ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2011. Том 18, № 2. С. 64–74

УДК 519.6

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ ПОКРЫТИЯ С УПОРЯДОЧЕННЫМ ОХВАТЫВАНИЕМ ДЛЯ ПЛОСКИХ ГРАФОВ *)

Т. А. Панюкова

Аннотация. Одним из критериев оптимальности последовательности цепей с упорядоченным охватыванием является суммарная длина участков маршрута между концом текущей цепи и началом следующей. Известен алгоритм построения покрытия, не учитывающий этот критерий. В статье предлагается алгоритм нахождения эйлерова покрытия с упорядоченным охватыванием, дающий минимальное значение указанного критерия.

Ключевые слова: плоский граф, цепь, покрытие, маршрут, упорядоченное охватывание.

Введение

Многие задачи нахождения маршрутов, удовлетворяющих определёнными ограничениям, появились из конкретных практических ситуаций. В задачах раскроя листового материала плоский граф является моделью раскройного плана, а маршрут, покрывающий все рёбра, определяет траекторию режущего инструмента. При этом требуется, чтобы отрезанная от листа часть не требовала дополнительных разрезаний.

Моделью раскройного листа будем считать плоскость S, моделью раскройного плана — плоский граф G с внешней гранью f_0 на плоскости S. Для любой части графа $J \subseteq G$ (части траектории движения режущего инструмента) обозначим через $\mathrm{Int}\,(J)$ теоретико-множественное объединение его внутренних граней (объединение всех связных компонент множества $S \setminus J$, не содержащих внешней грани). Тогда $\mathrm{Int}(J)$ можно интерпретировать как отрезанную от листа часть. Множества вершин, рёбер и граней графа J будем обозначать через $V(J)$, $E(J)$ и $F(J)$ соответственно, а число элементов множества M — через $|M|$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–07–96002–р_урал_а).

Будем любой маршрут в графе G рассматривать как часть графа, содержащую все вершины и рёбра, принадлежащие маршруту. Это позволит формализовать требование к маршруту режущего инструмента как условие отсутствия пересечения внутренних граней любой начальной части маршрута в заданном плоском графе G с рёбрами его оставшейся части [8]. Такие маршруты будем называть *маршрутами с упорядоченным охватыванием* [10].

Если представлению раскройного плана соответствует плоский эйлеров граф G, то оно может быть нарисовано без холостых проходов [9]. Если соответствующий граф G не является эйлеровым и содержит $2k$ вершин нечётной степени, то с помощью алгоритма Листинга — Люка [6, 7] возможно покрытие графа k рёберно непересекающимися цепями. Алгоритм построения покрытия, удовлетворяющего ограничению упорядоченности охватывания, предложен в [3]. Маршруты, реализующие построенное покрытие, содержат дополнительные участки между концом текущей цепи и началом следующей. Однако указанные выше алгоритмы не учитывают длину таких участков, хотя в практических задачах актуальным является сокращение их длины.

В нашей статье рассматриваются вопросы построения последовательности цепей с упорядоченным охватыванием и минимальной длиной дополнительных построений.

Для сохранения целостности статьи приведём основные определения и доказанные ранее свойства эйлеровых покрытий плоского графа последовательностью цепей с упорядоченным охватыванием.

1. Представление плоского графа

Топологическое представление плоского графа $G = (V, E)$ на S однозначно с точностью до гомеоморфизма определяется заданием для каждого ребра $e \in E$ следующих функций [8]:

1) $v_1(e)$, $v_2(e)$ — вершины, инцидентные ребру e;

2) $f_k(e)$ — грань, находящаяся слева при движении по ребру e от вершины $v_k(e)$ к вершине $v_{3-k}(e)$, $k = 1, 2$;

3) $l_k(e)$ — ребро, принадлежащее грани $f_k(e)$ и инцидентное вершине $v_k(e)$, $k = 1, 2$.

Иллюстрация введённых функций дана на рис. 1. Их построение не составляет проблем. Фактически они определяются и используются ещё на этапе проектирования графа G. Пространственная сложность такого представления равна $O(|E| \cdot \log_2 |V|)$.

В соответствии с [8] будем говорить, что цепь $C = v_1e_1v_2e_2 \ldots v_k$ в плоском графе G имеет *упорядоченное охватывание*, если для любой

его начальной части $C_l = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_l$, $l \leqslant (|E|)$, выполнено условие $\mathrm{Int}\,(C_l) \cap E = \varnothing$.

Будем говорить, что последовательность рёберно непересекающихся цепей

$$C^0 = v^0 e_1^0 v_1^0 e_2^0 \dots e_{k_0}^0 v_{k_0}^0,\ C^1 = v^1 e_1^1 v_1^1 e_2^1 \dots e_{k_1}^1 v_{k_1}^1, \dots, \\ C^{n-1} = v^{n-1} e_1^{n-1} v_1^{n-1} e_2^{n-1} \dots e_{k_{n-1}}^{n-1} v_{k_{n-1}}^{n-1}$$

с упорядоченным охватыванием, покрывающая граф G и такая, что

$$\forall m \mid m < n \quad \left(\bigcup_{l=0}^{m-1} \mathrm{Int} C^l \right) \cap \left(\bigcup_{l=m}^{n-1} C^l \right) = \varnothing,$$

является *покрытием с упорядоченным охватыванием.*

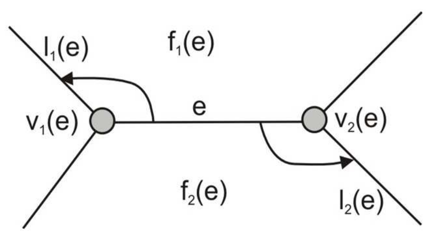

Рис.1. Представление плоского графа

Построение покрытия графа G с упорядоченным охватыванием решает поставленную задачу раскроя. Наибольший интерес представляют покрытия с минимальным числом цепей, поскольку переход от одной цепи к другой соответствует холостому проходу режущего инструмента.

Минимальную по мощности последовательность рёберно непересекающихся цепей с упорядоченным охватыванием в плоском графе G будем называть *эйлеровым покрытием с упорядоченным охватыванием.*

Существование эйлеровых циклов с упорядоченным охватыванием в плоских эйлеровых графах доказано в [8, 9]. Рекурсивные алгоритмы построения таких циклов представлены в [1, 8]. Проблема построения маршрута с упорядоченным охватыванием в плоском графе произвольного вида рассмотрена в [2], и там же разработан алгоритм построения таких маршрутов, имеющий вычислительную сложность не более $O(|E|^2)$. В [9] предложен эффективный алгоритм построения циклов с упорядоченным охватыванием в плоских эйлеровых графах, имеющий вычислительную сложность $O(|E| \cdot \log_2 |V|)$. Покрытию плоских графов

последовательностью цепей с упорядоченным охватыванием посвящены статьи [3, 10].

Теорема существования минимального по мощности эйлерова покрытия плоского графа G и алгоритм его построения приведены в [11].

Цель настоящей статьи — изложение алгоритма построения оптимального по длине дополнительных построений покрытия произвольного плоского связного графа без висячих вершин последовательностью цепей с упорядоченным охватыванием и доказательство его результативности.

2. Построение покрытия плоского графа последовательностью цепей с упорядоченным охватыванием

В [3] доказана

Теорема 1. *Пусть плоский связный граф $G = (V, E)$, топологически представленный на плоскости S, не имеет висячих вершин. Тогда существует множество рёбер M, $(M \cap S)\backslash V = \varnothing$, такое, что $\widehat{G} = (V, E \cup M)$ — эйлеров граф, и в $\widehat{G}$ существует эйлеров цикл $C = v_1e_1v_2e_2 \dots e_nv_1$, $n = |E| + |M|$, для любой начальной части $C_l = v_1e_1v_2e_2 \dots v_l$, $l \leqslant |E| + |M|$, которого выполнено условие* $\mathrm{Int}(C_l) \cap E = \varnothing$.

Цикл, существование которого утверждает теорема, может быть построен при помощи алгоритма OrderedEnclosingCover, доказательство результативности которого приведено в [3].

Следует учесть, что $V, E \subset S$, а условие $(M \cap S)\backslash V = \varnothing$ предполагает, что в множестве вводимых рёбер M точками множества S являются только вершины, инцидентные вводимым рёбрам. Фактически множество M представляет собой дуги, инцидентные концу текущей и началу следующей цепей.

Данный алгоритм использует три процедуры: Инициализация, Упорядочение и Формирование. При описании алгоритма используется понятие уровня вложенности $\mathrm{kmark}(e)$ ребра e.

Определение 1. *Уровнем вложенности ребра e* плоского топологического графа $G(V, E)$ будем называть значение функции $\mathrm{kmark}(e)$, определяемой рекурсивно:

(i) все рёбра, инцидентные внешней грани f_0 графа $G(V, E)$, образуют множество рёбер $E_1 = \{e \in E \mid e \subset f_0,\ \mathrm{kmark}(e) = 1\}$ с уровнем вложенности 1;

(ii) в графе $G_k\left(V, E \setminus \left(\bigcup\limits_{l=1}^{k-1} E_l\right)\right)$, $k \geqslant 2$, рёбра с уровнем вложенности 1 составляют множество E_k рёбер с уровнем вложенности k в графе G, т. е. $E_k = \{e \in G \mid \mathrm{kmark}(e) = k\}$.

Уровень вложенности любого ребра плоского графа $G = (V, E)$ может быть определён за время $O(|E|)$ с помощью процедуры Упорядочение, приведённой в [3].

Положим $E_k = \{e \in E \mid \mathrm{kmark}(e) = k\}$, $E_k^* = \{e \in E \mid \mathrm{kmark}(e) \leqslant k\}$, $\overline{E}_k = E \backslash E_k^*$. Через $G(E')$ будем обозначать плоский граф, порождённый множеством рёбер $E' \subset E$.

Свойства функции $\mathrm{kmark}(e)$, построенной с помощью процедуры Упорядочение, доказаны в следующих леммах [3].

Лемма 1. *Для любого* $k = 1, 2, 3, \ldots, M = \max\limits_{e \in E} \mathrm{kmark}(e)$ *имеют место следующие включения*:

$$\mathrm{Int}(G(E_k)) \supset G(\overline{E}_k), \quad S \backslash \mathrm{Int}(G(E_k)) \supset G(E_k^*).$$

Лемма 2. *Если* $M = \max\limits_{e \in E} \mathrm{kmark}(e)$, *то* $\overline{E}_M = \varnothing$.

Пусть V_{odd} — множество вершин нечётной степени графа $G = (V, E)$. Очевидно, что сложность построения такого множества при используемом представлении графа не превосходит $O(|E|)$.

Функциональным назначением процедуры Формирование является построение цепи $C^j = v_0^j e_1^j v_1^j e_2^j \ldots e_k^j v_k^j$ с упорядоченным охватыванием от заданной вершины $v_0^j \in V$ до вершины $v^0 \in V_{\mathrm{odd}}$:

$$v_1^j, v_2^j, \ldots, v_{k-1}^j \notin V_{\mathrm{odd}}, \;\; v_k^j = v^0 \in V_{\mathrm{odd}}.$$

Каждое ребро e_i^j в цепи выбирается среди не пройденных ранее рёбер, инцидентных вершине v_i^j и имеющих максимальный уровень вложенности, т. е.

$$e_i^j = \arg\max \left\{ \mathrm{kmark}(e) \mid e \in \big(E\big(v_i^j\big) \setminus \big\{e_l^j | l < i\big\}\big) \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} E(C^s) \right\}, \qquad (1)$$

где $E\big(v_i^j\big)$ — множество рёбер, инцидентных вершине v_i^j.

Следующей за вершиной v_i^j будет вершина

$$v_{i+1}^j = v_1\big(e_i^j\big), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Если $C_l^j = v_0^j e_1^j v_1^j e_2^j v_2^j \ldots e_l^j$, $l \leqslant k$, — начальная часть цепи, содержащая первые l звеньев, то $(\forall l = 1, 2, \ldots, |E|)\,(\forall v \in V)$

$$\begin{aligned} \min \big\{\mathrm{kmark}(e) \mid \; e \in E(v) \cap E\big(C_l^j\big)\big\} \\ \geqslant \max \Big\{ \mathrm{kmark}(e) \mid e \in \big(E(v) \setminus E\big(C_l^j\big)\big) \setminus \bigcup_{s<j} E\big(C^s\big) \Big\}, \end{aligned} \qquad (2)$$

т. е. для рёбер, инцидентных вершине v, минимальный уровень вложенности пройденных рёбер цепи C^j не меньше максимального уровня вложенности ещё не пройденных рёбер.

При выборе ребра e_i^j в соответствии с (1) может возникнуть неоднозначность, которая, однако, в соответствии с (2) не повлияет на выполнение условия упорядоченного охватывания. Заметим, что в [3] дана эффективная реализация нахождения ребра e_i^j в соответствии с (1), требующая $O(1)$ операций за счёт использования линейного упорядочения рёбер, полученного на этапе Упорядочение.

Для последовательностей цепей, удовлетворяющих условиям (1) и (2), справедлива

Лемма 3. *Для любых* $j = 1, 2, \ldots, l$ *и* $m = 1, 2, \ldots, M = \max_{e \in E} \operatorname{kmark}(e)$ *имеет место равенство* $\operatorname{Int}\left(C^s \cup C_l^j\right) \cap E_m = \varnothing$.

Алгоритм OrderedEnclosingCover из [3] строит покрытие с упорядоченным охватыванием за время $O(|E|)$, но не решает задачу минимизации длины дополнительных построений.

3. Уменьшение длины дополнительных построений

В алгоритме OrderedEnclosingCover начальная вершина v^l очередной цепи выбиралась произвольным образом среди вершин максимального ранга (уровня вложенности). В [4, 12] анонсирован алгоритм GreedyOrderedEnclosing, в котором начальная вершина выбирается из ближайших вершин с максимальным рангом. Приведём этот алгоритм.

Алгоритм GreedyOrderedEnclosing

Входные данные:

плоский граф G, представленный списком рёбер с заданными на них функциями $v_k(e)$, $l_k(e)$, $f_k(e)$, $k = 1, 2$;

$L(*,*)\ :\ V_{\text{odd}}^2 \to R^+$ — расстояния между всеми парами вершин нечётной степени.

Выходные данные: C_j, $j = 1, \ldots, |V_{\text{odd}}|/2$, — покрытие графа G цепями с упорядоченным охватыванием.

Шаг 1. Инициализация. Присвоить начальные значения: определить ребро $e_0 \in E$, принадлежащее границе внешней грани f_0. Функции на ребре e_0 переопределить таким образом, чтобы $f_1(e_0) = f_0$ и ребро $l_1(e_0)$ принадлежало границе внешней грани.

Шаг 2. Упорядочение. Для каждого ребра e определить значение функции $\mathrm{kmark}(e): \ E \to N$ (процедура Упорядочение [3]).

Для каждой вершины сформировать список инцидентных рёбер. Рёбра упорядочиваются по убыванию значения $\mathrm{kmark}(e)$.

Шаг 3. Отсортировать все вершины нечётной степени по убыванию их значений $\mathrm{kmark}(v)$, где $\mathrm{kmark}(v) = \min\limits_{e|v\in e} \mathrm{kmark}(e)$; положить $s = 0$. Найти вершину $v^s = \arg\max\limits_{v\in V} \mathrm{kmark}(v)$, $V_{\mathrm{odd}} = V_{\mathrm{odd}} \setminus v^s$. Сформировать классы эквивалентности $V(k) = \{v \mid \mathrm{kmark}(v) = k\}$.

Шаг 4. Формирование. Пока список вершин нечётной степени непуст, выполнить следующие действия:

(i) с помощью процедуры Формирование [3], используя в качестве начальной вершину v^s, построить цепь

$$C^s = v^s e_1^s v_1^s e_2^s \dots e_{l_s}^s v_{l_s}^s;$$

(ii) положить $k = \mathrm{kmark}(v_{l_s})$, $V(k) = V(k) \setminus \{v_{l_s}\}$;
(iii) положить $k^* = \max\{k \mid V(k) \neq \varnothing \}$;
(iv) положить $v^{s+1} = \arg\min\limits_{u\in V(k^*)} L\big(v_{k_s}^s, u\big)$;
(v) положить $V(k^*) = V(k^*) \setminus \{v^s\}$, $s = s + 1$.

Шаг 5. Если после выполнения указанных процедур остались рёбра, не принадлежащие ни одной из цепей, выполнить процедуру Формирование [3], начиная из вершины $v_0 \in f_0$, и сформировать цепь C_j.

Алгоритм GreedyOrderedEnclosing определяет дополнительные рёбра, соединяющие конец текущей цепи и ближайшую к нему начальную вершину $v^0 \in V_{\mathrm{odd}}$ последующей цепи. Эти рёбра образуют множество M, существование которого утверждается в теореме 1. Они представляют собой некоторое паросочетание на множестве V_{odd}. Очевидно, что данный алгоритм будет строить решение не хуже, чем алгоритм OrderedEnclosingCover.

Сложность алгоритма GreedyOrderedEnclosing не превосходит величины $O(|E| + |V| \log_2 |V|)$. Здесь первое слагаемое определяет сложность алгоритма OrderedEnclosingCover, а второе — сложность сортировки вершин из V_{odd}.

4. Оптимальное покрытие плоского графа последовательностью цепей с упорядоченным охватыванием

Отметим, что в теореме 1 утверждается существование паросочетания, для которого возможно построить последовательность цепей с упорядоченным охватыванием.

В этом разделе доказан более сильный, чем теорема 1, результат, анонсированный в [5]: возможность построения последовательности цепей с упорядоченным охватыванием с любым наперёд заданным множеством M, образующим паросочетание на множестве V_{odd}.

Теорема 2. *Пусть плоский связный граф $G = (V, E)$, топологически представленный на плоскости S, не имеет висячих вершин. Для любого паросочетания M на множестве V_{odd} графа G такого, что $M \cap S \backslash V = \varnothing$, существует эйлеров цикл $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_n v_1$, $n = |E| + |M|$, для любой начальной части $C_l = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_l$, $l \leqslant |E| + |M|$, которого выполнено условие $\mathrm{Int}(C_l) \cap E = \varnothing$.*

Доказательство этой теоремы конструктивно и состоит в доказательстве результативности следующего алгоритма.

Алгоритм M-Cover

Входные данные:

(i) плоский граф G, представленный списком рёбер с заданными на них функциями $v_k(e)$, $l_k(e)$, $f_k(e)$, $k = 1, 2$;

(ii) паросочетание M на множестве вершин нечётной степени V_{odd}.

Выходные данные: C_j, $j = 1, \dots, |V_{\text{odd}}|/2$, — эйлерово покрытие графа G цепями с упорядоченным охватыванием.

Шаг 1. Выполнить процедуры Инициализация и Упорядочение (шаги 1 и 2 алгоритма OderedEnclosingCover). Положить $j = 1$. Объявить вершину $v_0 \in f_0$ текущей, положить $v_0^j = v_0$.

Шаг 2. Выполнять построение цепи C_j с помощью процедуры Формирование [3], используя вершину v_0 в качестве начальной. Пусть вершина v^0 является конечной вершиной построенной цепи. Если $v^0 \notin V_{\text{odd}}$, то перейти на шаг 6, иначе — на шаг 3.

Шаг 3. Если вершина v^0 является тупиковой, то перейти на шаг 5, иначе — на шаг 4.

Шаг 4. Если $\mathrm{kmark}(v_1) < \mathrm{kmark}(v^0)$, то положить $v_0 = v^0$ и перейти на шаг 2 (продолжить построение цепи C_j из текущей вершины).

Шаг 5. Найти v_1, $(v^0, v_1) \in M$. Закончить построение текущей цепи: $v_1^j = v^0$, $j = j + 1$, $V_{\text{odd}} = V_{\text{odd}} \setminus \{v^0, v_1\}$, $M = M \setminus \{(v^0, v_1)\}$, принять $v_0^j = v_1$ за текущую вершину следующей цепи и перейти на шаг 2 (начать построение новой цепи C_j из вершины $v_0 = v_0^j$).

Шаг 6. Останов.

Результативность шага 1 алгоритма M-Cover непосредственно следует из лемм 1 и 2.

В теле алгоритма M-Cover организована такая последовательность применения процедуры Формирование, при которой концом цепи будет либо тупиковая вершина, либо транзитная вершина, у которой напарник имеет более высокую спепень вложенности.

Для этой последовательности (построенной с помощью алгоритма M-Cover) оказывается справедливой лемма, аналогичная приведённой в [3], для последовательности, построенной алгоритмом OrderedEnclosingCover.

Лемма 4. *Для любых* $k = 1, 2, \ldots, K = \max\limits_{e \in E} \operatorname{kmark}(e)$ *и* $j = 1, 2, \ldots, |E| + |V_{\mathrm{odd}}|/2$ *имеет место равенство* $\operatorname{Int}(C_j) \cap E_k = \varnothing$, *где* C_j *— начальная часть маршрута, построенного алгоритмом* M-Cover.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по переменной k.

Поскольку рёбра множества E_1 образуют цикл, ограничивающий внешнюю грань f_0 графа G, имеет место $(\forall H \subseteq G)(E_1 \cap \operatorname{Int}(H) = \varnothing)$. Это означает, что при $k = 1$ лемма справедлива.

Покажем, что из того, что $\operatorname{Int}(C_j) \cap E_k = \varnothing$, $j = 1, 2, \ldots, l$, $k = 1, 2, \ldots, L - 1$, где $L \leqslant K$, следует

$$\operatorname{Int}(C_j) \cap E_k = \varnothing, \quad l = 1, 2, \ldots, L. \tag{3}$$

Предположим противное. Пусть $\operatorname{Int}(C_{l'}) \cap E_k \neq \varnothing$ для некоторого l'. В соответствии с леммой 1 имеем

$$\operatorname{Int}(G(E_k)) \supseteq \overline{E}_k = \{e \mid \operatorname{kmark}(e) > k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, K.$$

Из связности графа G и леммы 1 следует, что множество $\operatorname{Int}(C_{l'}) \cap E_k$ содержит ребро $e' \in E$ такое, что $v_2(e') = v \in V(C_{l'})$.

Поэтому

$$\min_{e \in E(v) \cap EC_{l'}} \operatorname{kmark}(e) < \operatorname{kmark}(e') \leqslant \max_{e \in E(v) \setminus EC_{l'}} \operatorname{kmark}(e),$$

что противоречит лемме 1. Тем самым справедливо равенство (3). По индукции получаем

$$\operatorname{Int}(C_j) \cap E_m = \varnothing, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \; k = 1, 2, \ldots, K.$$

Лемма 4 доказана.

Вычислительная сложность алгоритма M-Cover не превосходит величины $O\left(|E| \cdot \log_2 |V|\right)$.

Для построения оптимального покрытия достаточно в качестве M взять кратчайшее паросочетание на множестве V_{odd}.

Алгоритм OptimalCover

Входные данные:

плоский граф G, представленный списком рёбер с заданными на них функциями $v_k(e)$, $l_k(e)$, $f_k(e)$, $k = 1, 2$.

Выходные данные:

C_j, $j = 1, \ldots, |V_{\mathrm{odd}}|/2$, — покрытие графа G цепями с упорядоченным охватыванием.

Шаг 1. Найти кратчайшее паросочетание M на множестве V_{odd}.

Шаг 2. Выполнить алгоритм M-Cover для графа G и паросочетания M.

Шаг 3. Останов.

Сложность алгоритма Optimal Cover не превосходит $O(|V|^3)$ (сложности построения паросочетания).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Панюкова Т. А.** Построение эйлеровых циклов специального вида в планарном графе // Материалы VII междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения», Ч.II / Под ред. О. Б. Лупанова. — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001. — С. 149.
2. **Панюкова Т. А.** Построение маршрутов с упорядоченным охватыванием в плоских графах // 36-я регион. молодеж. конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 30 января–4 февраля 2005 г.): Труды. — Екатеринбург: УрО РАН, 2005. — С. 61–66.
3. **Панюкова Т. А.** Обходы с упорядоченным охватыванием в плоских графах // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 31–43.
4. **Панюкова Т. А.** Некоторые критерии оценки раскройных планов // IV всерос. конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 29 июня–4 июля 2009 г.): Материалы. — Омск: Полиграфический центр КАН, 2009. — С. 238.
5. **Панюкова Т. А.** Покрытия с упорядоченным охватыванием с минимальной длиной дополнительных построений // Всерос. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конференции (Новосибирск, 27 июня–2 июля 2010 г.). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2010. — С. 150.
6. **Фляйшнер Г.** Эйлеровы графы и смежные вопросы. — М.: Мир, 2002. — 335 с.

7. **Fleischner H.** Eulerian graphs and related topics. Part 1, Vol. 2 // Ann. Discrete Math. — 1991. — N 50. — 336 c.
8. **Panioukova T. A., Panyukov A. V.** Algorithms for construction of ordered enclosing traces in planar eulerian graphs // Int. Workshop Comput. Sci. Information Technologies'2003 (Ufa, September 16–18, 2003). Vol. 1.: Proc. — Ufa: Ufa State Technical Univ., 2003. — P. 134–138.
9. **Panyukov A. V., Panyukova T. A.** The algorithm for tracing of flat Euler cycles with ordered enclosing // Proc. Chelyabinsk Sci. Center #4(9), 2000. — P. 18–22. http://www.sci.urc.ac.ru/news/2000_4/2000_4_1_4.pdf
10. **Panyukova T.** Chain sequences with ordered enclosing // J. Comput. Syst. Sci. Int. — 2007. — Vol. 46, N 1. — P. 83–92.
11. **Panyukova T.** Cover with ordered enclosing for flat graphs // Electron. Notes Discrete Math. — 2007. — N 28. — P. 17–24.
12. **Panyukova T. A., Panyukov A. V.** Decreasing of length for routes with ordered enclosing // Междунар. науч. конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 19–22 октября 2009 г.).: Тез. докл. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2009. — С. 155–157.

Панюкова Татьяна Анатольевна,
e-mail: kwark@mail.ru

Статья поступила
24 августа 2010 г.
Переработанный вариант —
13 ноября 2010 г.