_n} |r_{ijk}|.$$

Очевидны неравенства

$$\|R_{ik}\|_1 \leqslant \|R_k\|_\infty \leqslant \|R\|_\infty, \quad i \in N_m,\ k \in N_s,$$

а для любых портфелей x^0 и x справедливы соотношения

$$R_{ik}x - R_{i^0k}x^0 \geqslant -\|R_{ik}\|_1 - \|R_{i^0k}\|_1 \geqslant -2\|R_k\|_\infty, \quad i, i^0 \in N_m,\ k \in N_s. \quad (1)$$

По аналогии с [3, 9] *радиусом устойчивости* портфеля $x^0 \in L^s(R)$ назовём число

$$\rho^s(x^0, R) = \begin{cases} \sup\ \Xi, & \text{если}\ \ \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если}\ \ \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 \mid \forall R' \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \in L^s(R + R'))\}$, $\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s} \mid \|R'\|_\infty < \varepsilon\}$. Множество $\Omega(\varepsilon)$ будем называть множеством *возмущающих матриц*.

2. Оценки радиуса устойчивости

Положим

$$\varphi = \min_{x\in X\setminus\{x^0\}} \ \min_{i^0\in N_m} \max_{i\in N_m} (R_{i1}x - R_{i^01}x^0).$$

Очевидно, что $\varphi \geqslant 0$ при $x^0 \in L^s(R)$.

Теорема 1. *Для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, R)$, $s \geqslant 1$, любого лексикографического оптимума x^0 задачи $Z^s(R)$ справедливы оценки*

$$\varphi/2 \leqslant \rho^s(x^0, R) \leqslant \varphi.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in L^s(R)$. Покажем, что справедливо неравенство $\rho^s(x^0, R) \geqslant \varphi/2$. Оно очевидно при $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ для любого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$ выполняется неравенство

$$\min_{i^0\in N_m} \max_{i\in N_m} (R_{i1}x - R_{i^01}x^0) \geqslant \varphi. \quad (2)$$

Используя (1), убеждаемся, что для любой матрицы $R' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ верны соотношения

$$g_1(x, x^0, R_1 + R'_1) = \max_{i\in N_m}(R_{i1} + R'_{i1})x - \max_{i\in N_m}(R_{i1} + R'_{i1})x^0$$
$$= \min_{i^0\in N_m}\max_{i\in N_m}(R_{i1}x - R_{i^01}x^0 + R'_{i1}x - R'_{i^01}x^0)$$
$$\geqslant \min_{i^0\in N_m}\max_{i\in N_m}(R_{i1}x - R_{i^01}x^0) - 2\|R'_1\|_\infty.$$

Отсюда, полагая, что $R' \in \Omega(\varphi/2)$, и учитывая (2), получаем

$$g_1(x, x^0, R_1 + R'_1) \geqslant \varphi - 2\|R'_1\|_\infty \geqslant \varphi - 2\|R'\|_\infty > 0.$$

Поэтому по свойству 1 $x^0 \in L^s(R+R')$ при любой возмущающей матрице $R' \in \Omega(\varphi/2)$. Следовательно, $\rho^s(x^0, R) \geqslant \varphi/2$.

Далее, покажем, что $\rho^s(x^0, R) \leqslant \varphi$. Согласно определению числа φ существует такой портфель $\widehat{x} \in X \setminus \{x^0\}$, что

$$g_1(\widehat{x}, x^0, R_1) = \varphi. \tag{3}$$

Так как $\widehat{x} \neq x^0$, найдётся такой индекс $q \in N_n$, что $\widehat{x}_q \neq x^0_q$. Полагая $\varepsilon > \varphi$, элементы сечения R^0_1 возмущающей матрицы $R^0 = \left[r^0_{ijk}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ зададим по правилу

$$r^0_{ij1} = \begin{cases} -\delta\ (\widehat{x}_j - x^0_j), & \text{если } i \in N_m,\ j = q, \\ \ 0, & \text{если } i \in N_m,\ j \in N_n \setminus \{q\}, \end{cases}$$

где $\varphi < \delta < \varepsilon$. Все элементы остальных сечений R^0_k, $k \in N_s \setminus \{1\}$, возмущающей матрицы R^0 положим равными нулю. Тогда $\|R^0\|_\infty = \left\|R^0_1\right\|_\infty = \left\|R^0_{i1}\right\|_1 = \delta$ при $i \in N_m$. Кроме того, все строки R^0_{i1}, $i \in N_m$, сечения R^0_1 одинаковы. Поэтому, обозначив такую строку через B (зависит только от x^0 и $\widehat{x}$), имеем

$$B(\widehat{x} - x^0) = -\delta, \quad \|B\|_1 = \delta,$$

и ввиду (3) получаем

$$g_1\big(\widehat{x}, x^0, R_1 + R^0_1\big) = \max_{i\in N_m}(R_{i1} + B)\widehat{x} - \max_{i\in N_m}(R_{i1} + B)x^0$$
$$= g_1(\widehat{x}, x^0, R_1) + B(\widehat{x} - x^0) = \varphi - \delta < 0.$$

Отсюда $x^0 \notin L^s(R + R^0)$ согласно свойству 2. Тогда $\rho^s(x^0, R) \leqslant \varphi$. Теорема 1 доказана.

3. Следствия

Лексикографический оптимум x^0 называется *устойчивым*, если

$$\rho^s(x^0, R) > 0.$$

Следствие 1. *Лексикографический оптимум x^0 задачи $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, устойчив тогда и только тогда, когда $f_1(x^0, R_1) < f_1(x, R_1)$ при любом портфеле $x \in X \setminus \{x^0\}$.*

Покажем, что нижняя оценка $\varphi/2$, указанная теоремой 1, достижима.

Следствие 2. *При $\varphi > 0$ существует такой класс задач $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, что для портфеля $x^0 \in L^s(R)$ справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, R) = \varphi/2.$$

Доказательство. Для доказательства равенства $\rho^s(x^0, R) = \varphi/2$, где $\varphi > 0$, согласно теореме 1 достаточно выделить класс задач, для которых $\rho^s(x^0, R) \leqslant \varphi/2$. Дальнейшее изложение и посвящено этому.

Как уже отмечалось выше, всегда найдётся портфель $\widehat{x} \in X \setminus \{x^0\}$ такой, что выполняется равенство (3). Будем предполагать, что существуют два таких индекса $q \neq l$ из множества N_n, что $\widehat{x}_q > x^0_q$, $\widehat{x}_l < x^0_l$, т. е. выполняются равенства $\widehat{x}_q = x^0_l = 1$, $\widehat{x}_l = x^0_q = 0$.

Введём обозначения

$$i(x^0) = \arg\max\{R_{i1}x^0 \mid i \in N_m\}, \quad i(\widehat{x}) = \arg\max\{R_{i1}\widehat{x} \mid i \in N_m\}$$

и будем полагать, что имеет место неравенство

$$(R_{i(\widehat{x})1} - R_{i(x^0)1})\widehat{x} > \varphi/2, \tag{4}$$

которое влечёт неравенство $i(\widehat{x}) \neq i(x^0)$, поскольку $\varphi > 0$.

Для всякого числа $\varepsilon > \varphi/2$ введём сечение $R^0_1 = \left[r^0_{ij1}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ возмущающей матрицы $R^0 = \left[r^0_{ijk}\right] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$, где

$$r^0_{ij1} = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = i(x^0),\ j = l, \\ -\delta, & \text{если } i \in N_m \setminus \{i(x^0)\},\ j = q, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi/2 < \delta < \min\{\varepsilon, (R_{i(\widehat{x})1} - R_{i(x^0)1})\widehat{x}\}, \tag{6}$$

а все элементы остальных сечений R^0_k, $k \in N_s\setminus\{1\}$, возмущающей матрицы R^0 положим равными нулю. Заметим, что неравенства (6) корректны благодаря (4).

В силу такого строения возмущающей матрицы R^0 имеем

$$R^0_{i(x^0)1}x^0 = \delta, \tag{7}$$

$$R^0_{i1}x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}, \tag{8}$$

$$R^0_{i1}\widehat{x} = -\delta, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}, \tag{9}$$

$$R^0_{i(x^0)1}\widehat{x} = 0, \tag{10}$$

$$\|R^0_1\|_\infty = \|R^0\|_\infty = \delta, \quad R^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Далее докажем, что $g_1\big(\widehat{x}, x^0, R_1 + R^0_1\big) < 0$. Из (7) и (8) найдём, что

$$\begin{aligned} f_1\big(x^0, R_1 + R^0_1\big) &= \max\big\{(R_{i(x^0)1} + R^0_{i(x^0)1})x^0,\ \max_{i \neq i(x^0)} \big(R_{i1} + R^0_{i1}\big)x^0\big\} \\ &= \max\big\{f_1(x^0, R_1) + \delta,\ \max_{i \neq i(x^0)} R_{i1}x^0\big\} = f_1(x^0, R_1) + \delta. \end{aligned} \tag{11}$$

Покажем, что выполняется равенство

$$f_1\big(\widehat{x}, R_1 + R^0_1\big) = f_1(\widehat{x}, R_1) - \delta. \tag{12}$$

Легко видеть, что из (9) и неравенства $i(\widehat{x}) \neq i(x^0)$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} f_1\big(\widehat{x}, R_1 + R^0_1\big) &= \max\big\{\big(R_{i(\widehat{x})1} + R^0_{i(\widehat{x})1}\big)\widehat{x},\ \max_{i \neq i(\widehat{x})} \big(R_{i1} + R^0_{i1}\big)\widehat{x}\big\} \\ &= \max\big\{(f_1(\widehat{x}, R_1) - \delta),\ \max_{i \neq i(\widehat{x})} \big(R_{i1} + R^0_{i1}\big)\widehat{x}\big\}. \end{aligned}$$

Поэтому с учётом очевидных ввиду (9) неравенств

$$f_1(\widehat{x}, R_1) - \delta \geqslant \big(R_{i1} + R^0_{i1}\big)\widehat{x}, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\},$$

для доказательства равенства (12) остаётся убедиться, что

$$f_1(\widehat{x}, R_1) - \delta \geqslant \big(R_{i(x^0)1} + R^0_{i(x^0)1}\big)\widehat{x}.$$

Для этого, воспользовавшись (6) и (10), выводим

$$f_1(\widehat{x}, R_1) - \delta - \big(R_{i(x^0)1} + R^0_{i(x^0)1}\big)\widehat{x} = (R_{i(\widehat{x})1} - R_{i(x^0)1})\widehat{x} - \delta > 0.$$

Наконец, последовательно применяя (11), (12), (3) и (6), получаем необходимое неравенство

$$g_1\big(\widehat{x}, x^0, R_1 + R^0_1\big) = g_1(\widehat{x}, x^0, R_1) - 2\delta = \varphi - 2\delta < 0.$$

Отсюда и из свойства 2 следует, что

$$\forall\, \varepsilon > \varphi/2 \;\; \exists\, R^0 \in \Omega(\varepsilon) \;\; (x^0 \notin L^s(R + R^0)).$$

Значит, $\rho^s(x^0, R) \leqslant \varphi/2$. Следствие 2 доказано.

Приведём числовой пример, иллюстрирующий следствие 2.

Пример. Пусть $m = 3$, $n = 3$, $s = 1$; $X = \{x^0, \widehat{x}\}$, $x^0 = (1,1,0)^T$, $\widehat{x} = (0,1,1)^T$, R_i, $i \in N_3$, — строки матрицы

$$R = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x^0, R) = 0$, $f(\widehat{x}, R) = 4$, т. е. x^0 — оптимальный портфель скалярной задачи $Z^1(R)$. Поэтому $\varphi/2 = 2$. Кроме того, $q = 3$, $l = 1$, $i(x^0) = 2 \neq 1 = i(\widehat{x})$, т. е. выполняется необходимое неравенство (4), которое в нашем случае принимает вид

$$(R_1 - R_2)\widehat{x} = 3 > \varphi/2.$$

При возмущающей матрице

$$R^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}, \quad 2 < \delta < 3,$$

построенной по правилу (5), имеем $\|R^0\|_\infty = \delta$ и

$$f(x^0, R + R^0) = \delta > 4 - \delta = f(\widehat{x}, R + R^0).$$

Поэтому $x^0 \notin L^1(R + R^0)$. Следовательно, $\rho^1(x^0, R) \leqslant 2$, т. е. $\rho^1(x^0, R) = 2 = \varphi/2$ в силу теоремы 1.

Верхняя оценка φ радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, R)$ лексикографического оптимума x^0 также является достижимой. Действительно, пусть $m = 1$. Тогда задача портфельной оптимизации $Z^s(R)$ превращается в векторную (s-критериальную) задачу булева программирования с линейными критериями

$$R_k x \to \min_{x \in X}, \quad k \in N_s, \;\; s \geqslant 1, \tag{13}$$

а верхняя оценка, указанная теоремой 1, принимает вид

$$\rho^s(x^0, R) \leqslant \varphi = \min\{R_1(x - x^0) \mid x \in X \setminus \{x^0\}\}. \tag{14}$$

Здесь $X \subseteq \mathbb{E}^n$ — множество решений, R_k — k-я строка матрицы $R \in \mathbb{R}^{s \times n}$, x^0 — лексикографический оптимум задачи (13). Как известно [3], правая часть соотношения (14) является выражением для радиуса устойчивости этого оптимума x^0 в случае, когда в пространстве решений $\mathbb{R}^n$ задана метрика l_1, а в критериальном пространстве $\mathbb{R}^s$ — метрика l_∞. Поэтому при $m = 1$ имеем $\rho^s(x^0, R) = \varphi$. Таким образом, справедливо

Следствие 3. *Верхняя оценка φ радиуса устойчивости лексикографического оптимума задачи $Z^s(R)$, $s \geqslant 1$, достижима при $m = 1$.*

В заключение отметим, что ранее в [7] анонсированы аналогичные оценки (снизу и сверху) радиуса квазиустойчивости векторной задачи портфельной оптимизации $Z^s(R)$, состоящей в поиске множества Парето, в случае, когда во всех пространствах $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^s$ задана одна и та же чебышёвская метрика l_∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гордеев Э. Н.** Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и систем. анализ. — 2001. — № 2. — С. 132–144.
2. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 66–72.
3. **Гуревский Е. Е., Емеличев В. А.** Мера устойчивости лексикографического оптимума векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае нормы Гёльдера // Вестн. БГУ. — 2007. — Сер. 1, № 1. — С. 111–113.
4. **Гуревский Е. Е., Емеличев В. А.** О пяти типах устойчивости лексикографического варианта комбинаторной задачи на узкие места // Дискрет. математика. — 2009. — Т. 21, вып. 3. — С. 3–13.
5. **Емеличев В. А., Карелкина О. В.** Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гёльдера // Дискрет. математика. — 2009. — Т. 21, вып. 2. — С. 43–50.
6. **Емеличев В. А., Карпук А. В., Кузьмин К. Г.** О квазиустойчивости лексикографической минимаксной комбинаторной задачи с распадающимися переменными // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 32–45.
7. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** О радиусе квазиустойчивости векторной булевой задачи с критериями Сэвиджа // Всерос. конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Алтай, 27 июня–3 июля 2010 г.): Материалы конференции . — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. — С. 113.

8. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 79–83.
9. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости лексикографического оптимума одной векторной задачи булева программирования // Кибернетика и систем. анализ. — 2005. — № 2. — С. 71–81.
10. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и систем. анализ. — 2010. — № 1. — С. 82–89.
11. **Markowitz H. M.** Portfolio selection: efficient diversification of investments. — Oxford: Blackwell Publ., 1991. — 310 p.
12. **Savage L. J.** The foundations of statistics. — New York: Dover Publ., 1972. — 384 p.

Емеличев Владимир Алексеевич,
e-mail: emelichev@bsu.by, emelichev@tut.by

Коротков Владимир Владимирович,
e-mail: wladko@tut.by

Статья поступила
13 сентября 2010 г.