ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2011. Том 18, № 3. С. 49–64

УДК 519.8

ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ *)

Л. А. Заозёрская, А. А. Колоколов, Н. Г. Гофман

Аннотация. Построены полиномиальные верхние оценки среднего числа итераций для ряда алгоритмов целочисленного программирования при решении многомерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными и задачи об упаковке множества на основе предложенного ранее подхода. Описаны расширения известных классов задач, для которых имеют место подобные оценки.

Ключевые слова: среднее число итераций, задача о рюкзаке, задача об упаковке множества, отсечение Гомори, алгоритм ветвей и границ, алгоритм перебора L-классов.

Введение

Значительное число работ в области исследования трудоёмкости алгоритмов оптимизации проведено на основе анализа худшего случая, т. е. анализа максимально возможного числа операций, выполняемых алгоритмом на любых исходных данных рассматриваемой задачи. Вместе с тем существенное значение для более полной оценки возможностей алгоритмов имеет наличие информации о поведении алгоритмов в среднем. Такие исследования выполнены, в частности, для симплекс-метода, некоторых алгоритмов дискретной оптимизации при решении одномерной и многомерной задач о рюкзаке, задачи поиска гамильтонова цикла, задачи о выполнимости и др. [2, 9, 11, 13–16, 18, 19].

В [5, 6] предложен и развит подход к построению верхних оценок среднего числа итераций для ряда известных алгоритмов целочисленного линейного программирования (ЦЛП), а именно некоторых алгоритмов отсечения, метода ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг), алгоритма перебора L-классов. На основе этого подхода построены оценки указанного типа для задачи об упаковке множества. Идея подхода состоит в

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00598).

использовании детерминированных верхних оценок числа итераций, полученных в рамках метода регулярных разбиений [7] (в частности, для L-разбиения и нижнего кубического разбиения), и верхних оценок среднего числа допустимых решений задач ЦЛП. Для многомерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными и задачи об упаковке множества такие оценки числа допустимых решений построены в [4, 9, 10].

Наша статья посвящена построению верхних оценок среднего числа итераций для указанных алгоритмов ЦЛП при решении рассматриваемых задач на основе предложенного подхода. Для некоторых расширений изученных ранее классов задач о рюкзаке и упаковке множества получены новые полиномиальные верхние оценки среднего числа итераций, построенные с использованием оценок мощности множества допустимых решений из [9].

В разд. 1 описаны исследуемые классы задач и приведены необходимые сведения о методе регулярных разбиений. Разд. 2 посвящен анализу первого алгоритма Гомори и его модификации, предложенной в [5]. В разд. 3 изучаются алгоритмы перебора L-классов и ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг). В разд. 4 представлены результаты для расширений классов задач о рюкзаке и об упаковке множества из [9].

1. Предварительные сведения

1.1. Постановки задач. Приведём модель ЦЛП для многомерной задачи о рюкзаке:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Здесь a_{ij}, c_j, b_i — неотрицательные целые числа, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор переменных задачи. При $c_j = 1$, $j = 1, \dots, n$, задача называется *невзвешенной*.

Если ограничения (2) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant 1, \quad i = 1, \dots, m, \tag{4}$$

где $a_{ij} \in \{0,\ 1\}$, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$, то задача (1), (3), (4) является моделью ЦЛП для задачи об упаковке множества. Как известно, обе указанные задачи принадлежат классу NP-трудных [3], а соответствующие им линейные релаксации — классу P [11].

Для задач со случайными исходными данными время работы алгоритма является случайной величиной. Алгоритм $\mathcal{A}$ называется *полиномиальным в среднем*, если среднее время его работы $T_{\mathcal{A}}$ ограничено полиномом от длины входа W, т. е. существует $\mu > 0$ такое, что $\mathbf{E}T_{\mathcal{A}} = O(W^{\mu})$, где $\mathbf{E}\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ.

В [9] показано, что для задач о рюкзаке и об упаковке множества предложенный алгоритм динамического программирования (ДП) является полиномиальным в среднем при некотором распределении входных данных, а именно математическое ожидание времени работы (числа операций) алгоритма ДП равно $O(n^2 m)$. Этот результат основан на полученной там же оценке

$$\mathbf{E}|D(n)| \leqslant 2n + 1, \tag{5}$$

где $D(n)$ — множество допустимых решений исследуемых задач, а $|D(n)|$ — его мощность ($D(n) \subseteq B^n = \{0,1\}^n$).

Приведём описание предложенного в [9] класса задач о многомерном рюкзаке. Пусть векторы c и b фиксированы, а все элементы матрицы A — независимые случайные величины. Ненулевые элементы a_{ij} матрицы A удовлетворяют условию $P\{a_{ij} = h\} = p$ при $h = 1, \ldots, B$, а для нулевых a_{ij} имеем $P\{a_{ij} = 0\} = 1 - pB > 0$, где $B = \max\limits_{i=1,\ldots,m} b_i$. Кроме того, параметры задачи (1)–(3) удовлетворяют условию

$$m(pB)^2 \geqslant\ \gamma \ln n, \tag{6}$$

где $\gamma \geqslant 13$.

Параметры предложенного в [9] класса задач об упаковке множества (1), (3), (4) удовлетворяют неравенству

$$mp^2 \geqslant \ln n, \tag{7}$$

где p — вероятность появления единицы в матрице A, т. е. $P\{a_{ij} = 1\} = p$ и $P\{a_{ij} = 0\} = 1 - p,\ \ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$. Далее этот класс задач будем обозначать через $\mathcal{P}(n, m, p)$.

В отличие от [9] для исследуемого нами класса задач о рюкзаке вероятность появления нуля в матрице A может быть равной нулю. В этом случае имеем равномерное дискретное распределение значений элементов матрицы A на множестве $\{1, \ldots, B\}$. Параметры задачи (1)–(3) удовлетворяют условию (6). Такой класс задач обозначим через $\mathcal{K}(n, m, p)$.

1.2. Метод регулярных разбиений. Приведём необходимые сведения о методе регулярных разбиений [7, 8], который будет использован нами для анализа алгоритмов решения задач о рюкзаке и упаковке множества. Пусть рассматривается следующая задача поиска лексикографически максимального элемента:

$$\text{найти } z^* = \operatorname{lexmax}(\Omega \cap Z^n), \tag{8}$$

где $\Omega \neq \varnothing$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Отметим, что в этом случае соответствующая непрерывная задача

$$\text{найти } x^* = \operatorname{lexmax} \Omega$$

разрешима. В алгоритмах отсечения и ряде других методов решения задач целочисленного программирования, основанных на аппарате непрерывной оптимизации, в процессе решения задачи (8) из Ω должны быть исключены все точки множества

$$\Omega_* = \{x \in \Omega \mid x \succ z \text{ для всех } z \in \Omega \cap Z^n\},$$

которое называется *дробным накрытием* задачи. Здесь $\succ$ — знак лексикографического сравнения векторов.

Одним из широко используемых регулярных разбиений пространства $\mathbb{R}^n$ является L-разбиение, определяемое следующим образом [7]. Каждая точка из Z^n образует отдельный L-класс, т. е. элемент разбиения. Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \succ y$ и $x, y \notin Z^n$) принадлежат одному дробному L-классу, если не существует $z \in Z^n$ такого, что $x \succ z \succ y$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Фактор-множество X/L называется *L-структурой* X, а его мощность обозначается через $|X/L|$. Для ограниченного множества X можно записать

$$X/L = \{V_1, \ldots, V_r\}, \quad \text{где } V_i \succ V_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, r-1.$$

Здесь $V_i \succ V_{i+1}$ означает, что для любых $x \in V_i$, $y \in V_{i+1}$ выполнено $x \succ y$.

Подмножество $Q = \{V_k, V_{k+1}, \ldots, V_l\}$ дробных классов из X/L называется *L-комплексом*, если не существует $z \in X \cap Z^n$ такого, что $V_k \succ z \succ V_l$. Через $C(X)$ обозначим совокупность всех L-комплексов, порождаемых X, и определим $\Psi(X) = \max\{|Q| \mid Q \in C(X)\}$.

Пусть
$$f(x) \to \max, \quad x \in M \cap Z^n, \tag{9}$$
— задача ЦЛП, где M — её релаксационный многогранник, причём все исходные данные предполагаются целочисленными. В рамках метода регулярных разбиений получены детерминированные верхние оценки [7] числа итераций для ряда алгоритмов отсечения, перебора L-классов, алгоритма Лэнд и Дойг через мощность структуры множества M относительно подходящего регулярного разбиения.

Для первого алгоритма Гомори такая оценка числа итераций (отсечений) получена через мощность L-накрытия множества
$$\widehat{M} = \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = f(x),\ x \in M\},$$
являющегося расширением релаксационного множества M задачи ЦЛП.

Отсечения первого алгоритма Гомори являются *L-регулярными* [7]. Такое отсечение, сохраняя все допустимые целочисленные точки, исключает вместе с оптимальным решением текущей задачи линейного программирования (ЛП) содержащий его L-класс множества $\widehat{M}$. Верхней оценкой числа отсечений этого алгоритма служит величина $|\widehat{M}_*/L|$, где $\widehat{M}_*$ — дробное накрытие задачи вида (8) для $\Omega = \widehat{M}$.

Обозначим через $f^*, \widetilde{f}$ оптимальные значения целевой функции задачи ЦЛП и соответствующей ей задачи ЛП. Ранее нами установлено [7], что
$$|\widehat{M}_*/L| \leqslant (\lfloor \widetilde{f} \rfloor - f^* + 1)(|M/L| - |D(n)| + 1). \tag{10}$$
Здесь и далее $\lfloor u \rfloor$ — нижняя целая часть числа $u \in R$.

Используя тривиальную оценку $|D(n)| \geqslant 1$ для задачи о рюкзаке и оценку $|D(n)| \geqslant n + 1$ для задачи об упаковке множества, из (10) получаем неравенства
$$|\widehat{M}_*/L| \leqslant (\lfloor \widetilde{f} \rfloor - f^* + 1)|M/L|, \tag{11}$$
$$|\widehat{M}_*/L| \leqslant (\lfloor \widetilde{f} \rfloor - f^* + 1)(|M/L| - n). \tag{12}$$

Таким образом, для рассматриваемых задач число отсечений первого алгоритма Гомори оценивается через мощность L-структуры многогранника M задачи ЛП. Как будет показано далее, верхняя оценка для $|M/L|$ может быть получена через величину $|D(n)|$.

В разд. 3 для алгоритма перебора L-классов и алгоритма Лэнд и Дойг приведены оценки числа итераций, построенные также на основе L-разбиения и одного из кубических разбиений.

2. Анализ первого алгоритма Гомори

2.1. О мощности L-структуры. Через M_K обозначим релаксационный многогранник задачи о рюкзаке, определяемый условиями (2) и неравенствами

$$0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ранее показано, что мощность L-комплексов из M_K/L не превосходит числа переменных [7], т. е.

$$\Psi(M_K) \leqslant n. \tag{13}$$

Лемма 1. *При решении задач о рюкзаке из класса $\mathcal{K}(n, m, p)$ математическое ожидание мощности M_K/L не превосходит $2n^2 + 3n + 1$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{lexmin} M_K = (0, \ldots, 0)$ и для $\Psi(M_K)$ имеет место (13), число дробных L-классов в M_K/L можно оценить сверху величиной $n|D(n)|$. Отсюда для мощности L-структуры следует, что

$$|M_K/L| \leqslant |D(n)| + n|D(n)| = (n+1)|D(n)|.$$

Это неравенство выполняется и для соответствующих математических ожиданий. Отсюда с учётом (5) получаем, что

$$\mathbf{E}|M_K/L| \leqslant 2n^2 + 3n + 1.$$

Лемма 1 доказана.

Напомним, что многогранник M обладает *альтернирующей* L-структурой [7], если для множества M/L имеет место чередование в отношении лексикографического порядка целочисленных точек и дробных L-классов и, кроме того, лексикографически максимальный и минимальный элементы M/L являются целочисленными. Для таких множеств

$$|M/L| \leqslant 2|D_M(n)| - 1,$$

где $|D_M(n)|$ — число целочисленных точек из M. Если в M имеется $x \notin Z^n$, то для этих множеств $\Psi(M) = 1$.

Обозначим через M_P релаксационный многогранник задачи об упаковке, который определяется условиями (4) и неравенствами $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Из свойства альтернируемости L-структуры релаксационного многогранника задачи об упаковке [7] и оценки (5) вытекает

Лемма 2. *Для задач об упаковке множества из класса* $\mathcal{P}(n, m, p)$ *имеет место оценка*

$$\mathbf{E}|M_P/L| \leqslant 4n + 1.$$

Ниже на основе лемм 1 и 2 будет проведён анализ некоторых алгоритмов ЦЛП при решении задач из классов $\mathcal{K}(n, m, p)$ и $\mathcal{P}(n, m, p)$.

2.2. Оценки для первого алгоритма Гомори. Рассмотрим один из классических алгоритмов отсечения ЦЛП — первый алгоритм Гомори [12, 17]. Для задачи о рюкзаке (1)–(3) в алгоритме используются симплексные таблицы размера $(2n + m + 1) \times (n + 1)$, начальная из которых $\widetilde{A}^{(0)}$ приведена далее. Нулевая строка таблицы соответствует целевой функции задачи, т. е. $x_0 = f(x)$, а строки с номерами $n+m+1, \ldots, 2n+m$ отражают условия $x_j \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $\widetilde{a}_{ij}$ элементы симплексной таблицы, соответствующей оптимальному решению текущей задачи ЛП, $i = 0, 1, \ldots, 2n + m$, $j = 0, 1, \ldots, n$. В качестве производящей для отсечения выбирается строка с номером $v = \min\{i \mid \widetilde{a}_{i0} \notin Z,\ i = 0, 1, \ldots, n\}$.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_n$
x_0	0	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$
x_1	0	-1	0	$\ldots$	0
x_2	0	0	-1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	0	0	0	$\ldots$	-1
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}
x_{n+m+1}	1	1	0	$\ldots$	0
x_{n+m+2}	1	0	1	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{2n+m}	1	0	0	$\ldots$	1

Отсечение Гомори имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \{\widetilde{a}_{vj}\} t_j \geqslant \{\widetilde{a}_{v0}\}, \tag{14}$$

где $t_j,\ j = 1, \ldots, n,$ — текущие небазисные переменные, $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ — дробная часть числа $u \in R$. Рассматриваемый вариант алгоритма Гомори будем обозначать через G_1.

Пусть $I(\widehat{M}_K)$ число итераций (отсечений) алгоритма G_1, выполняемых при решении задачи (1)–(3). Так как $\widetilde{f} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} c_j$, из оценки (11) для числа отсечений Гомори имеем

$$|(\widehat{M_K})_*/L| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} c_j + 1\right)|M_K/L|. \tag{15}$$

Тогда из леммы 1 следует, что

$$\mathbf{E}|(\widehat{M_K})_*/L| \leqslant (2n^2+3n+1)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j + 1\right) \leqslant (2n^2+3n+1)(n\widetilde{c}+1),$$

где $\widetilde{c} = \max\limits_{j=1,\ldots,n} c_j$.

Так как

$$\mathbf{E}I(\widehat{M}_K) \leqslant \mathbf{E}|(\widehat{M}_K)_*/L|,$$

имеет место следующая

Теорема 1. *При решении задач о рюкзаке из класса $\mathcal{K}(n,m,p)$ среднее число отсечений алгоритма G_1 не превосходит $(2n^2+3n+1)(n\widetilde{c}+1)$.*

Следствие 1. *Полиномиальная верхняя оценка среднего числа итераций для невзвешенной задачи о рюкзаке из класса $\mathcal{K}(n,m,p)$ имеет вид*

$$\boldsymbol{E}I(\widehat{M}_K) \leqslant (n+1)\boldsymbol{E}|M_K/L| \leqslant 2n^3+5n^2+4n+1.$$

Проведя аналогичные рассуждения для задач об упаковке множества (1), (3), (4) из класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ и используя лемму 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При решении невзвешенных задач об упаковке множества из класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ среднее число отсечений алгоритма G_1 не превосходит $3n^2+n$.*

Нами предложен модифицированный вариант этого алгоритма, который имеет полиномиальную верхнюю оценку среднего числа итераций для задач из рассматриваемых классов при произвольных фиксированных c_j, $j = 1,\ldots,n$.

2.3. Исследование модификации алгоритма Гомори. В отличие от первого алгоритма Гомори в предлагаемой модификации число отсечений зависит от мощности L-структуры релаксационного множества задачи, а не его расширения.

Рассмотрим следующий *двойственный дробный алгоритм отсечения* [7, 8], который обозначим через G. Он начинает работу с лексикографически максимального элемента множества M, под которым далее понимаем релаксационное множество M_K или M_P. В зависимости от вида текущего элемента переход к следующему элементу множества M/L выполняется с помощью отсечения Гомори или линейного неравенства, исключающего допустимые решения задачи со значением целевой функции, не превышающим её текущего наилучшего значения. При описании алгоритма через x'' обозначим наилучшее текущее решение, найденное с помощью G. Если ρ — значение целевой функции на некотором известном допустимом решении x', то положим $x'' := x'$. Если такое x' неизвестно, то $\rho = 0$. Приведём подробное описание алгоритма для решения задачи о рюкзаке.

Алгоритм G

Шаг 0. Полагаем $k = 0$. Рассмотрим задачу

$$\text{найти} \qquad \operatorname{lexmax} M_{\rho+1} = \left\{ x \in M_K \mid \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant \rho + 1 \right\}.$$

Составим для неё симплексную таблицу $\widetilde{A}^{(0)}$ размера $(2n + m + 1) \times (n + 1)$ следующего вида:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_n$
x_1	0	-1	0	$\dots$	0
x_2	0	0	-1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	0	0	0	$\dots$	-1
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}
x_{n+m+1}	1	1	0	$\dots$	0
x_{n+m+2}	1	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{2n+m}	1	0	0	$\dots$	1
x_{2n+m+1}	$-\rho - 1$	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$

Шаг 1. Начиная с таблицы $\widetilde{A}^{(k)}$, решаем задачу поиска лексикографического максимума, используя лексикографический двойственный симплекс-метод (ЛДСМ) [12]. Если множество её допустимых решений

пусто, то процесс заканчивается, x'' — оптимальное решение задачи о рюкзаке. Иначе полагаем $k := k+1$. Пусть $x^{(k)}$ — оптимальное решение задачи, а $\widetilde{A}^{(k)}$ — соответствующая оптимальная симплексная таблица. Переходим на шаг 2.

Шаг 2. Если $x^{(k)} \in B^n$, то $\widetilde{a}^{(k)}_{2n+m+1,0} := \widetilde{a}^{(k)}_{2n+m+1,0} - f(x^{(k)}) + f(x'')$, $x'' := x^{(k)}$ и переходим на шаг 1. Иначе выполняем переход на шаг 3.

Шаг 3. Находим $v = \min\bigl\{i \mid \widetilde{a}^{(k)}_{i0} \notin Z, i = 1, \ldots, n\bigr\}$. Используя строку симплексной таблицы $\widetilde{A}^{(k)}$ с номером v, построим отсечение Гомори (14).

Шаг 4. Присоединим отсечение Гомори к текущей симплексной таблице $\widetilde{A}^{(k)}$. Выполним симплексную итерацию ЛДСМ с ведущей строкой $2n+m+2$. После такого преобразования эта строка соответствует некоторой небазисной переменной и может быть удалена из таблицы. Переходим на шаг 1 с преобразованной таблицей $\widetilde{A}^{(k)}$.

Процесс G строит конечную последовательность точек $x^{(k)}$ таких, что

$$x^{(1)} \succ x^{(2)} \succ \ldots .$$

Действительно, каждое отсечение Гомори исключает из M/L по крайней мере элемент, содержащий нецелочисленное оптимальное решение текущей задачи ЛП. Целочисленные точки $x^{(k)}$ данной последовательности исключаются из M/L на шаге 2 неравенством вида

$$f(x) \geqslant f(x^{(k)}) + 1.$$

Таким образом, число итераций алгоритма G, т. е. число решённых на шаге 1 задач ЛП, не превосходит $|M/L|$, а для числа отсечений Гомори имеем оценку

$$|M/L| - |D(n)| \leqslant |M/L| - 1.$$

Отсюда и из леммы 1 следует

Теорема 3. *Для задач из класса $\mathcal{K}(n, m, p)$ среднее число отсечений Гомори алгоритма G не превосходит $2n^2 + 3n$.*

В алгоритме G для задачи об упаковке множества в качестве начального рекорда целевой функции можно выбрать $\rho = \max\limits_{j=1,\ldots,n} c_j$. В данном случае в процессе решения не могут быть построены точка $(0,\ldots,0)$ и любая из булевых точек с одной единичной компонентой, поэтому число отсечений Гомори алгоритма G не превысит $|M/L| - n - 1$. Отсюда и из леммы 2 вытекает

Теорема 4. *Для задач из класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ среднее число отсечений Гомори алгоритма G не превосходит $3n$.*

Отметим, что теоремы 3, 4 остаются верными для алгоритмов типа G, в которых используются любые L-регулярные отсечения, например, вполне регулярные отсечения булевого программирования [7].

3. О других алгоритмах

Рассмотрим вариант алгоритма перебора L-классов для задачи о рюкзаке, который далее будем обозначать через LCE [8]. Процесс начинается с точки $\overline{x} = \operatorname{lexmax} M_K$. Основной шаг решения задачи состоит в переходе от одного L-класса релаксационного множества M_K к следующему за ним в порядке лексикографического убывания с учётом рекордного значения целевой функции. Поиск представителя очередного L-класса осуществляется посредством решения не более n вспомогательных подзадач ЛП. Процесс завершается, когда не удаётся найти представителя очередного L-класса. Лучшее из найденных целочисленных решений является оптимальным.

Обозначим через $I(M_K)$ число итераций алгоритма LCE при решении задачи о рюкзаке. Имеет место оценка [7]

$$I(M_K) \leqslant |M_K/L|.$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает

Теорема 5. *При решении задач о рюкзаке из класса $\mathcal{K}(n,m,p)$ среднее число итераций алгоритма* LCE *не превосходит $2n^2+3n+1$.*

Из указанного неравенства и леммы 2 для задач об упаковке из класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ получаем, что среднее число итераций алгоритма LCE с начальным рекордом, равным $\rho_0 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} c_j$, не превосходит $3n+1$.

Кроме того, нами исследован метод ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг [17]) для решения задачи (1)–(3). Обозначим через LD алгоритм этого типа, в котором строится бинарное дерево ветвления, а верхняя оценка для каждого подмножества получается путём решения соответствующей задачи ЛП. Под числом итераций алгоритма будем понимать количество решённых задач ЛП. Для анализа данного алгоритма полезным оказалось другое регулярное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$, а именно *нижнее кубическое разбиение* δ [8], определяемое следующим образом. Каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс. Нецелочисленные точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ принадлежат одному дробному классу разбиения, если $\lfloor x_j \rfloor = \lfloor y_j \rfloor,\ j = 1,\ldots,n$.

Пусть S — последовательность приближений, порождаемая алгоритмом LD при решении задачи ЦЛП (9). Для рассматриваемого кубического разбиения δ любой дробный класс из M/δ содержит не более n элементов S [8], т. е.

$$|S| \leqslant |D(n)| + n|M_f/\delta|,$$

где $M_f = M \setminus D(n)$. Для задач о рюкзаке и об упаковке множества нижнее округление любой точки из релаксационного многогранника даёт элемент из $D(n)$. Поэтому для нижнего кубического разбиения выполняются неравенства

$$|S| \leqslant |D(n)| + n|M_f/\delta| \leqslant (n+1)|D(n)|.$$

Число итераций алгоритма LD, соответствующих неразрешимым задачам ЛП, не превосходит числа задач ЛП, имеющих нецелочисленное оптимальное решение, т. е. $n|M_f/\delta|$. Следовательно, общее число итераций алгоритма не превосходит $(2n+1)|D(n)|$. Используя оценку (5), получаем, что при решении задач о рюкзаке из класса $\mathcal{K}(n,m,p)$ и задач об упаковке множества из класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ среднее число итераций алгоритма LD не превосходит $4n^2+4n+1$.

4. Некоторые результаты для новых классов задач

Нами построено расширение класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ задач об упаковке множества, для которого имеют место полученные выше верхние оценки среднего числа итераций исследуемых алгоритмов. Рассмотрим класс задач $\widetilde{\mathcal{P}}(n,m,p)$ об упаковке множества, в котором элементы матрицы A являются независимыми случайными величинами, причём

$$P\{a_{ij}=1\} = p, \quad P\{a_{ij}=0\} = 1-p, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Кроме того, выполнено неравенство

$$p \geqslant \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{m}}}. \tag{16}$$

Лемма 3. *Для задач из класса $\widetilde{\mathcal{P}}(n,m,p)$ имеет место соотношение*

$$\boldsymbol{E}|D(n)| \leqslant 2n+1.$$

Доказательство проводится аналогично [9]. Обозначим через x^t точку из B^n, имеющую единичные координаты с номерами $j_1,\dots,j_t$.

Пусть $p(t,i)$ — вероятность того, что x^t удовлетворяет i-му ограничению из (4), а P_t — вероятность того, что x^t является допустимым решением задачи (1), (3), (4). Очевидно, что

$$P_t = \prod_{i=1}^{m} p(t,i),$$

где

$$p(t,i) = P\left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^t \leqslant 1 \right\} = P\left\{ \sum_{j\in\{j_1,\ldots,j_t\}} a_{ij} \leqslant 1 \right\}.$$

Нетрудно показать, что $p(t,i) = (1-p)^{t-1}(1+p(t-1))$. Последнее выражение можно оценить сверху через $(1-p)^{t-1}(1+p)^{t-1} = (1-p^2)^{t-1}$ [9].

Если вероятность появления единицы в матрице A удовлетворяет условию (16), то

$$\mathbf{E}|D(n)| = \sum_{t=0}^{n} C_n^t \prod_{i=1}^{m} p(t,i) \leqslant 1 + n + \sum_{t=2}^{n} C_n^t (1-p^2)^{(t-1)m}$$
$$\leqslant 1 + n + \sum_{t=2}^{n} C_n^t n^{-(t-1)} \leqslant 2n+1.$$

Лемма 3 доказана.

Заметим, что среднее число допустимых решений в классе $\mathcal{P}(n,m,p)$ имеет ту же оценку, но условие (7) имеет смысл только при $m \geqslant \ln n$. При описании класса $\widetilde{\mathcal{P}}(n,m,p)$ дополнительных условий для m и n не требуется. Кроме того, для любых m и n выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{\ln n}{m}} \geqslant \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{m}}}.$$

Таким образом, $\widetilde{\mathcal{P}}(n,m,p)$ является расширением класса $\mathcal{P}(n,m,p)$ и для него имеют место полученные выше оценки среднего числа итераций, а также оценка для алгоритма ДП из [9].

В заключение приведём вывод верхней оценки среднего числа допустимых решений для рассмотренного выше класса задач о рюкзаке $\mathcal{K}(n,m,p)$.

Теорема 6. *Для задач из класса $\mathcal{K}(n,m,p)$ имеет место оценка*

$$\mathbf{E}|D(n)| \leqslant 2n+1.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть только дискретное равномерное распределение элементов матрицы A, т. е. $P\{a_{ij} = h\} = 1/B$, где $h \in \{1, \ldots, B\}$.

Вероятность того, что вектор x^t с t единичными компонентами удовлетворяет i-му ограничению задачи о рюкзаке можно оценить выражением

$$p(t, B) = P\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t \leqslant B \right\} = p^t \sum_{R=t}^{B} S(R, t),$$

где $S(R, t)$ — количество разбиений числа R на t упорядоченных натуральных слагаемых. Воспользуемся формулами из [1, 9]:

$$S(R, t) = C_{R-1}^{t-1} \qquad \text{и} \qquad \sum_{R=t}^{B} S(R, t) = C_B^t.$$

Получаем

$$p(t, B) = p^t C_B^t = \frac{1}{B^t} \frac{B!}{t!(B-t)!} \leqslant \frac{1}{t!}.$$

Далее используем неравенство $n! > e^{3n/4}$, справедливое при $n \geqslant 4$. Предположим, что выполнено условие $m \geqslant (4/3) \ln n$, т. е. $e^{-3m/4} \leqslant 1/n$.

Для математического ожидания числа допустимых решений получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|D(n)| &\leqslant \sum_{t=0}^{n} C_n^t (p(t, B))^m \leqslant 1 + n(pB)^m + C_n^2 \left(p^2 C_B^2\right)^m + C_n^3 \left(p^3 C_B^3\right)^m \\ &+ \sum_{t=4}^{n} C_n^t e^{-3tm/4} \leqslant 1 + n + C_n^2 \left(p^2 C_B^2\right)^m + C_n^3 \left(p^3 C_B^3\right)^m + \sum_{t=4}^{n} C_n^t n^{-t}. \end{aligned}$$

При $m \geqslant \frac{2}{\ln 2} \ln n$

$$\left(p^2 C_B^2\right)^m = \left(\frac{B-1}{2B}\right)^m \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Для $m \geqslant \frac{3}{\ln 6} \ln n$ выполнено

$$\left(p^3 C_B^3\right)^m = \left(\frac{(B-1)(B-2)}{6B^2}\right)^m \leqslant \left(\frac{1}{6}\right)^m \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

Таким образом, при $m \geqslant \frac{2}{\ln 2} \ln n$

$$\mathbf{E}|D(n)| \leqslant 1 + n + 1/2 + 1/6 + n - 3 < 2n + 1.$$

Отсюда можно сделать вывод, что для задач о рюкзаке из класса $\mathcal{K}(n, m, p)$ при условии (6) имеет место оценка (5).

Заключение

Проведённые исследования показали, что предложенный подход может быть использован при построении оценок среднего числа итераций для других задач ЦЛП, релаксационные множества которых имеют достаточно хорошую структуру относительно регулярных разбиений. В частности, это относится к задаче о покрытии множества, некоторым задачам размещения предприятий, задаче максимальной выполнимости логической формулы. В дальнейшем представляет интерес выделение классов задач с полиномиальными верхними оценками среднего числа итераций более высоких порядков, а также применение рассматриваемого подхода к анализу других алгоритмов ЦЛП.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
2. **Гришухин В. П.** О среднем числе итераций алгоритма Балаша // Исследования по дискретной математике. — М.: Наука, 1973. — С. 58–68.
3. **Гэри М., Джонсон М.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
4. **Заозёрская Л. А., Борисенко Д. А., Гофман Н. Г.** О числе допустимых решений задачи об упаковке множества // Материалы VII междунар. научно-технической конф. «Динамика систем, механизмов и машин». Т. 3. — Омск.: Издательство ОмГТУ, 2009. — С. 31–35.
5. **Заозёрская Л. А., Колоколов А. А.** О среднем числе итераций некоторых алгоритмов для решения задачи об упаковке множества // Тр. XIV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т. 1. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. — С. 388–395.
6. **Заозёрская Л. А., Колоколов А. А.** О среднем числе итераций некоторых алгоритмов для решения задачи об упаковке множества // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2010. – Т. 50, № 2. — С. 242–248.
7. **Колоколов А. А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. — 1994. — Т. 1, №2. — С. 18–39.
8. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В., Заозёрская Л. А.** Регулярные разбиения в целочисленном программировании: Учебное пособие. — Омск: Изд-во ОмГУ, 2007. — 60 с.
9. **Кузюрин Н. Н.** Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. — 1994. — Т. 1, №3. — С. 38–48.
10. **Кузюрин Н. Н., Фомин С. А.** Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. — 2008. — http://discopal.ispras.ru/ru.book-advanced-algorithms.htm.

11. **Хачиян Л. Г.** Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 244, №5. — С. 1093–1096.
12. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М.: Мир, 1974. — 519 с.
13. **Beier R., Vöcking B.** Probabilistic analysis of knapsack core algorithms // Proc. 15th Annual Symp. Discrete Algorithms (SODA–2004). — New Orleans: SIAM, 2004. — P. 468–477.
14. **Brown C. A., Purdom P. W. (Jr.)** An average time analysis of backtracking // SIAM J. Comput. — 1981. — Vol. 10, N 3. — P. 583–593.
15. **Dinh Dieu P., Cong Thang L., Tuan Hoa L.** Average polynomial time complexity of some NP-complete problems // Theoret. Comput. Sci. — 1986. — Vol. 46, N 2. — P. 219–237.
16. **Gurevitch Y., Shelah S.** Expected computation time for Hamiltonian path problem // SIAM J. Comput. — 1987. — Vol. 16, N 3. — P. 486–502.
17. **Nemhauser G. L., Wolsey L. A.** Integer and combinatorial optimization. Wiley–Intersci. Publ. — New York; Chichester; Weinheim; Brisbane; Singapore; Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1999. — 763 p.
18. **Iwama K.** CNF satisfiability test by counting and polynomial average time // SIAM J. Comput. — 1989. — Vol. 18, N 2. — P. 385–391.
19. **Smale S.** On the average number of steps of the simplex method of linear programming // Math. Programming. — 1983. — Vol. 27, N 3. — P. 241–262.

Заозёрская Лидия Анатольевна,
e-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru

Колоколов Александр Александрович,
e-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

Гофман Нина Гельмудовна,
e-mail: ngofman@mail.ru

Статья поступила
1 июня 2010 г.

Переработанный вариант —
7 октября 2010 г.