ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2011. Том 18, № 3. С. 3–10

УДК 519.8

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ РАСКРАСКИ БЕСКОНЕЧНОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКИ *)

С. В. Августинович, А. Ю. Васильева, И. В. Сергеева

Аннотация. Перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решётки.

Ключевые слова: совершенная раскраска, полностью регулярный код, бесконечная квадратная решётка.

Введение

Совершенная раскраска вершин графа характеризуется тем свойством, что все вершины одинакового цвета имеют одинаковый цветовой состав окружения (строгие определения см. ниже). Понятие дистанционно регулярной совершенной раскраски (в другой терминологии — дистанционно регулярное расслоение графа) является весьма полезным инструментом при изучении инвариантных свойств (скажем, весовых распределений) различных совершенных структур. Восходящее к Дельсарту [14] (см. также [9]), оно неоднократно переоткрывалось и подвергалось разностороннему изучению. Достаточно сказать, что в дистанционно регулярных графах дистанционное расслоение множества его вершин относительно любой вершины является совершенной раскраской, при этом параметры раскраски от выбора вершины не зависят.

Всякая совершенная раскраска в 2 цвета является дистанционно регулярной. Со случая двух цветов обычно и начинается исследование тех или иных классов графов. Для бесконечной квадратной решётки полное описание всех совершенных 2-раскрасок получено в [13], параметры трёхцветных раскрасок описаны в [8].

Значительное продвижение в описании параметров совершенных 2-раскрасок графов Кэли бесконечной циклической группы имеется в [11].

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00424–а).

Для плоских триангуляций частичное исследование проведено в [1]. Случаи гиперкуба, половинного гиперкуба и графа Джонсона рассматривались в [5–7, 10, 12]. Также в данной области есть ряд результатов, касающихся нескольких бесконечных серий транзитивных кубических графов [3].

Применяемая в работе техника напоминает процесс кристаллизации (восстановление общей картины по отдельному фрагменту), описываемый в [2, 3, 15].

1. Определения и обозначения

Раскраска вершин графа в цвета от 1 до k называется *совершенной*, если для всех не обязательно различных $i, j = 1, 2, \ldots, k$ однозначно определено целое α_{ij}, равное числу вершин цвета j в окружении каждой вершины цвета i. Матрица (α_{ij}) называется *матрицей параметров* раскраски.

Совершенная раскраска называется *дистанционно регулярной*, если её матрица параметров приводима к тридиагональному виду. Фактически это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них будет видеть лишь два соседних цвета. Понятие дистанционно регулярной раскраски напрямую связано с понятием полностью регулярного кода в графе. *Полностью регулярный код* в нашей терминологии может быть определён как множество вершин первого (или последнего) цвета дистанционно регулярной раскраски. Таким образом, из теоремы 1, в которой перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок $\mathbb{Z}^2$, вытекает полная характеризация параметров всех таких кодов в $\mathbb{Z}^2$.

2. Бесконечные серии

Всякую раскраску бесконечной n-мерной решётки можно мыслить как отображение $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \{1, 2, \ldots, k\}$. При этом везде в дальнейшем для удобства будем красить в квадратной решётке её клетки, а не вершины (граф квадратной решётки самодвойственный).

Имея раскраску $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \{1, 2, \ldots, k\}$, легко построить раскраску $\widehat{\varphi} : \mathbb{Z}^{(n+1)} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Заметим, что если φ дистанционно регулярна, то и $\widehat{\varphi}$ будет таковой, причём прибавится 2 на диагонали в матрице параметров новой раскраски по сравнению со старой.

Всего существует ровно три неэквивалентных дистанционно регулярных раскраски $\mathbb{Z}$ в $k \geqslant 2$ цветов. Они периодические, и их периоды суть $P_1 = 1, 2, \ldots, k, \ldots, 2$, $P_2 = 1, 1, 2, \ldots, k, \ldots, 2$ и $P_3 = 1, 1, 2, \ldots, k, k, \ldots, 2$. Применяя к ним описанную выше процедуру, получим три серии раскрасок (состоящих из параллельных одноцветных столбцов) и соответственно три серии матриц параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно понять, что из одномерных дистанционно регулярных раскрасок можно получить новые следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

В отличие от предыдущей конструкции эту можно применить лишь к одномерным раскраскам.

В контексте заявленной темы нас интересует лишь случай $n = 2$. Полученные раскраски состоят из параллельных одноцветных диагоналей, а соответствующие им матрицы D, E и F получаются из матриц одномерных раскрасок путём удвоения параметров:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & . & . & . & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & . & . & . & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Описанные шесть бесконечных серий дают различные матрицы за исключением совпадения матриц A и F при $k = 2$, этой матрице $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ соответствуют две различные раскраски.

Матрицы, полученные в данном разделе, будем называть *редуцируемыми*, поскольку они построены сведением к одномерному случаю.

3. Основная теорема

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Матрицы параметров дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решётки исчерпываются следующим списком*:

(i) *шесть бесконечных серий редуцируемых матриц*;

(ii) *четыре нередуцируемые матрицы порядка* 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

(iii) *пять нередуцируемых матриц порядка* 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

(iv) *две нередуцируемые матрицы порядка* 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

(v) *одна нередуцируемая матрица порядка* 5:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство пп. (ii) и (iii) сводится к простому выбору трёхдиагональных матриц (не входящих в бесконечные серии) из списков допустимых, полученных в [8, 13]. Оставшиеся пункты (случай не менее четырёх цветов) доказываются путём перебора возможных вариантов расположения первого и четвёртого цветов. При этом активно используется идея однозначного восстановления совершенной раскраски по её фрагменту и известным параметрам. Иногда даже не зная параметров частичной раскраски, мы можем прийти к выводу о её противоречивости, если при любом её продолжении некоторые две одинаково окрашенные клетки будут иметь разные цветовые составы окружения. Также оказывается полезной очевидная

Лемма 1. *Пусть клетки a и b на расстоянии d в дистанционно регулярной раскраске $\mathbb{Z}^2$ имеют цвета i и $i+d$. Тогда все кратчайшие цепи, соединяющие a и b, окрашены монотонно возрастающим образом.*

Итак, рассмотрим пару вершин первого и четвёртого цветов, находящихся на минимально возможном расстоянии друг от друга. Если всякая такая пара расположена на вертикальной либо горизонтальной прямой, то однозначно имеем раскраску из трёх бесконечных серий A, B или C.

Пусть найдётся пара вершин первого и четвёртого цветов, соединённых ходом коня (рис. 1). Согласно лемме 1 здесь однозначно определены две вершины второго и две вершины третьего цветов. Для вершины X возможны варианты 1, 2 и 3, для Y — 2, 3 и 4. Допустимыми парами (X, Y) будут следующие:

(1,4) даёт раскраски из серий D, E и F;

(3,4) даёт раскраску порядка 5 (рис. 2);

(2,3) и (3,2) дают раскраски порядка 4 (рис. 3).

Остальные варианты противоречивы. Докажем это.

	Y	
2	3	4
1	2	3
	X	

Рис. 1

2	3	4	3	2	3	4	3
3	4	**5**	4	3	4	**5**	4
2	3	4	3	2	3	4	3
1	2	3	2	**1**	2	3	2
2	3	4	3	2	3	4	3
3	4	**5**	4	3	4	**5**	4
2	3	4	3	2	3	4	3
1	2	3	2	**1**	2	3	2

Рис. 2

3	**4**	3	2	3	2	**1**	2
2	3	2	**1**	2	3	2	3
1	2	3	2	3	**4**	3	2
2	3	**4**	3	2	3	2	**1**
3	2	3	2	**1**	2	3	2
2	**1**	2	2	2	3	**4**	3
3	2	3	**4**	3	2	3	2
4	3	2	3	2	**1**	2	3

4	3	2	3	**4**	3	2	3
4	3	2	3	**4**	3	2	3
3	2	**1**	2	2	2	**1**	2
3	2	**1**	2	2	2	**1**	2
4	3	2	3	**4**	3	2	3
4	3	2	3	**4**	3	2	3
3	2	**1**	2	2	2	**1**	2
3	2	**1**	2	2	2	**1**	2

Рис. 3

Случай (1,2) (рис. 4). Этот случай самый сложный. На рис. 4a буквами обозначены клетки, цвет которых однозначно восстанавливается по лемме 1, а также с использованием информации о цветовом составе окружения вершин. Восстановление идёт в алфавитном порядке и приводит к ситуации, изображённой на рис. 4b. Легко понять, что для вершины z единственно возможным вариантом раскраски является цвет 0 (добавление этого цвета действительно приводит к раскраске в 5 цветов), но по предположению цвет 1 — наименьший; противоречие.

	2	
2	3	4
1	2	3
	1	

Рис. 4

	d	b	2	a
f	c	2	3	4
g	e	1	2	3
	h	z	1	

Рис. 4a

	2	1	2	3
4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
	1	z	1	

Рис. 4b

Случай (3,3) (рис. 5). На рис. 5 видно, что вершину z можно покрасить лишь в цвета 2 или 3, но каждый из этих вариантов немедленно приводит к противоречию. Выделенные вершины цвета 2 в первом случае и цвета 3 во втором будут иметь заведомо разные цветовые составы окружений.

Случай (2,4) (рис. 6) аналогичен случаю (3,3), оставляем его читателю. В случае (2,2) (рис. 7) любой цвет клетки z противоречив, поскольку внутренние степени цветов 2 и 3 не могут быть однозначно определены. Про последний случай (1,3) (рис. 8) скажем только, что он столь же симметричен случаю (2,2), как случай (3,3) случаю (2,4).

z	**3**	
2	**3**	4
1	**2**	3
	3	

Рис. 5

	4	
2	**3**	4
1	**2**	**3**
	2	z

Рис. 6

	2	
2	3	4
1	2	3
	2	z

Рис. 7

z	3	
2	3	4
1	2	3
	1	

Рис. 8

Заключение

Заметим, что не всегда матрица однозначно определяет раскраску. Скажем, матрица $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ допускает две неэквивалентные раскраски, а матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ — вообще несчётное количество. Большой удачей авторов является тот факт, что основные трудности при описании дистанционно регулярных раскрасок в квадратной решётке приходятся на двуцветный и трёхцветный случаи, полностью разобранные ранее в [13] и [8] соответственно. В случае бо́льшего числа цветов каждой допустимой матрице параметров соответствует единственная (с точностью до эквивалентности) раскраска.

Хочется подчеркнуть, что не так часто встречаются исследования, в которых удавалось бы дать исчерпывающее описание строения полностью регулярных кодов. Есть надежда, что в решётках больших размерностей успех также возможен. В первую очередь это связано с гипотезой о конечности числа нередуцируемых допустимых матриц для каждой фиксированной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.** Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1.— 2001. — Т. 8, № 3. — С. 3–16.
2. **Августинович С. В., Васильева А. Ю.** Теоремы восстановления для центрированных функций и совершенных кодов // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, N 3. — P. 483—489.
3. **Августинович С. В., Васильева А. Ю.** Вычисление центрированной функции по её значениям на средних слоях булева куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 3–16.
4. **Августинович С. В., Лисицына М. А.** Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 3—18.

5. **Августинович С. В., Могильных И. Ю.** Совершенные раскраски графов Джонсона $J(8,3)$ и $J(8,4)$ в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 2. — С. 3–19.
6. **Воробьев К. В., Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** О совершенных 2-раскрасках гиперкуба // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 65–75.
7. **Кротов Д. С.** О совершенных раскрасках половинного 24-куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 35–46.
8. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(\mathbb{Z}^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 37–55.
9. **Семаков Н. В., Зайцев Г. В., Зиновьев В. А.** Равномерно упакованные коды // Проблемы передачи информации. — 1971. — Т. 7, вып. 1. — С. 38–50.
10. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 924–931.
11. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. Т. 16, № 1. — С. 80–92.
12. **Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu.** Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6,3)$ and $J(7,3)$ // — Berlin: Springer-Verl., 2008. — P. 11–19. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5228.)
13. **Axenovich M.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. — Vol. 268, N 1–3. — P. 31–49.
14. **Delsarte P.** An algebraic approach to the association schemes of coding theory // Philips Research Reports Supplements. — 1973. — Vol. 10. — P. 1–97.
15. **Puzynina S. A., Avgustinovich S. V.** On periodicity of two-dimensional words // Theoret. Comput. Sci. — 2008. — Vol. 391. — P. 178–187.

Августинович Сергей Владимирович,
e-mail: avgust@math.nsc.ru

Васильева Анастасия Юрьевна,
e-mail: vasilan@math.nsc.ru

Сергеева Ирина Владимировна,
e-mail: for.iriss@gmail.com

Статья поступила
26 ноября 2010 г.

Переработанный вариант —
5 марта 2011 г.