ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2011. Том 18, № 2. С. 75–94

УДК 519.95

О ЯДРОВЫХ И КРАТЧАЙШИХ КОМПЛЕКСАХ ГРАНЕЙ В ЕДИНИЧНОМ КУБЕ

И. П. Чухров

Аннотация. На основе исследования экстремальных ядровых комплексов граней заданной размерности получены нижние оценки числа кратчайших комплексов граней в единичном n-мерном кубе. Показано, что число кратчайших комплексов k-мерных граней совпадает по порядку логарифма с числом комплексов, состоящих из не более 2^{n-1} различных граней размерности k, при $1 \leqslant k \leqslant c \cdot n$ и $c < 0.5$. Отсюда вытекают аналогичные нижние оценки для максимальных значений длины ядровых и числа кратчайших д.н.ф. булевых функций.

Ключевые слова: грань, интервал, ядровая грань, комплекс граней в n-мерном единичном кубе, булева функция, кратчайшее покрытие.

Введение

Задача минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (д.н.ф.) [3, 6, 11] обычно рассматривается в двух эквивалентных моделях — аналитической и геометрической [14, с. 307]. Множество всех вершин куба B^n, которое совпадает с k-мерной гранью куба B^n, эквивалентно множеству вершин, на которых некоторая импликанта ранга $n-k$ обращается в единицу. Множество вершин грани также может быть представлено в виде $\{\widetilde{x} \in B^n \mid \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{x} \leqslant \widetilde{\beta}\}$, где $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — минимальная и максимальная вершины грани, при этом расстояние Хэмминга $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ равно k. В таком представлении множество вершин грани называется *k-мерным интервалом* в единичном кубе B^n.

Для произвольных вершин $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^n$ через $I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ будем обозначать наименьший интервал в B^n, содержащий одновременно вершины $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$. Отметим, что интервал $I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ совпадает с множеством вершин $\widetilde{x} \in B^n$, для которых выполняется условие $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) + \rho(\widetilde{x}, \widetilde{\beta}) \leqslant \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$.

Комплекс граней $M = \{I_r,\ r = 1, \dots, l\}$ покрывает множество вершин $N_M = \bigcup_{r=1}^{l} I_r \subseteq B^n$. Комплексу граней M однозначно соответствует функция $f \in P_n$, для которой $N_f = N_M$, и д.н.ф., состоящая из импликант, однозначно определяемых гранями из M. Два комплекса граней называются *эквивалентными*, если они покрывают одно и то же подмножество вершин единичного куба B^n.

Комплекс граней M называется *неприводимым*, если после удаления из него любой грани получается комплекс граней, не эквивалентный M, т. е. $N_M \neq N_{M \setminus \{I\}}$ для любой грани $I \in M$. В неприводимом комплексе M каждая грань $I \in M$ содержит хотя бы одну вершину $\widetilde{\alpha}$, которая не покрывается другими гранями из M. Такая вершина $\widetilde{\alpha}$ называется *собственной вершиной грани I в комплексе M*. Будем обозначать через C_M подмножество собственных вершин неприводимого комплекса M, которое содержит по одной произвольной (если их несколько) собственной вершине для каждой грани из M. Таким образом, в неприводимом комплексе M число граней равно $|C_M|$.

Функционал, определённый на множестве всех комплексов граней (д.н.ф.), является *мерой сложности*, если он удовлетворяет аксиомам неотрицательности, монотонности относительно умножения, выпуклости относительно сложения и инвариантности относительно изоморфизма [14, с. 298]. Мера сложности, равная числу граней в комплексе M, называется *длиной* и обозначается через $l\,(M)$. *Кратчайшим* называется комплекс, имеющий минимальное число граней среди всех эквивалентных комплексов граней. Мера сложности, равная сумме рангов граней в комплексе M, называется *сложностью* и обозначается через $L\,(M)$. *Минимальным* называется комплекс, имеющий минимальную сумму рангов граней среди всех эквивалентных комплексов.

Используемые, но не определяемые в этой статье понятия и определения можно найти в [3, 6, 14]. Через $\lfloor x \rfloor$ (соответственно $\lceil x \rceil$) обозначим целую часть (соответственно верхнюю целую часть) числа x. Под $\log$ всюду понимается логарифм по основанию 2. Константа c_ε всюду есть сколь угодно малая положительная константа. Через $o\,(1)$ обозначается величина, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_l^n$ множество кратчайших комплексов граней, через $\mathcal{M}_l^{n,k}$ — множество кратчайших комплексов k-мерных граней и через $\mathcal{M}_l^{n,k,m}$ — множество кратчайших комплексов k-мерных граней длины m в единичном кубе B^n. Мощности этих множеств обозначим через $M_l\,(n) = \left|\mathcal{M}_l^n\right|$, $M_l\,(n,k) = \left|\mathcal{M}_l^{n,k}\right|$ и $M_l\,(n,k,m) = \left|\mathcal{M}_l^{n,k,m}\right|$. Для функции $f \in P_n$ через $\mu_l\,(f)$ будем обозначать число кратчайших д.н.ф. функции f и через $\mu_l\,(n)$ — максимальное значение этого параметра по множеству функций P_n. В утверждениях, справедливых одновременно для кратчайших и минимальных д.н.ф., будем использовать обозначения без указания меры сложности, например, $\mu(n)$.

Верхняя оценка $\mu(n) \leqslant (2^{2^n})^{c\cdot n\cdot(1+o(1))}$ при $n \to \infty$, где $c = \log\frac{3}{2}$, получается из простых соображений, что длина неприводимого комплекса граней не превосходит 2^n , а число граней в кубе B^n равно 3^n [3, с. 125].

Нижние оценки $\mu(n)$ последовательно улучшались рядом авторов. Первый результат $\mu(n) \geqslant (n-1)! = 2^{n\cdot\log n\cdot(1-o(1))}$ получен С. В. Яблонским [3, с. 123], т. е. показано, что $\mu(n)$ растёт при $n \to \infty$ значительно быстрее, чем 2^n. Ю. И. Журавлёвым [5] получена оценка $\mu(n) \geqslant (2^{2^n})^c$, где $0 < c < 1$. В [2] Ю. Л. Васильевым впервые показано, что значение $\mu(n)$ может превосходить число функций от n переменных:

$$\mu(n) \geqslant (2^{2^n})^{c\cdot\log n\cdot(1-o(1))}$$

или $\log\,\mu(n) \gtrsim c\cdot\log\,n\cdot 2^n$, где $c = 1/6$, при $n \to \infty$.

Для числа минимальных д.н.ф. у почти всех функций известна только верхняя оценка

$$\log\mu(f) \lesssim \log\binom{s(f)}{l(f)} \sim l(f)\log\frac{s(f)}{l(f)} \sim c_n\cdot 2^n \quad \text{при } n \to \infty,$$

которая является следствием оценок длин $s(f) = 2^n n^{\log\log n(1-o(1))}$ сокращённой д.н.ф. и $l(f) \sim c_n\cdot 2^n/\log n\log\log n$ кратчайшей д.н.ф. для почти всех функций [4, 7, 8, 10]. Известно, что $1 \leqslant c_n$ [9] и $c_n \leqslant 1.5$ [1] или $c_n \leqslant h(n)$, где $h(n)$ колеблется в зависимости от n между $1.38826\ldots$ и $1.54169\ldots$ [15]. Неизвестно никакой нетривиальной нижней оценки $\mu(f)$ для почти всех функций.

Ю. Л. Васильевым [3, с. 126] получена нижняя оценка вида

$$\log\,\mu(n) \gtrsim c\cdot\sqrt{n}\cdot 2^n,$$

где $c = 1/\sqrt{32\pi}$, при $n \to \infty$. Функция, на которой достигается эта оценка, построена с использованием симметрической функции в подкубе $B^{n-2} \subset B^n$ и одномерных ядровых граней.

Исследование симметрических функций [3, с. 110] объяснялось существованием гипотезы о достижимости значения $\mu(n)$ на классе симметрических функций $S^n \subset P_n$. В [12] показано, что при $n \to \infty$

$$\log\,\mu(n) \geqslant \log\max_{f\in S^n}\mu(f) \sim n\cdot\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \sim \sqrt{2/\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot 2^n.$$

Существенного улучшения нижней оценки $\mu(n)$ удалось добиться после отказа от построения и исследования свойств конкретных функций и переходу к построению множеств минимальных д.н.ф. n переменных. В единичном кубе B^n общее число минимальных комплексов граней и максимальное число минимальных комплексов граней, покрывающих определённое подмножество вершин куба, по порядку логарифма асимптотически равны. Действительно, пусть $M(n) = \sum_{f \in P_n} \mu(f)$ — число минимальных (кратчайших) комплексов граней в B^n или д.н.ф. n переменных. Из имеющейся нижней оценки $\mu(n)$ вытекает, что $2^n = o(\log \mu(n))$ при $n \to \infty$. Поэтому из очевидного соотношения

$$\mu(n) \leqslant M(n) \leqslant \mu(n)\, 2^{2^n}$$

следует, что $\log \mu(n) \sim \log M(n)$ при $n \to \infty$.

В [13] предложен метод построения множества минимальных д.н.ф. относительно класса мер сложности, удовлетворяющих усиленной аксиоме инвариантности относительно изоморфизма. Для мер сложности из этого класса, в том числе для максимального числа кратчайших и минимальных д.н.ф. получена оценка вида

$$\log \mu(n) \sim \log M(n) \gtrsim c \cdot n \cdot 2^n,$$

где $c = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 / (8e) > 0.2524 \cdot 2^{-5}$, при $n \to \infty$. Таким образом, получен порядок роста $\log \mu(n) \asymp n \cdot 2^n$.

Получение высокой нижней оценки для числа кратчайших (минимальных) комплексов граней в единичном кубе связано с решением двух проблем.

Во-первых, очевидно, что мощность подмножества неприводимых комплексов граней в кубе B^n не превосходит $2^{o(n2^n)}$ при условии, что либо размерность всех граней есть $o(n)$, либо число граней в комплексе есть $o(2^n)$. Поэтому необходимым условием для возможности нижней оценки числа кратчайших комплексов граней, по порядку логарифма, равной $n \cdot 2^n$, является существование кратчайшего комплекса граней, в котором $c_1 2^n$ граней имеют размерность не менее $c_2 n$, где c_1, c_2 — положительные константы.

Во-вторых, отсутствуют локальные критерии для обоснования минимальности комплекса граней. В случае тупиковых д.н.ф. свойство импликанты входить или не входить в тупиковую д.н.ф. однозначно определяется окрестностью второго порядка импликанты в д.н.ф., но не существует локальных алгоритмов построения д.н.ф. типа «сумма минимальных д.н.ф.» [6, с. 95]. Единственная известная ситуация, когда в общем случае по локальным критериям можно обосновать вхождение импликанты в минимальную д.н.ф., связана с понятием ядровых импликант функции.

Для множества вершин $Q \subseteq B^n$ любая грань $I \subseteq Q$ называется *допустимой гранью*. Допустимая грань I для множества вершин $Q \subseteq B^n$ называется *максимальной*, если не существует грани $I' \neq I$ такой, что $I \subset I' \subseteq Q$.

Определение 1. Грань I называется *ядровой для множества вершин* $Q \subset B^n$, если она максимальна для Q и существует такая вершина $\widetilde{\alpha} \in I$, что $\widetilde{\alpha}$ не принадлежит никакой другой грани, максимальной для Q. Вершины ядровой грани I, которые не покрываются никакими другими максимальными для Q гранями, называются *собственными вершинами ядровой грани* I. *Ядром* Q называется множество всех ядровых граней для $Q \subseteq B^n$. Число ядровых граней для $Q \subseteq B^n$ будем обозначать через $c\,(Q)$.

Определение 2. Комплекс граней $M = \{I_r,\ r = 1, \ldots, l\}$ в кубе B^n, называется *ядровым*, если любая грань комплекса M является ядровой для подмножества вершин $N_M \subset B^n$. Множество вершин, покрываемых ядровым комплексом граней, называется *ядровым множеством вершин* в единичном кубе B^n.

Легко видеть, что для множества вершин куба $Q \subset B^n$, с одной стороны, ядровых граней может не быть, т. е. $c\,(Q) = 0$, а с другой стороны, если Q является ядровым множеством вершин, то ядровой комплекс граней для Q является минимальным для любой меры сложности. При этом ключевым свойством ядрового множества, обеспечивающим локальный критерий обоснования вхождения ядровой грани в минимальный комплекс, является отсутствие допустимых граней для ядрового множества, содержащих собственные вершины различных ядровых граней.

Ядровые и кратчайшие комплексы граней являются неприводимыми, но в кратчайшем комплексе граней допускаются не максимальные грани. Тем самым по ядровому комплексу граней можно построить различные кратчайшие комплексы граней. Для этого в комплекс граней включаются для различных ядровых граней по одной допустимой грани меньшей размерности, содержащейся в ядровой грани и покрывающей хотя бы одну собственную вершину этой ядровой грани. Любой такой комплекс граней будет кратчайшим в силу отсутствия допустимых граней, покрывающих собственные вершины граней в кратчайшем комплексе, совпадающих с собственными вершинами ядровых граней.

Для максимального числа ядровых граней множества вершин $c\,(n)$ в кубе B^n очевидная верхняя оценка $c\,(n) \leqslant 2^{n-1}$ вытекает из простого факта, что не может быть пар соседних вершин среди собственных вершин различных ядровых граней. При этом значение 2^{n-1} достигается на линейной функции $N_f = \{\widetilde{x} \in B^n \mid x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = c\,(\mathrm{mod}\,2)\}$ для 0-мерных ядровых граней. Следовательно, как и для максимального числа граней в кратчайшем комплексе, $c\,(n) = 2^{n-1}$.

Для почти всех функций известно [4], что число ядровых граней не превосходит

$$n^{\log\log n\cdot(1-o(1))} = 2^{\log n\cdot\log\log n\cdot(1-o(1))}$$

и размерность ядровых граней не превосходит

$$k \leqslant \lceil \log\log n + \log\log\log n \rceil$$

при $n \to \infty$.

Для максимального числа k-мерных ядровых граней $c_k\,(n)$ в комплексе простые оценки можно получить, используя свойства класса монотонных функций из P_n. Для монотонного множества каждая максимальная грань является ядровой. Множество вершин монотонной и симметрической функции $S^n_{n-k,n}$ имеет $\binom{n}{k}$ ядровых граней размерности k, где $S^n_{m-k,m} = \{\widetilde{x} \in B^n \mid m-k \leqslant \|\widetilde{x}\| \leqslant m\}$ для $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$. Соответственно $S^n_{0,k} \cup S^n_{n-k,n}$ будет ядровым множеством вершин при $k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor - 1$ для комплекса, состоящего из $2\binom{n}{k}$ ядровых граней размерности k. Таким образом, можно утверждать, что $c_k\,(n) \geqslant 2\binom{n}{k}$ и для $k - \lfloor n/2 \rfloor = o\,(\sqrt{n})$ нижняя оценка $c_k\,(n)$ имеет порядок $2^n/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$.

В статье предлагаются методы построения ядровых и кратчайших комплексов граней с экстремальными значениями характеристик, основанные на развитии идей, изложенных в [13]. Для $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}\,(1 - c_\varepsilon)$ доказывается существование ядровых комплексов k-мерных граней с числом граней порядка 2^n, т. е. $c_k\,(n) \asymp 2^n$ при $n \to \infty$. С использованием экстремальных ядровых комплексов граней заданной размерности получены нижние оценки числа кратчайших комплексов граней в единичном n-мерном кубе. Показано, что число кратчайших комплексов k-мерных граней совпадает по порядку логарифма с числом комплексов, состоящих из не более чем 2^{n-1} различных граней размерности k. Для числа кратчайших комплексов граней улучшена нижняя оценка:

$$\log M_l\,(n) \geqslant c \cdot n \cdot 2^n,$$

где $c > 1.0614 \cdot 2^{-5}$, при $n \to \infty$. Аналогичные нижние оценки справедливы для максимальных значений длины ядровых и числа кратчайших д.н.ф. булевых функций.

1. Описание конструкции

Определение 3. Для произвольного множества вершин $Q \subseteq B^n$ подмножество $C \subseteq Q$ называется *интервально независимым множеством вершин* для Q, если любой допустимый интервал для Q содержит не более одной вершины из C, т. е. $I(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \nsubseteq Q$ для любых двух вершин $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ из C.

Для соседних вершин $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in Q$ одномерный интервал $I(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ является допустимым для множества Q. Поэтому, во-первых, для произвольного множества $Q \subset B^n$ интервально независимое множество вершин состоит из изолированных вершин. Во-вторых, мощность интервально независимого множества вершин для любого множества вершин куба B^n не превосходит 2^{n-1}.

Пусть подмножество C является интервально независимым множеством вершин для множества $Q \subseteq B^n$ и M — комплекс допустимых для Q интервалов, который покрывает множество вершин C. Тогда $l(M) \geqslant |C|$ и понятие интервально независимого множества вершин для подмножества вершин единичного куба позволяет обосновать нижнюю оценку длины покрывающего его комплекса интервалов. Если в комплексе M нет интервалов, которые не содержат вершин из множества C, и каждая вершина из множества C содержится в одном интервале, то $l(M) = |C|$ и M является кратчайшим комплексом.

Очевидно, что для ядрового комплекса интервалов M множество собственных вершин C_M, в которое входит по одной вершине для каждого ядрового интервала, является интервально независимым множеством вершин для множества N_M.

Определение 4. Пусть A — произвольное подмножество вершин куба B^n. Вершина $\widetilde{x} \in B^n$ называется *простой k-граничной вершиной множества* A, если $\rho(A, \widetilde{x}) = \min\limits_{\widetilde{\alpha} \in A} \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) \geqslant k$ и существует ровно одна вершина $\widetilde{\alpha} \in A$ такая, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) = k$. Подмножество $A \subset B^n$, относительно которого рассматривается множество простых k-граничных вершин, будем называть *опорным* подмножеством в единичном кубе B^n. Множество простых k-граничных вершин множества $A \subset B^n$ обозначим через $G_k(A)$.

Для множества простых k-граничных вершин подмножества $A \subset B^n$ определено однозначное отображение $\widetilde{\varphi}_{A,k} \mid G_k(A) \to A$, которое каждой вершине $\widetilde{x} \in G_k(A)$ ставит в соответствие единственную вершину $\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}) \in A$ такую, что $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x})) = k$. При этом для вершины $\widetilde{x} \in G_k(A)$ соседние вершины находятся от вершины $\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x})$ либо на расстоянии $k-1$ и содержатся в интервале $I\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}\right)\right)$, либо на расстоянии $k+1$ и не содержатся в интервале $I\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}\right)\right)$.

Будем говорить, что подмножество $X \subset B^n$ состоит из *изолированных вершин*, если в подмножестве X нет пар соседних вершин, т. е. для любых вершин $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in X$ выполняется $\rho\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2\right) \geqslant 2$.

Пусть множество G есть некоторое подмножество изолированных простых k-граничных вершин опорного множества $A \subset B^n$. Определим комплекс интервалов $M = \{I_j = I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right),\ j = 1, \dots, l\}$, где $l = |G|$, следующим образом. Для каждой простой k-граничной вершины $\widetilde{x}_j \in G$ в комплекс включается единственный, однозначно определённый k-мерный интервал, содержащий вершины $\widetilde{x}_j \in G$ и $\widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right) \in A$. Тогда справедлива

Лемма 1. *Комплекс интервалов M является ядровым, при этом каждая вершина $\widetilde{x}_j \in G$ является собственной вершиной для покрывающего её k-мерного ядрового интервала $I_j = I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right)$.*

Доказательство. Отметим, что по определению комплекса интервалов M для любой вершины $\widetilde{x} \in N_M$ существует покрывающий эту вершину интервал $I_j = I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right) \in M$, где $\widetilde{x}_j \in G$. Докажем, что $B_1^n\left(\widetilde{x}_j\right) \setminus I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right) \subseteq B^n \setminus N_M$ для любой вершины $\widetilde{x}_j \in G$, где $B_1^n\left(\widetilde{x}_j\right)$ — сфера Хэмминга радиуса 1 с центром в вершине $\widetilde{x}_j$. Другими словами, соседние с $\widetilde{x}_j \in G$ вершины, не покрывающиеся интервалом $I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right)$, не могут покрываться никаким другим интервалом из комплекса M и, следовательно, не входят в множество вершин N_M.

Предположим противное, т. е. что некоторую вершину $\widetilde{x} \in B_1^n(\widetilde{x}_j) \setminus I(\widetilde{x}_j,\ \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_j))$ покрывает интервал $I_s = I(\widetilde{x}_s, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_s))$, где $\widetilde{x}_s \in G \subseteq G_k\left(A\right)$. При этом $\widetilde{x} \neq \widetilde{x}_s$, поскольку в подмножестве G нет соседних вершин, а $\widetilde{x}_s \neq \widetilde{x}_j$, так как вершина $\widetilde{x}$ интервалом $I_j = I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right)$ не покрывается. Тогда

$$\rho\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_s\right)\right) < \rho\left(\widetilde{x}_s, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_s\right)\right) = k,$$

т. е. $\rho\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_s\right)\right) \leqslant k-1$, и, следовательно,

$$\rho\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_s\right)\right) \leqslant \rho\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{x}\right) + \rho\left(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_s\right)\right) \leqslant 1 + (k-1) = k.$$

Это противоречит определению простой k-граничной вершины, так как для $\widetilde{x}_j \in G$ существуют две вершины $\widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)$ и $\widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_s\right)$ из опорного подмножества A на расстоянии не более k. Из этого следует, что любой допустимый интервал для N_M, содержащий $\widetilde{x}_j \in G$, содержится в k-мерном интервале $I_j = I\left(\widetilde{x}_j, \widetilde{\varphi}_{A,k}\left(\widetilde{x}_j\right)\right)$, который является единственным максимальным интервалом для множества N_M, покрывающим вершину $\widetilde{x}_j$. Лемма 1 доказана.

Конструкция, используемая для построения ядровых комплексов интервалов заданной размерности, основана на лемме 1. Комплекс интервалов, построенный по подмножеству $G \subset G_k(A)$ изолированных простых k-граничных вершин для опорного множества A, является ядровым комплексом, состоящим из $|G|$ интервалов размерности k, при этом вершины из множества G являются собственными для покрывающих их интервалов. Поэтому задача построения ядрового комплекса k-мерных интервалов в кубе B^n, в котором число интервалов имеет порядок 2^n, сводится к задаче построения опорного множества A, в котором число изолированных простых k-граничных вершин сравнимо с мощностью единичного куба B^n.

Метод построения множества кратчайших комплексов k-мерных интервалов по произвольному ядровому комплексу k_0-мерных интервалов, где $1 \leqslant k < k_0$, основан на сечении интервалов ядрового комплекса сферами радиуса k с центром в собственных вершинах ядровых интервалов. В результате такого сечения для каждой собственной вершины получим пучок из $\binom{k_0}{k}$ интервалов размерности k. Включая в комплекс интервалов для каждой вершины из C_M по одному интервалу из пучка k-мерных интервалов, получим не менее $\binom{k_0}{k}^{|C_M|}$ кратчайших комплексов интервалов из множества $\mathcal{M}_l^{n,k}$. При $|C_M| \gtrsim 2^n$ это позволяет получить для $\log M_l(n,k)$ нижнюю оценку порядка $n \cdot 2^n$ при $n \to \infty$, если $k_0 \asymp n$ и $k \sim c \cdot k_0$, где $0 < c < 1$.

Следовательно, существование ядрового комплекса интервалов, имеющего длину порядка 2^n и размерность интервалов порядка n, является достаточным условием для получения нижней оценки числа кратчайших комплексов, по порядку логарифма равной $n \cdot 2^n$. Поэтому для получения высоких оценок числа кратчайших комплексов интервалов на основе предлагаемого подхода ключевой задачей является построение опорного множества вершин в кубе, для которого число изолированных простых k-граничных вершин сравнимо с мощностью куба B^n.

2. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Для $1 \leqslant k < \frac{n}{2} - \eta(n)$, где $\eta(n)/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$, существует ядровой комплекс k-мерных интервалов M, построенный по подмножеству изолированных простых k-граничных вершин $G \subset G_k(A)$*

для некоторого опорного множества $A \subset B^n$, такой, что

$$l(M) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \max\left\{\frac{n-2k}{n-k}, \frac{2(k+1)(n-2k)}{(n-k)^2}\right\} \sim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \varphi_c\left(\frac{k}{n}\right),$$

где $\varphi_c(x) = \frac{1-2x}{1-x} \cdot \max\left\{1, \frac{2x}{1-x}\right\}$. При этом в комплексе M каждый интервал содержит одну вершину из опорного подмножества A и одну вершину из подмножества G, которая является собственной для покрывающего её ядрового интервала.

Из теоремы 1 следует существование ядровых комплексов k-мерных граней с числом граней порядка 2^n для $1 \leqslant k < \frac{n}{2} \cdot (1 - c_\varepsilon)$ при $n \to \infty$:

если $1 \leqslant k = o(n)$, то $\frac{2^{n-1}}{e} \lesssim c_k(n) \leqslant 2^{n-1}$;

если $k/n \sim x$, где $0 < x < 0.5$, то $\frac{2^{n-1}}{e}\varphi_c(x) \lesssim c_k(n) \leqslant 2^{n-1}$, где $0 < \varphi_c(x) < 1$.

Нижние оценки для числа кратчайших комплексов получаются при построении подмножества комплексов из множества $\mathcal{M}_l^{n,k,m}$. Построение выполняется по ядровому комплексу k_0-мерных граней M максимальной длины $c_{k_0}(n)$ и некоторому подмножеству собственных вершин $C \subseteq C_M$ мощности $m \leqslant c_{k_0}(n)$. При этом $\log M_l(n,k,m) \geqslant m \cdot \log\binom{k_0}{k}$, если $1 \leqslant k < k_0$ и $m \leqslant c_{k_0}(n)$. С использованием оценки максимальной длины ядрового комплекса k_0-мерных граней отсюда следует, что

$$\log\ M_l(n,k) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \varphi_c\left(\frac{k_0}{n}\right) \cdot \log\binom{k_0}{k}$$

для $1 \leqslant k < k_0 < \frac{n}{2} - \eta(n)$, где $\eta(n)/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $D_{n,k}(m)$ — число комплексов из не более чем m различных граней размерности k в единичном кубе B^n.

Теорема 2. *$\log M_l(n,k) \asymp \log D_{n,k}\left(2^{n-1}\right)$ для $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}(1 - c_\varepsilon)$ при $n \to \infty$. Если $1 \leqslant k = o(n)$, то*

$$\frac{2^{n-1}}{e} \cdot k \cdot \log\frac{n}{k} \lesssim \log\ M_l(n,k) \lesssim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log\frac{n}{k},$$

причём для $1 \leqslant k \leqslant n^{o(1)}$

$$\frac{2^{n-1}}{e} \cdot k \cdot \log n \lesssim \log\ M_l(n,k) \lesssim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log n.$$

Если $k \sim x \cdot n$, где $0 < x < 0.5$, то

$$n \cdot 2^{n-5} \cdot c_{\min}(x) \lesssim \log\ M_l(n,k) \lesssim n \cdot 2^{n-5} \cdot c_{\max}(x),$$

где $c_{\min}(x) = 2^5 \cdot \max\limits_{y|x<y<0.5} \psi(y) \cdot H(x/y)$, $c_{\max}(x) = 2^4 \cdot (H(x) - x)$, $\psi(t) = \frac{t}{2e}\varphi_c(t)$ и $H(t) = -t \cdot \log t - (1-t) \cdot \log(1-t)$.

Таким образом, для k-мерных граней при $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}(1 - c_\varepsilon)$ число кратчайших комплексов и число всех комплексов из не более чем 2^{n-1} различных граней по порядку логарифма совпадают.

Для числа кратчайших комплексов граней в кубе B^n и соответственно для максимального числа кратчайших д.н.ф. функции из P_n при оптимальном выборе параметров получена оценка (теорема 3)

$$\log \mu_l(n) \sim \log M_l(n) \geqslant \log M_l(n,k) > 1.0614 \cdot n \cdot 2^{n-5},$$

где $k \approx 0.191 \cdot n$, при $n \to \infty$.

3. Оценки числа граней ядровых комплексов

Будем использовать следующие обозначения для подмножеств вершин в единичном кубе B^n:

$B^n_k(\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) = k\}$ — *сфера радиуса* k с центром в вершине $\widetilde{\alpha}$;

$S^n_k(\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) \leqslant k\}$ — *шар радиуса* k с центром в вершине $\widetilde{\alpha}$;

$B^n_k = B^n_k(\widetilde{0}) = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \rho(\widetilde{0}, \widetilde{x}) = \|\widetilde{x}\| = k\}$ — k*-й слой куба* B^n.

Для числа вершин в подмножествах будем использовать обозначения:

$b^n_k = \left|B^n_k\right| = \left|B^n_k(\widetilde{\alpha})\right| = \binom{n}{k}$ — число вершин в сфере радиуса k;

$s^n_k = \left|S^n_k(\widetilde{\alpha})\right| = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$ — число вершин в шаре радиуса k.

Докажем вспомогательные леммы 2–5, позволяющие получить оценку максимальной мощности подмножества изолированных простых k-граничных вершин опорного множества в единичном кубе B^n.

Пусть $A^n_t = \{A \mid A \subset B^n,\ |A| = t\}$ — множество всех подмножеств из t различных вершин в единичном кубе B^n. Будем рассматривать множество A^n_t как конечное пространство элементарных равновероятных событий, при этом для любого $A \in A^n_t$ вероятность $\mathsf{P}\{A\}$ равна $\left|A^n_t\right|^{-1} = \binom{2^n}{t}^{-1}$.

Лемма 2. *Если* $1 \leqslant k < n/2$ *и* $s^n_k = o(2^n)$, *то при* $n \to \infty$

$$g_k(n) = \max_{A \subset B^n} |G_k(A)| \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{n-2k}{n-k}.$$

Доказательство. Очевидно, что $g_k(n) \geqslant \max\limits_{t>0} \overline{g}_k(n,t)$, где $\overline{g}_k(n,t)$ — средняя мощность множества $G_k(A)$ для случайно выбранного опорного множества $A \in A_t^n$. Пусть $\xi_k(\widetilde{x}, A)$ — индикаторная функция свойства «вершина $\widetilde{x}$ принадлежит $G_k(A)$». Тогда $|G_k(A)| = \sum\limits_{\widetilde{x} \in B^n} \xi_k(\widetilde{x}, A)$ и

$$\begin{aligned}\overline{g}_k(n,t) = \sum_{A \in A_t^n} \mathsf{P}\{A\}\,|G_k(A)| = \sum_{A \in A_t^n} \mathsf{P}\{A\} \sum_{\widetilde{x} \in B^n} \xi_k(\widetilde{x}, A) \\ = \sum_{\widetilde{x} \in B^n} \sum_{A \in A_t^n} \mathsf{P}\{A\}\,\xi_k(\widetilde{x}, A) = \sum_{\widetilde{x} \in B^n} \mathsf{P}\{\widetilde{x} \in G_k(A)\}.\end{aligned}$$

Для множества A мощности t вершина $\widetilde{x}$ принадлежит $G_k(A)$ тогда и только тогда, когда $\left|B_k^n(\widetilde{x}) \cap A\right| = 1$ и $\left|\left(B^n \setminus \mathcal{S}_k^n(\widetilde{x})\right) \cap A\right| = t-1$. Поэтому для любой вершины $\widetilde{x} \in B^n$, если $t \leqslant 2^n - s_k^n + 1$, то имеем

$$\mathsf{P}\{\widetilde{x} \in G_k(A)\} = \left|B_k^n(\widetilde{\alpha})\right| \cdot \binom{2^n - \left|S_k^n(\widetilde{\alpha})\right|}{t-1} \cdot \mathsf{P}\{A\} = b_k^n \cdot \binom{2^n - s_k^n}{t-1} \cdot \binom{2^n}{t}^{-1}$$

и $\mathsf{P}\{\widetilde{x} \in G_k(A)\} = 0$, если $t > 2^n - s_k^n + 1$. Тогда

$$\overline{g}_k(n,t) = 2^n \cdot b_k^n \cdot \binom{2^n - s_k^n}{t-1} \cdot \binom{2^n}{t}^{-1} = \frac{2^n \cdot t \cdot b_k^n}{2^n - s_k^n - t + 1} \cdot \binom{2^n - s_k^n}{t} \cdot \binom{2^n}{t}^{-1}.$$

Используем для оценки $\overline{g}_k(n,t)$ неравенство

$$\binom{m-p}{q}\binom{m}{q}^{-1} \geqslant \exp\left\{-\frac{p \cdot q}{m-q-p}\right\}, \qquad \text{где } m > q+p.$$

Тогда, обозначая $z_{n,k}(t) = \frac{t \cdot s_k^n}{2^n - s_k^n - t}$, можем записать

$$\begin{aligned}\overline{g}_k(n,t) \geqslant 2^n \cdot \frac{t \cdot b_k^n}{2^n - s_k^n - t + 1} \cdot \exp\left\{-\frac{t \cdot s_k^n}{2^n - s_k^n - t}\right\} \\ = 2^n \cdot \frac{b_k^n}{s_k^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n - s_k^n - t + 1}\right) \cdot z_{n,k}(t) \cdot \exp\{-z_{n,k}(t)\}.\end{aligned}$$

Так как $\max\limits_{x>0} x \cdot e^{-x} = e^{-1}$ достигается при $x = 1$, определим значение t_0 из соотношения $z_{n,k}(t_0) \sim 1$, т. е. положим $t_0 = \left\lfloor \frac{2^n - s_k^n}{1 + s_k^n} \right\rfloor$. Для $1 \leqslant k < n/2$ и $s_k^n = o(2^n)$ выполняется ограничение $t_0 \leqslant 2^n - s_k^n + 1$ и при $n \to \infty$ справедливы соотношения $t_0 = o(2^n)$, $1 - \frac{1}{2^n - s_k^n - t_0 + 1} \sim 1$,

$z_{n,k}(t_0) \cdot \exp\{-z_{n,k}(t_0)\} \sim e^{-1}$ и, следовательно, $\overline{g}_k(n, t_0) \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{b_k^n}{s_k^n}$. При $1 \leqslant k < n/2$ справедливо неравенство

$$\frac{s_k^n}{b_k^n} = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j} < \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k}{n-k}\right)^j < \frac{n-k}{n-2k}.$$

Поэтому $g_k(n) \geqslant \overline{g}_k(n, t_0) \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{n-2k}{n-k}$ при $n \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для $1 \leqslant k < \frac{n}{2} - \eta(n)$, где $\eta(n)/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$, существует подмножество G изолированных простых k-граничных вершин для некоторого опорного множества в кубе B^n такое, что*

$$|G| \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \frac{n-2k}{n-k}.$$

Доказательство. Из условия $1 \leqslant k < \frac{n}{2} - \eta(n)$ и ограничения на $\eta(n)$ следует, что $s_k^n = o(2^n)$ при $n \to \infty$. Поэтому по лемме 2 существует опорное множество $A \subset B^n$ такое, что $|G_k(A)| \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{n-2k}{n-k}$. Рассмотрим подмножества $G^0 = G_k(A) \cap B^{n,0}$ и $G^1 = G_k(A) \cap B^{n,1}$, где $B^{n,0} = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \|\widetilde{x}\| \bmod 2 = 0\}$ — подмножество вершин, принадлежащих чётным слоям B^n, и $B^{n,1} = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \|\widetilde{x}\| \bmod 2 = 1\}$ — подмножество вершин, принадлежащих нечётным слоям куба B^n. Подмножество G^0 лежит в чётных слоях, а G^1 — в нечётных слоях куба B^n, поэтому каждое из этих подмножеств состоит из изолированных вершин. Так как $G^0 \cap G^1 = \varnothing$ и $G^0 \cup G^1 = G_k(A)$, то $|G^0| + |G^1| = |G_k(A)|$ и $\max\{|G^0|, |G^1|\} \geqslant \frac{1}{2}|G_k(A)|$. Тогда если G является максимальным по мощности подмножеством из G^0 и G^1, то

$$|G| \geqslant \frac{1}{2}|G_k(A)| \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \frac{n-2k}{n-k}.$$

Лемма 3 доказана.

Определим подмножество $G_k^+(A) \subset G_k(A)$ простых k-граничных вершин опорного множества A, удовлетворяющих следующему условию: вершина $\widetilde{x} \in G_k(A)$ входит в $G_k^+(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\rho(\widetilde{x}, A \setminus \{\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x})\}) > k + 1.$$

Другими словами, для вершины $\widetilde{x} \in G_k^+(A)$ существует единственная вершина $\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}) \in A$ такая, что $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x})) = k$, и для других вершин $\widetilde{\alpha} \in A$ выполняется условие $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}) > k + 1$. Отметим, что в случае простых k-граничных вершин из $G_k(A)$ допускается выполнение соотношения $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}) = k + 1$.

Лемма 4. *Если* $1 \leqslant k < n/2$ *и* $s_{k+1}^n = o(2^n)$, *то при* $n \to \infty$

$$g_k^+(n) = \max_{A \subset B^n} \left|G_k^+(A)\right| \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{(k+1)(n-2k)}{(n-k)^2}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2 используем, что $g_k^+(n) \geqslant \max_{0<t} \overline{g}_k^+(n,t)$, где $\overline{g}_k^+(n,t) = \sum_{\widetilde{x} \in B^n} \mathsf{P}\left\{\widetilde{x} \in G_k^+(A)\right\}$ — средняя мощность множества $G_k^+(A)$ для случайно выбранного опорного множества $A \in A_t^n$. Для множества A мощности t вершина $\widetilde{x}$ принадлежит $G_k^+(A)$ тогда и только тогда, когда $\left|B_k^n(\widetilde{x}) \cap A\right| = 1$ и $\left|\left(B^n \setminus \mathcal{S}_{k+1}^n(\widetilde{x})\right) \cap A\right| = t-1$. Поэтому для любой вершины $\widetilde{x} \in B^n$, если $t \leqslant 2^n - s_{k+1}^n + 1$, то $\mathsf{P}\left\{\widetilde{x} \in G_k^+(A)\right\} = b_k^n \cdot \binom{2^n - s_{k+1}^n}{t-1} \cdot \binom{2^n}{t}^{-1}$, и $\mathsf{P}\left\{\widetilde{x} \in G_k^+(A)\right\} = 0$, если $t > 2^n - s_{k+1}^n + 1$. Тогда

$$\overline{g}_k^+(n,t) = \frac{2^n \cdot t \cdot b_k^n}{2^n - s_{k+1}^n - t + 1} \cdot \binom{2^n - s_{k+1}^n}{t} \cdot \binom{2^n}{t}^{-1}$$

Обозначая $z_{n,k+1}(t) = \frac{t \cdot s_{k+1}^n}{2^n - s_{k+1}^n - t}$, можем оценить

$$\begin{aligned}\overline{g}_k^+(n,t) &\geqslant 2^n \cdot \frac{t \cdot b_k^n}{2^n - s_{k+1}^n - t + 1} \cdot \exp\left\{-\frac{t \cdot s_{k+1}^n}{2^n - s_{k+1}^n - t}\right\} \\ &= 2^n \cdot \frac{b_k^n}{s_{k+1}^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n - s_{k+1}^n - t + 1}\right) \cdot z_{n,k+1}(t) \cdot \exp\left\{-z_{n,k+1}(t)\right\}.\end{aligned}$$

Определим значение t_0 из соотношения $z_{n,k+1}(t_0) \sim 1$, т. е. положим $t_0 = \left\lfloor \frac{2^n - s_{k+1}^n}{1 + s_{k+1}^n} \right\rfloor$. Для $1 \leqslant k < n/2$ и $s_{k+1}^n = o(2^n)$ выполняется ограничение $t_0 \leqslant 2^n - s_{k+1}^n + 1$ и при $n \to \infty$ справедливы соотношения $t_0 = o(2^n)$, $1 - \frac{1}{2^n - s_{k+1}^n - t_0 + 1} \sim 1$, $z_{n,k+1}(t_0) \cdot \exp\left\{-z_{n,k+1}(t_0)\right\} \sim e^{-1}$ и, следовательно, $\overline{g}_k^+(n,t_0) \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{b_k^n}{s_{k+1}^n}$. Используя оценку

$$\frac{b_k^n}{s_{k+1}^n} = \frac{s_k^n}{s_{k+1}^n} \cdot \frac{b_k^n}{s_k^n} \geqslant \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{n-2k}{n-k}$$

при $1 \leqslant k < n/2$, окончательно получаем, что

$$g_k^+(n) \geqslant \overline{g}_k^+(n,t_0) \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{(k+1)(n-2k)}{(n-k)^2} \text{ при } n \to \infty.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для $1 \leqslant k < n/2 - \eta(n)$, где $\eta(n)/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$, существует подмножество G изолированных простых k-граничных вершин для некоторого опорного множества в кубе B^n такое, что*

$$|G| \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{(k+1)(n-2k)}{(n-k)^2}.$$

Доказательство. Из условия $1 \leqslant k < \frac{n}{2} - \eta(n)$ и ограничения на $\eta(n)$ при $n \to \infty$ следует, что $s_{k+1}^n = o(2^n)$ и по лемме 4 существует опорное множество $A \subset B^n$ такое, что $\left|G_k^+(A)\right| \gtrsim \frac{2^n}{e} \cdot \frac{(k+1)(n-2k)}{(n-k)^2}$. Покажем, что множество $G_k^+(A)$ состоит из изолированных вершин. Предположим противное, т. е. существуют вершины $\widetilde{x}_i$ и $\widetilde{x}_s$ из $G_k^+(A) \subseteq G_k(A)$ такие, что $\rho(\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_s) = 1$. Тогда для простых k-граничных вершин $\widetilde{x}_i$ и $\widetilde{x}_s$ имеем $\rho(\widetilde{x}_i, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_i)) = \rho(\widetilde{x}_s, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_s)) = k$ и $\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_i) \neq \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_s)$. Следовательно,

$$k + 1 \leqslant \rho(\widetilde{x}_i, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_s)) \leqslant \rho(\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_s) + \rho(\widetilde{x}_s, \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_s)) = k + 1,$$

т. е. для $\widetilde{x}_i \in G_k^+(A)$ существует вершина $\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}_s)$ из опорного множества A на расстоянии $k+1$, что противоречит определению подмножества $G_k^+(A)$. Лемма 5 доказана.

Из доказанных лемм 1–5 вытекает справедливость теоремы 1, из которой при $1 \leqslant k < \frac{n}{2}(1 - c_\varepsilon)$ следует существование ядровых комплексов k-мерных граней с числом граней порядка 2^n.

Следствие 1. *Если $1 \leqslant k = o(n)$, то $\frac{2^{n-1}}{e} \lesssim c_k(n) \leqslant 2^{n-1}$ при $n \to \infty$.*

Следствие 2. *Если $k/n \sim x$, то $\frac{2^{n-1}}{e}\varphi_c(x) \lesssim c_k(n) \leqslant 2^{n-1}$ для $0 < x < 0.5$ при $n \to \infty$, где $0 < \varphi_c(x) < 1$.*

4. Оценки числа кратчайших комплексов граней

Для собственной вершины $\widetilde{x} \in C_M$ ядрового комплекса интервалов M через $I_{M,\widetilde{x}}$ будем обозначать интервал из M, покрывающий эту собственную вершину. Пусть для каждой собственной вершины $\widetilde{x} \in C_M$ ядрового комплекса M определён пучок интервалов $P_\mu(\widetilde{x})$, покрывающих вершину $\widetilde{x}$ и содержащихся в интервале $I_{M,\widetilde{x}}$. Будем рассматривать комплексы интервалов вида $\{I_j \mid I_j \in P_\mu(\widetilde{x}_j),\ \widetilde{x}_j \in C_M,\ j = 1, \ldots, |C_M|\}$, т. е. для каждой вершины $\widetilde{x} \in C_M$ в комплекс входит по одному интервалу из пучка интервалов $P_\mu(\widetilde{x})$. Множество различных комплексов интервалов, построенных по пучкам интервалов $P_\mu(\widetilde{x})$ для собственных вершин из C_M ядрового комплекса M, обозначим через $\Omega_\mu^n(M, C_M, P_\mu)$.

Лемма 6. *Для любого комплекса интервалов* $w \in \Omega^n_\mu(M, C_M, P_\mu)$ *подмножество* C_M *является интервально независимым для множества* N_w *и, следовательно,* w *является кратчайшим комплексом интервалов.*

Доказательство. Отметим, что $N(\widetilde{x}) = \bigcup\limits_{I \in P_\mu(\widetilde{x})} I \subset I_{M,\widetilde{x}}$ для любой вершины $\widetilde{x} \in C_M$, т. е. множество вершин, покрываемых интервалами из пучка $P_\mu(\widetilde{x})$, содержится в интервале $I_{M,\widetilde{x}}$. Поэтому

$$N_w \subseteq \bigcup_{x \in C_M} N(\widetilde{x}) \subseteq \bigcup_{x \in C_M} I_{M,\widetilde{x}} = N_M$$

для любого комплекса $w \in \Omega^n_\mu(M, C_M, P_\mu)$. Так как $C_M \subset N_w \subset N_M$ и множество C_M интервально независимо для N_M, то C_M интервально независимо для N_w. Тогда комплекс w состоит из $|C_M|$ интервалов и покрывает множество вершин N_w, для которого C_M является интервально независимым множеством вершин, т. е. w — кратчайший комплекс. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. $\log M_l(n,k,m) \geqslant m \cdot \log\binom{k_0}{k}$ *при* $1 \leqslant k < k_0$ *и* $m \leqslant c_{k_0}(n)$.

Доказательство. Пусть M — ядровой комплекс k_0-мерных интервалов длины $c_{k_0}(n)$ в кубе B^n. Для каждой вершины $\widetilde{x} \in C_M$ определим пучок k-мерных интервалов $P_l(\widetilde{x})$ следующим образом:

$$P_l(\widetilde{x}) = \left\{ I = I(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \mid \widetilde{y} \in B^n_k(\widetilde{x}) \cap I_{M,\widetilde{x}} \right\},$$

где $1 \leqslant k < k_0$.

Множество различных комплексов интервалов, построенных по пучкам интервалов $P_l(\widetilde{x})$ для собственных вершин из некоторого подмножества $C \subseteq C_M$ мощности $m \leqslant c_{k_0}(n)$, обозначим через $\Omega^n_l(M, C, k, k_0, m)$. Тогда по лемме 6 любой комплекс интервалов из $\Omega^n_l(M, C, k, k_0, m)$ является кратчайшим комплексом k-мерных интервалов длины m, т. е.

$$\Omega^n_l(M, C, k, k_0, m) \subseteq \mathcal{M}^{n,k,m}_l.$$

Так как $|P_l(\widetilde{x})| = \left|B^n_k(\widetilde{x}) \cap I_{M,\widetilde{x}}\right| = \binom{k_0}{k}$ для любой вершины $\widetilde{x} \in C \subseteq C_M$, имеем

$$M_l(n,k,m) \geqslant \left|\Omega^n_l(M, C, k, k_0, m)\right| = \prod_{\widetilde{x} \in C} |P_l(\widetilde{x})| = \binom{k_0}{k}^m.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если* $1 \leqslant k < k_0 < \frac{n}{2} - \eta(n)$, *где* $\eta(n)/\sqrt{n} \to \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\log M_l(n,k) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \varphi_c(k_0/n) \cdot \log \binom{k_0}{k}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 $c_{k_0}(n) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \varphi_c(k_0/n)$ при $n \to \infty$. Тогда утверждение леммы вытекает из справедливости леммы 7 при $m = c_{k_0}(n)$ и очевидного соотношения

$$\log M_l\left(n,k\right) \geqslant \log M_l\left(n,k,c_{k_0}\left(n\right)\right) \geqslant c_{k_0}\left(n\right) \cdot \log \binom{k_0}{k}.$$

Лемма 8 доказана.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что $D_{n,k}\left(m\right) = \sum\limits_{s=1}^{m} \binom{i_{n,k}}{s}$, где $i_{n,k}$ — число k-мерных граней в единичном кубе B^n и $i_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$. В кратчайших комплексах число граней не превосходит 2^{n-1}. Поэтому

$$M_l\left(n,k\right) < D_{n,k}\left(2^{n-1}\right) = \sum_{s=1}^{2^{n-1}} \binom{i_{n,k}}{s} \sim \binom{i_{n,k}}{2^{n-1}},$$

так как $2^{n-1} = o\left(i_{n,k}\right)$ для $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ при $n \to \infty$. С другой стороны, по лемме 8 для $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}\left(1 - c_\varepsilon\right)$ при $n \to \infty$ справедлива оценка

$$\log M_l\left(n,k\right) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \varphi_c\left(\frac{k_0}{n}\right) \cdot \log \binom{k_0}{k}.$$

При оценивании значения $\log\binom{q}{p}$, где $p = p\left(n\right)$ и $q = q\left(n\right)$, используем соотношения $\log\binom{q}{p} \sim p \cdot \log\left(q/p\right)$, если $p = o\left(q\right)$, и $\log\binom{q}{p} \sim q \cdot H\left(p/q\right)$, если $p \sim c \cdot q$, где $0 < c < 1$, при $n \to \infty$.

В случае $1 \leqslant k = o\left(n\right)$ определим $k_0 = \left\lfloor n/\log \frac{n}{k} \right\rfloor = o\left(n\right)$. Тогда

$$k = o\left(k_0\right), \quad \varphi_c\left(k_0/n\right) \sim 1, \quad \log \binom{k_0}{k} \sim k \cdot \log \frac{k_0}{k} \sim k \cdot \log \frac{n}{k},$$

так как

$$\log \frac{k_0}{k} \sim \log \frac{n}{k} - \log \log \frac{n}{k} \sim \log \frac{n}{k}$$

при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$\log\binom{i_{n,k}}{2^{n-1}} \sim 2^{n-1} \cdot \log\left(\binom{n}{k} \cdot 2^{-(k-1)}\right) = 2^{n-1} \cdot \left(\log\binom{n}{k} - (k-1)\right)$$
$$\sim 2^{n-1} \cdot \left(k \cdot \log \frac{n}{k} - (k-1)\right) \sim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log \frac{n}{k}.$$

Окончательно получаем при $n \to \infty$

$$\frac{2^{n-1}}{e} \cdot k \cdot \log \frac{n}{k} \lesssim \log M_l\left(n, k\right) < \log D_{n,k}\left(2^{n-1}\right) \sim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log \frac{n}{k}.$$

В случае $k \sim x \cdot n$, где $0 < x < 0.5$, определим $k_0 = \lfloor y \cdot n \rfloor$, где $y \in (x, 0.5)$, что обеспечивает выполнение условия $k < k_0 < \frac{n}{2}\left(1 - c_\varepsilon\right)$. Тогда

$$\log M_l\left(n, k\right) \gtrsim n \frac{2^{n-1}}{e} \cdot \frac{k_0}{n} \varphi_c\left(\frac{k_0}{n}\right) \cdot \frac{1}{k_0} \log \binom{k_0}{k} = n 2^n \cdot \psi\left(\frac{k_0}{n}\right) \cdot \frac{1}{k_0} \log \binom{k_0}{k},$$

где $\psi\left(t\right) = \frac{t}{2e} \cdot \varphi_c\left(t\right)$, $k_0/n \sim y$ и $\frac{1}{k_0} \log \binom{k_0}{k} \sim H\left(x/y\right)$. При этом

$$\log \binom{i_{n,k}}{2^{n-1}} \sim 2^{n-1} \left(\log \binom{n}{k} - \left(k-1\right)\right) \sim 2^{n-1} \cdot n \cdot \left(H\left(x\right) - x\right).$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$n \cdot 2^n \cdot \psi\left(y\right) \cdot H\left(x/y\right) \lesssim \log M_l\left(n, k\right) < \log D_{n,k}\left(2^{n-1}\right) \sim n \cdot 2^{n-1} \cdot \left(H\left(x\right) - x\right).$$

Значение параметра y выбирается из условия максимизации по y функции $C\left(x, y\right) = \psi\left(y\right) \cdot H\left(x/y\right)$ в области $\{y \mid x < y < 0.5\}$. Обозначая

$$c_{\min}\left(x\right) = 2^5 \cdot \max_{x<y<0.5} \psi\left(y\right) \cdot H\left(\frac{x}{y}\right), \quad c_{\max}\left(x\right) = 2^4 \cdot \left(H\left(x\right) - x\right),$$

получаем при $n \to \infty$

$$n \cdot 2^{n-5} \cdot c_{\min}\left(x\right) \lesssim \log M_l\left(n, k\right) < \log D_{n,k}\left(2^{n-1}\right) \sim n \cdot 2^{n-5} \cdot c_{\max}\left(x\right).$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *$M_l\left(n\right) \geqslant \left(2^{2^n}\right)^{cn}$, где $c > 1.0614 \cdot 2^{-5}$, при $n \to \infty$.*

Доказательство. Для получения нижней оценки $M_l\left(n\right)$ используем оценку из теоремы 2: $\log M_l\left(n\right) \geqslant \log M_l\left(n, k\right) \gtrsim n \cdot 2^n \cdot C\left(x, y\right)$, где $C\left(x, y\right) = \psi\left(y\right) \cdot H\left(x/y\right)$, $k/n \sim x$ и $0 < x < y < 0.5$. Значения x и y выбираются из условия максимизации функции $C\left(x, y\right)$ в области $\{(x, y) \mid 0 < x < y < 0.5\}$. Численная оптимизация этой функции двух переменных позволяет получить $C\left(0.1909, 0.3819\right) > 1.06149 \cdot 2^{-5}$. Тогда для $k \approx 0.191 \cdot n$ получаем оценку $\log M_l\left(n\right) > \log M_l\left(n, k\right) > 1.0614 \cdot n \cdot 2^{n-5}$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев А. Е.** Об одной модификации градиентного алгоритма // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика. — 1985. — № 3. — С. 29–35.
2. **Васильев Ю. Л.** К вопросу о числе минимальных и тупиковых дизъюнктивных нормальных форм // Дискрет. анализ. № 2. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. —С. 3–9.
3. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискрет. математика и мат. вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 99–148.
4. **Глаголев В. В.** Некоторые оценки д.н.ф. булевых функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. — 1967. — Т. 19. — С. 75–94.
5. **Журавлев Ю. И.** Оценка для числа тупиковых д.н.ф. функций алгебры логики //Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 802–804.
6. **Журавлев Ю. И.** Алгоритмы построения минимальных д.н.ф. // Дискрет. математика и мат. вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 67–98.
7. **Коршунов А. Д.** Сравнение сложности длиннейших и кратчайших д.н.ф. и нижняя оценка числа тупиковых д.н.ф. для почти всех булевых функций // Кибернетика. — 1969. — Т. 4. — С. 1–11.
8. **Коршунов А. Д.** О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм булевых функций // Методы дискрет. анализа в изучении булевых функций. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. — 1981. — № 37. — С. 9–41.
9. **Кузнецов С. Е.** О нижней оценке длины кратчайшей д.н.ф. почти всех булевых функций // Вероятност. методы и кибернетика. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1983. — № 19. — С. 44—47.
10. **Нигматуллин Р. Г.** Вариационный принцип в алгебре логики // Дискрет. анализ. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1967. — № 10. — С. 69–89.
11. **Сапоженко А. А., Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятности. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. — 1987. — Т. 25. — С. 68–116.
12. **Чухров И. П.** Оценки числа минимальных дизъюнктивных нормальных форм для поясковой функции // Методы дискрет. анализа в исследованиях функцион. систем. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. — № 36. — С. 74–92.
13. **Чухров И. П.** О числе минимальных дизъюнктивных нормальных форм // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 6. — С. 1335–1339.
14. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. — М.: Высш. шк., 2003. — 384 с.

15. **Pippenger N.** The shortest disjunctive normal form of a random Boolean function // Random structures&algorithms. — 2003. — Vol. 22, N 2. — P. 161–186.

Чухров Игорь Петрович,
e-mail: chip@icad.org.ru

Статья поступила
2 ноября 2010 г.