ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2011. Том 18, № 3. С. 11–20

УДК 519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ВЕРСИИ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ *)

Э. Х. Гимади, В. Т. Дементьев

Аннотация. Рассматривается децентрализованная полуобобщённая задача о назначениях с $m \times n$-матрицей, где $m = kn$, k — натуральное число. Элементы матрицы — неотрицательные числа. В каждом столбце матрицы выбирается k элементов, в каждой строке — один элемент так, чтобы максимизировать сумму выбранных элементов. Предложен приближённый алгоритм решения с временно́й сложностью $O(mn)$. В случае, когда элементы матрицы являются независимыми случайными величинами с общей функцией равномерного распределения, найдены оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания алгоритма, а также обоснована асимптотическая точность алгоритма.

Ключевые слова: децентрализованная транспортная задача, NP-трудность, приближённый алгоритм, асимптотическая точность, теорема Петрова, равномерное распределение.

1. Постановка задачи и предварительные сведения

В [6] рассмотрены задача транспортного типа (ТЗ) на максимум:

$$\max_{\{x_{ij}\}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \geqslant 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \right\}$$

и её децентрализованный вариант.

Содержательный смысл ТЗ состоит в централизованном распределении инвестором (лицом, принимающим решение) m видов ресурсов в количествах a_i, $i = \overline{1,m}$, среди n производств (производителей) с объёмами

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00516, 10–01–00149 и 10–07–00195), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 30, а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

спроса b_j, $j = \overline{1, n}$, с целью максимизации суммарного дохода. Здесь c_{ij} — доход, получаемый инвестором при выделении j-му производителю одной единицы ресурса i-го вида, x_{ij} — количество ресурса i-го вида, выделяемое j-му производителю, a_i, b_j — натуральные числа. Предполагается выполнение условия баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

В децентрализованной версии задачи (ДТЗ) предлагается другая дисциплина распределения ресурсов. Здесь каждый производитель действует индивидуально. Получая доступ к имеющимся ресурсам, он выбирает свою квоту, максимизируя только свой собственный доход. При этом инвестор имеет возможность устанавливать очерёдность подхода производителей к ресурсам. Его доход пропорционален доходу производителей по каждому виду ресурсов.

Такая дисциплина распределения ресурсов приводит нас к модели двухуровневого принятия решений, где первый уровень — инвестор, задающий порядок доступа производителей к ресурсам, второй уровень — производители, выбирающие выгодные им ресурсы согласно установленной очерёдности. Цель инвестора — найти порядок π (перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$), при котором суммарный доход производителей $f(\pi)$ максимален, а следовательно, максимален и его доход.

В результате имеем следующую задачу двухуровневого программирования:

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i\pi_j} x^*_{i\pi_j} \to \max_{\pi},$$

где $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ — очерёдность обслуживания производителей, задаваемая перестановкой столбцов матрицы (c_{ij}); (x^*_{ij}) — матрица, столбцы которой получаются в результате последовательного решения задач

$$\max_{\{x_{i\pi_j}\}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_{i\pi_j} x_{i\pi_j} \mid \sum_{i=1}^{m} x_{i\pi_j} = b_{\pi_j},\ 0 \leqslant x_{i\pi_j} \leqslant a_i - \sum_{l=1}^{j-1} x^*_{i\pi_l} \right\},\ j = \overline{1, n},$$

определяющих максимальные доходы каждого производителя в очерёдности π.

Для частного случая транспортной задачи, когда $a_i = 1$, $i = \overline{1, m}$, а $b_j \in N$, $j = \overline{1, n}$, который в англоязычной литературе имеет название semi-assignment problem [8], мы предлагаем использовать термин полуобобщённая задача о назначении (сокращённо ОЗН). Соответствующую ей децентрализованную задачу обозначим через ДОЗН. В ДОЗН при выбранной очерёдности π сначала из исходной матрицы (c_{ij}) выбираются b_{π_1} наибольших элементов столбца π_1, после чего этот столбец и строки с выбранными элементами из матрицы удаляются. Далее в сокращённой матрице выбираются очередные b_{π_2} наибольших элементов в столбце π_2, после чего столбец и соответствующие строки также удаляются. Аналогичные действия повторяются до тех пор, пока в качестве выбранных не окажутся оставшиеся элементы последнего столбца π_n.

В свою очередь, частный случай ОЗН, когда для всякого $j = \overline{1,n}$ объём спроса b_j одинаков и равен натуральному числу $k > 1$, обозначим через ОЗН(k), а соответствующую ей децентрализованную задачу — через ДОЗН(k). Из условия баланса следует $m = kn$. В [6] установлен сложностной статус частных случаев задачи ДОЗН(k) при $k = 1$ и $k = 2$: задача ДОЗН(1) полиномиально разрешима, а задача ДОЗН(2) NP-трудна. В ней же представлен полиномиальный приближённый алгоритм решения ДОЗН(k). Алгоритм за время $O(mn^2)$ гарантирует получение решения, не более чем в k раз худшего оптимального. Более того, показано, что константа в оценке точности этого алгоритма неулучшаема.

Настоящая статья направлена на дальнейшее исследование ДОЗН(k), и её целью являются установление сложностного статуса ДОЗН(k) при $k > 2$, построение полиномиального приближённого алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи и обоснование асимптотической точности решения, получаемого посредством построенного алгоритма в случае матрицы (c_{ij}), элементами которой являются независимые одинаково равномерно распределённые случайные величины со значениями на некотором отрезке. Без ограничения общности полагается, что значения c_{ij} принадлежат отрезку $[0, 1]$.

В следующем разделе показано, что из NP-трудности задачи ДОЗН(2) следует NP-трудность ДОЗН(k) при $k > 2$ (что, естественно, влечёт также NP-трудность задач ДОЗН и ДТЗ). Далее приводится описание приближённого полиномиального алгоритма $\widetilde{A}$ решения ДОЗН(k) с временнóй сложностью $O(mn)$.

В заключительном разделе статьи проведён вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$. Даются оценки качества алгоритма $\widetilde{A}$ — относительная погрешность и вероятность несрабатывания, а также приводится обоснование его асимптотической точности.

2. Сложностной статус задачи ДОЗН(k) и описание приближённого алгоритма её решения

2.1. NP-трудность ДОЗН(k) при $k > 2$. Как было отмечено выше, задача полиномиально разрешима при $k = 1$ и труднорешаема при $k = 2$. Покажем, что при $k > 2$ задача также труднорешаема.

Теорема 1. *Задача* ДОЗН(k) *при* $k > 2$ NP-*трудна.*

Доказательство. Покажем, что к задаче ДОЗН(k) при $k > 2$ полиномиально сводится задача ДОЗН(2). Действительно, пусть на входе задачи ДОЗН(2) задана $2n \times n$-матрица (c_{ij}). Обозначим через (c^+_{ij}) $2n \times n$-матрицу с элементами $c^+_{ij} = c_{ij} + \gamma$, где γ — произвольное положительное число. Пусть D — диагональная $n \times n$-матрица с достаточно большими значениями диагональных элементов Δ. Формируем вход задачи ДОЗН(k) в виде расширенной матрицы размера $m \times n$, где $m = kn$, посредством добавления $k-2$ диагональных матриц D к матрице (c^+_{ij}). Очевидно, из оптимального решения ДОЗН(k) с таким расширенным входом мы за полиномиальное время получаем также оптимальное решение задачи ДОЗН(2) лишь с той разницей, что значения целевых функций задач отличаются на константу, равную $n(2\gamma + (k-2)\Delta)$. Из NP-трудности задачи ДОЗН(2) и полиномиальной сводимости её к задаче ДОЗН(k), $k > 2$, следует NP-трудность последней. Теорема 1 доказана.

Таким образом, NP-трудность задачи ДОЗН(k) имеет место в расширенном диапазоне $k \geqslant 2$. Напомним ещё раз, что по условию баланса на параметры k, m, n задачи ДОЗН(k) наложено ограничение $m = kn$.

2.2. Описание приближённого алгоритма решения ДОЗН(k).

Алгоритм $\widetilde{A}$.

Шаг 1 (предварительный).

1.1. Выберем произвольную перестановку, скажем, $\widetilde{\pi} = (n, n-1, \dots, 1)$.

1.2. Все строки матрицы (c_{ij}) считаем непомеченными.

1.3. Полагаем $s = 1$, $\mu = m$, $\widetilde{f} = 0$.

Шаг 2 (общий) $s = \overline{1, n}$.

2.1. Среди непомеченных строк в столбце $j = \widetilde{\pi}_s$ матрицы (c_{ij}) выбираем k наибольших элементов.

2.2. Увеличиваем значение целевой функции $\widetilde{f} := \widetilde{f} + \sum\limits_{i \in I_j} c_{ij}$, где I_j — множество индексов строк элементов матрицы, выбранных в столбце j.

2.3. Полагаем

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2.4. Помечаем строки с индексами $i \in I_j$.

2.5. Полагаем $\mu := \mu - k$; $s := s + 1$.

Если $\mu > 0$ (т. е. не все строки помечены), то повторяем общий шаг, иначе идём на заключительный шаг 3.

Шаг 3 (заключительный). Алгоритм заканчивает свою работу выдачей приближённого значения целевой функции $f(\widetilde{\pi}) = \widetilde{f}$ и матрицы назначения $(\widetilde{x}_{ij})$.

Непосредственно из описания алгоритма $\widetilde{A}$ следует, что он выполняется за время $O(mn)$.

3. Вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$

Полученное в результате работы алгоритма $\widetilde{A}$ значение целевой функции $f_{\widetilde{\mathcal{A}}} = f(\widetilde{\pi})$ состоит из суммы $m = kn$ выбранных элементов матрицы (c_{ij}). Для задачи со случайным входом значение целевой функции $f_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ является случайной величиной.

При анализе алгоритма будем использовать следующие определения и обозначения из [3].

Алгоритм A имеет оценки $(\varepsilon_n, \delta_n)$ в классе $\mathcal{K}_n$ задач максимизации размерности n, если для каждого n выполнено неравенство

$$\mathbf{Pr}\{f_A(I) < (1 - \varepsilon_n) f^*(I)\} \leqslant \delta_n,$$

где $f^*(I)$ — оптимальное значение целевой функции индивидуальной задачи I, $f_A(I)$ — значение целевой функции, полученное при помощи алгоритма A, $\mathbf{Pr}\{J\}$ — вероятность события J, ε_n — относительная погрешность, δ_n — вероятность несрабатывания алгоритма A.

Отметим, что вероятность несрабатывания δ_n можно трактовать как долю случаев, когда не гарантируется получение решения с анонсированной точностью (относительной погрешностью ε_n).

Алгоритм в классе задач $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ называется *асимптотически точным*, если для него существуют оценки $(\varepsilon_n, \delta_n)$ такие, что $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее рассматривается класс $\widetilde{\mathcal{K}}$ входных $m \times n$-матриц (c_{ij}), где элементы c_{ij} — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$.

Сформулируем основной результат вероятностного анализа алгоритма $\widetilde{A}$.

Теорема 2. *Для всякого натурального $k \geqslant 2$ алгоритм $\widetilde{A}$ решения задачи* ДОЗН(k) *на классе $\widetilde{\mathcal{K}}$ случайных входов является асимптотически точным.*

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА нам понадобится получить оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$ (см. теорему 3).

Запишем значение целевой функции, полученное в результате работы алгоритма $\widetilde{A}$ в терминах $m \times n$-матрицы $(\overline{c}_{ij})$ с элементами $\overline{c}_{ij} = 1 - c_{ij}$. С учётом $|I_j| = k$ для всякого $j = \overline{1,n}$ имеем

$$f_{\widetilde{A}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} (1 - \overline{c}_{ij}) = m - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} \overline{c}_{ij}.$$

Понятно, что случайная матрица $(\overline{c}_{ij})$ также принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{K}}$. Заметим, что k наибольших элементов, выбранных в строках $i \in I_j$ j-го столбца матрицы (c_{ij}), соответствуют k наименьшим элементам, выбранным в строках $i \in I_j$ j-го столбца матрицы $(\overline{c}_{ij})$.

Для всяких $r = \overline{1,k}$ и $\mu = k, 2k, \ldots, nk$ через $Y_{(r)}(\mu)$ обозначим r-ю порядковую минимальную статистику в выборке, состоящей из μ случайных величин из класса $\widetilde{\mathcal{K}}$. Её математическое ожидание (см. [5, с. 41]) равно

$$\mathbf{E}Y_{(r)}(\mu) = \frac{r}{\mu + 1}. \tag{1}$$

Теперь значение целевой функции, полученное посредством алгоритма $\widetilde{A}$, можно представить в виде случайной величины

$$f_{\widetilde{A}} = m - Y, \tag{2}$$

где

$$Y = Y(\mu_1) + Y(\mu_2) + \ldots + Y(\mu_n),$$

$\mu_j = kj$, $j = \overline{1,n}$, а случайная величина $Y(\mu)$ равна сумме k минимальных статистик среди $\mu \geqslant k$ случайных величин в классе $\widetilde{\mathcal{K}}$:

$$Y(\mu) = Y_{(1)}(\mu) + \ldots + Y_{(k)}(\mu).$$

С учётом (1) получаем

$$\mathbf{E}Y(\mu) = \frac{k(k+1)}{2(\mu + 1)}. \tag{3}$$

Отметим, что порядковые статистики $Y_{(1)}(\mu_j), \ldots, Y_{(k)}(\mu_j)$ для всякого $j = \overline{1,n}$ являются зависимыми случайными величинами. Далее по существу будет использована независимость самих сумм этих порядковых статистик $Y(\mu_j) = Y_{(1)}(\mu_j) + \ldots + Y_{(k)}(\mu_j)$, $j = \overline{1,n}$.

Для вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$ с учётом очевидных соотношений $f^*_{\widetilde{\mathcal{A}}} \leqslant m$ и (2) имеем

$$\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{\mathcal{A}}} < (1-\varepsilon_n) f^*_{\widetilde{\mathcal{A}}}\} \leqslant \mathbf{Pr}\{m - Y < (1-\varepsilon_n)m\} = \mathbf{Pr}\{Y > m\varepsilon_n\}. \quad (4)$$

Оценивание вероятности больших уклонений проведём с использованием следующей предельной теоремы о сумме независимых случайных величин [7].

Теорема (Петрова). *Пусть для n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с суммой S существуют положительные постоянные $g_1, \ldots, g_n$, T такие, что*

$$\mathbf{E}e^{tX_j} \leqslant e^{\frac{1}{2} g_j t^2} \ (j = 1, \ldots, n)$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant T$. Положим $G = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j$. Тогда

$$\mathbf{Pr}\{S > x\} \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/2G}, & \textit{если} \ \ 0 \leqslant x < GT, \\ e^{-Tx/2}, & \textit{если} \ \ x \geqslant GT. \end{cases}$$

Для применения этой теоремы нам потребуется оценка математического ожидания случайных величин вида $e^{tY_{(k)}(\mu)}$, где $Y_{(k)}(\mu)$ — k-я порядковая (минимальная) статистика среди μ независимых равномерно распределённых на отрезке $(0,1)$ случайных величин. Сама величина $\mathbf{E}e^{tY_{(k)}(\mu)}$ вычисляется по формуле [5, с. 40]:

$$\mathbf{E}e^{tY_{(k)}(\mu)} = \mu C^{k-1}_{\mu-1} \int\limits_0^1 e^{tx} x^{k-1} (1-x)^{\mu-k}\, dx.$$

Напомним, что нами рассматриваются случайные входы из класса $\widetilde{\mathcal{K}}$.

Следующие два утверждения могут быть получены с использованием техники доказательства аналогичных фактов в [1, леммы 8 и 12] и [4, леммы 2 и 5].

Лемма 1. *В случае входных матриц из класса $\widetilde{\mathcal{K}}$ при всяких $2 \leqslant k \leqslant \mu \leqslant m$ и $t \leqslant 1.5/k$ справедлива оценка*

$$\mathbf{E}e^{tY_{(k)}(\mu)} \leqslant e^{\frac{kt}{\mu+1}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{kt}{\mu+1}\right)^2}.$$

Лемма 2. *При* $2 \leqslant k \leqslant \mu/2$ *и* $t \leqslant 1.5/k$ *справедлива оценка сверху*

$$\mathbf{E}e^{tY(\mu)} \leqslant \mathbf{E}\exp\left(\frac{(1+\rho)(k+1)}{2}\, t\, Y_{(k)}(\mu)\right),$$

где $\rho = \frac{1}{12k}$.

Пусть $\beta_j = \frac{k(k+1)}{2(\mu_j+1)}$, $g_j = (1+\rho)^2\beta_j^2$, $j = \overline{1,n}$. Согласно формуле (3) $\mathbf{E}Y(\mu_j) = \beta_j$, $j = \overline{1,n}$.

С учётом введённых обозначений из лемм 1 и 2 непосредственно следует

Лемма 3. *При* $t \leqslant 1.5/k$ *для центрированных независимых случайных величин* $\dot{Y}(\mu_j) = Y(\mu_j) - \mathbf{E}Y(\mu_j)$ *имеют место неравенства*

$$\mathbf{E}e^{t\dot{Y}(\mu_j)} \leqslant e^{\rho\beta_j t}\, e^{\frac{1}{2}g_j^2 t^2}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Лемма 4. *Справедливы неравенства*

$$\mathbf{E}Y = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}Y(\mu_j) \leqslant \frac{k\ln n}{1+\rho}, \quad G = \sum_{j=1}^{n} g_j \leqslant \frac{(k+1)^2}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbf{E}Y = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}Y(\mu_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2(\mu_j+1)} = \frac{k(k+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mu_j+1}$$
$$= \frac{k(k+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(jk+1)} \leqslant \frac{k+1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \leqslant \frac{k\ln n}{1+\rho},$$

$$G = \sum_{j=1}^{n} g_k = \sum_{j=1}^{n}(1+\rho)^2\beta_j^2 = (1+\rho)^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2(\mu_j+1)}\right)^2$$
$$= \left(\frac{(1+\rho)(k+1)}{2}\right)^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} \leqslant \frac{(k+1)^2}{2}.$$

Теорема 3. *Алгоритм* $\widetilde{A}$ *решает задачу ДОЗН(k) на классе* $\widetilde{\mathcal{K}}$ *случайных входов со следующими оценками относительной погрешности и вероятности несрабатывания*:

$$\varepsilon_n = (1+\lambda)\frac{\ln n}{n}, \quad \delta_n = \frac{1}{n^{3\lambda/4}}\,, \tag{5}$$

где λ — *константа, большая* 1.

Доказательство. Обозначим через S сумму n случайных независимых величин

$$X_j = \dot{Y}(\mu_j) - \rho\beta_j, \quad j = \overline{1,n},$$

где $\rho = \frac{1}{12k}$, $\beta_j = \frac{k(k+1)}{2(\mu_j+1)}$, $\quad j = \overline{1,n}$.

Согласно леммам 3 и 4 для X_j при $g_j = (1+\rho)^2\beta_j^2$, $\quad j = \overline{1,n}$, и $T = 1.5/k$ выполнены условия теоремы Петрова.

Заметив, что $Y = S + (1+\rho)\,\mathbf{E}Y$, продолжим оценивание (4) вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$ с учётом первого неравенства в лемме 4. Положив величину относительной погрешности алгоритма равной $\varepsilon_n = (1+\lambda)\,\frac{\ln n}{n}$, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{\mathcal{A}}} < (1-\varepsilon_n)f^*_{\widetilde{\mathcal{A}}}\} \leqslant \mathbf{Pr}\{Y > m\,\varepsilon_n\} = \mathbf{Pr}\{S + (1+\rho)\mathbf{E}Y > m\,\varepsilon_n\}\\ \leqslant \mathbf{Pr}\{S > m\,\varepsilon_n - k\ln n\} \leqslant \mathbf{Pr}\{S > \lambda k \ln n\}.\end{aligned}$$

С учётом второго неравенства в лемме 4 при достаточно больших n для всякого натурального k выполнено

$$GT \leqslant \frac{3(k+1)^2}{4k} \leqslant \lambda k \ln n.$$

Отсюда, полагая $x = \lambda k \ln n$, согласно теореме Петрова имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}\{f_{\widetilde{\mathcal{A}}} < (1-\varepsilon_n)f^*_{\mathcal{A}}\} \leqslant \mathbf{Pr}\{S > \lambda k \ln n\}\\ \leqslant \exp\left\{-\frac{T\lambda k \ln n}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{3\lambda \ln n}{4}\right\} = \frac{1}{n^{3\lambda/4}} = \delta_n.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Отсюда заключаем, что оценки (5) влекут асимптотическую точность приближённого алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи ДОЗН(k) на классе $\widetilde{\mathcal{K}}$ случайных входов, что и требовалось доказать в теореме 2.

4. Заключение

Рассмотрена децентрализованная полуобобщённая задача о назначениях ДОЗН(k) с входной $m \times n$-матрицей, где $m = kn$. Показана её NP-трудность при $k > 2$. Отсюда также вытекает NP-трудность задач ДОЗН и ДТЗ.

Для решения ДОЗН(k) представлен приближённый полиномиальный алгоритм $\widetilde{A}$ с временно́й сложностью $O(mn)$. В случае, когда элементы матрицы являются случайными независимыми величинами с общей функцией равномерного распределения, проведён вероятностный анализ представленного алгоритма.

Из анализа работы алгоритма решения задачи ДОЗН(k) на рассматриваемом классе случайных входов следует, что при любой очерёдности производителей алгоритм асимптотически точен. Тем самым в определённой степени снимается вопрос об отыскании оптимальной перестановки π. В дальнейшем было бы интересным распространение этого факта применительно к ДОЗН.

Также определённый интерес представляет рассмотрение распределений случайных входных данных задачи ДОЗН(k), отличных от равномерного и для которых возможно построение полиномиального асимптотически точного алгоритма решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Приближённый алгоритм отыскания d-однородного регулярного остовного связного подграфа максимального веса в полном графе со случайными весами рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 3–20.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
3. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. — 1975. — Вып. 31. — С. 35–42.
4. **Гимади Э. Х.** О вероятностном анализе приближённого алгоритма решения задачи о p-медиане // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 19–31.
5. **Дейвид Г.** Порядковые статистики. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
6. **Дементьев В. Т., Пяткин А. В.** О децентрализованной транспортной задаче // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 22–30.
7. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — М.: Наука, 1987. — 416 с.
8. **Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.** Assignment problems. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 378 p.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Дементьев Владимир Тихонович,
e-mail: dementev@math.nsc.ru

Статья поступила
11 марта 2010 г.

Переработанный вариант —
12 апреля 2011 г.