ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2011. Том 18, № 3. С. 65–75

УДК 519.7

ЦИКЛЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ РЕГУЛЯТОРНОГО КОНТУРА ГЕННОЙ СЕТИ С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ *)

Е. О. Кутумова

Аннотация. Найден новый класс циклов функционирования дискретной модели регуляторного контура генной сети с пороговыми функциями. Получено описание циклов класса в зависимости от значения параметра p — весового порога значений функций и n — числа вершин сети. Доказаны критерий p-собственности и теорема о сводимости описания циклов для произвольного $p > 3$ к описанию 4-собственных циклов и наследственных циклов при $p = 3$.

Ключевые слова: генная сеть, дискретная модель, регуляторный контур, цикл функционирования, пороговая функция.

Введение и основные определения

Генным сетям принадлежит важная роль в функционировании живых систем [3]. Они обеспечивают выполнение основных процессов, протекающих в клетках. Характерной особенностью организации генных сетей является их способность к саморегуляции за счёт замкнутых регуляторных контуров с положительными и отрицательными обратными связями. Благодаря этим двум типам регуляторных контуров возможно поддержание определённого функционального состояния генной сети или переход в другой режим функционирования, в том числе и под влиянием факторов внешней среды [1, 8].

В статье рассматривается одна из дискретных моделей функционирования генных сетей, точнее, модель функционирования регуляторных контуров [3]. Исследования дискретных моделей генных сетей начались с работ [5, 8].

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00070) и междисциплинарного проекта СО РАН № 119.

© 2011 Кутумова Е. О.

Регуляторный контур представляется в виде связного ориентированного графа $G(V, D)$, где V, $|V| = n$, — множество вершин, отождествляемое с продуктами генетических элементов (РНК, белки), а D — множество дуг, имеющих смысл регуляторных связей. В качестве графов рассматриваются ориентированные циркулянтные графы $G_{n,k}$, число входящих (и выходящих) дуг равно $k-1$, $k \leqslant n$. Всем вершинам графа приписаны переменные, принимающие целочисленные значения с порогом p. Каждое значение определяет вес заданной вершины в заданный момент времени и соответствует уровню концентрации продукта, отождествлённого с этой вершиной. Функционирование регуляторного контура характеризуется заданием функций генетических элементов и определяется потактовой сменой состояний — n-наборов в алфавите $\langle 0, \ldots, p-1\rangle$. В настоящей работе найден новый класс циклов функционирования, и получено его описание в зависимости от значения параметров p и $n = 2k$.

Регуляторный контур определяется заданием циркулянтного ориентированного графа $G_{n,k}(V, D)$ с множеством вершин V и множеством дуг D (рис. 1), где

$$V = \{v_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\},\ D = \{(v_i, v_{i+j(\bmod n)}) \mid \\ i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, k-1\},\ k \in \{2, \ldots, n\}\}.$$

По условию цикличности $v_0 = v_n$. Обозначим

$$B_p = \{0, \ldots, p-1\}, \quad B_p^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in B_p,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

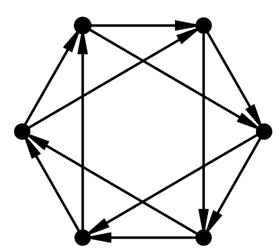

Рис. 1. Циркулянтный граф $G_{6,3}$

В вершинах графа $G_{n,k}$ в каждый момент времени подсчитываются значения заданных в них функций $f_{v_i} : B_p^{k-1} \to B_p$, где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Функции $f_{v_i}(x_{i-k+1}, \ldots, x_{i-1})$ определены для любой вершины $v_i \in V$, а переменные x_j, $j \in \{i-k+1, \ldots, i-1\}$, приписаны вершинам, имеющим входы в эту вершину.

Функционирование генной сети характеризуется изменением концентрации её веществ, т. е. сменой n-наборов из B_p^n, соответствующих значениям функций f_{v_i} в n вершинах сети в каждый момент времени [2, 4, 9].

Таким образом, для каждого начального состояния (n-набора) динамика изменения состояний определяется отображением

$$A(f_{v_1}, \ldots, f_{v_n}, p) : B_p^n \to B_p^n.$$

Будем полагать, что во всех вершинах графа задана одна и та же функция $f : B_p^{k-1} \to B_p$. Поскольку всегда $A(*) = A(f, p)$, далее f, p опускаем, а переменный набор X вносим в скобки как действие функционала отображения A, т. е. $A(X) = Y$.

Определение 1. Последовательность наборов $X^1, \ldots, X^r \in B_p^n$ называется *контуром длины* r отображения $A : B_p^n \to B_p^n$, если

$$A(X^i) = X^{i+1},\ i \in \{1, \ldots, r\}, \quad X^{r+1} = X^1.$$

При $r = 1$ имеем $A(X^1) = X^1$ и X^1 называется *неподвижной точкой* отображения $A : B_p^n \to B_p^n$.

Определение 2. *Функциональным графом* регуляторного контура называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы $X \in B_p^n$, причём дуга из вершины X идёт в вершину $Y \in B_p^n$ тогда и только тогда, когда $A(X) = Y$.

Известно, что функциональный граф любого преобразования конечного множества состоит из нескольких (быть может, одной) компонент связности. Каждая компонента содержит единственный контур (в частности, петлю, которая соответствует неподвижной точке отображения). Некоторые вершины контура являются корнями деревьев, все дуги которых ориентированы к корню [4].

Пусть n, k и p произвольны, а вершинам графа $G_{n,k}$ сопоставлена функция f, определяемая по правилу

$$f(x_{i-k+1}, \ldots, x_{i-1}) = \begin{cases} x_i + 1, & \text{если } \sum\limits_{j \in D_i} x_j = 0 \text{ и } x_i \leqslant p - 1, \quad (1.1) \\ x_i - 1, & \text{если } \sum\limits_{j \in D_i} x_j > 0 \text{ и } x_i \geqslant 0, \quad (1.2) \\ x_i & \text{в противном случае,} \quad (1.3) \end{cases}$$

где $D_i = \{i - j (\operatorname{mod} n) \mid j \in \{1, \ldots, k-1\}\}$ — номера вершин, дуги из которых ведут в вершину v_i. Таким образом, задана дискретная модель регуляторного контура генной сети с пороговыми функциями.

1. Циклы отображения функционального графа

В [1] рассмотрен случай действия отображения $A : B_p^n \to B_p^n$ на наборах вида $X^i = (0^{i-1}, p-1, 0^{n-i})$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, где $d = \text{нод}(n, k)$ и параметры n и k произвольны. Описаны циклы функционального графа при $d \leqslant k$, а также установлено, что при $d = k$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ появляются неподвижные точки

$$(0^{i-1}, p-1, 0^{k-1}, p-1, 0^{k-1}, \ldots, 0^{k-1}, p-1, 0^{k-1}).$$

При этом цикл $(0, \ldots, 0) \leftrightarrow (1, \ldots, 1)$ длины 2 является циклом отображения A для любых $k \in \{2, \ldots, n\}$ и $p \geqslant 2$.

Перейдем к описанию нового класса циклов.

Определение 3. Цикл $X^1, \ldots, X^r$, $r \geqslant 1$, отображения $A : B_p^n \to B_p^n$ называется *p-собственным*, если для всех $p_1 \leqslant p$ последовательность $X^1, \ldots, X^r$ не является циклом отображения $A : B_{p_1}^n \to B_{p_1}^n$. В противном случае будем называть его *несобственным* для p.

Определение 4. P-собственный цикл $X^1, \ldots, X^r$, $r \geqslant 1$, отображения $A : B_p^n \to B_p^n$ называется *наследственным*, если для любого $p_2 \geqslant p$ последовательность $X^1, \ldots, X^r$ является циклом отображения $A : B_{p_2}^n \to B_{p_2}^n$.

Пример 1. Цикл $(0, \ldots, 0) \leftrightarrow (1, \ldots, 1)$ отображения $A : B_p^n \to B_p^n$ является наследственным для $p = 2$ и несобственным для всех $p \geqslant 3$.

Пример 2. Пусть $n = 6$, $k = 3$, $p = 3$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что последовательность

$$\begin{aligned}(000012) \to (001121) \to (002010) \to (012000)\\ \to (121001) \to (010002) \to (000012)\end{aligned} \qquad (2)$$

является циклом. Согласно определению 3 это 3-собственный цикл. Пусть $X = (002010)$. Тогда $A(X) = X' = (012000)$. При $p_2 \geqslant p$ имеем $A(X) = (013000)$. Следовательно, цикл (2) не наследуется.

Определение 5. Набор $(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *$\langle d, l\rangle$-набором*, если он содержит поднабор $0^{k-1}d$ (т. е. отрезок такого вида), вхождение которого начинается с l-й координаты, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Лемма 1 (критерий p-собственности). *Цикл является p-собственным тогда и только тогда, когда он содержит $\langle p-2, l\rangle$-набор, $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим цикл отображения $A : B_p^n \to B_p^n$, который для некоторого параметра $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ содержит $\langle p-2, l\rangle$-набор X. Пусть $A(X) = Y$. Тогда из (1.1) получаем, что $y_{l+k-1(\bmod n)} = p - 1$. Следовательно, по определению цикл является p-собственным.

Необходимость. Рассмотрим p-собственный цикл отображения $A : B_p^n \to B_p^n$. Предположим, что для всех $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ он не содержит $\langle p-2, l\rangle$-наборы. Согласно определению p-собственности существует набор $X^1 = \left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right) \in B_p^n$ такой, что $x_i^1 = p - 1$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Без ограничения общности будем считать, что $i = k$. Рассмотрим набор X^2, для которого $A(X^2) = X^1$. Так как $x_k^1 = p - 1$, с учётом предположения и (1.3) X^2 является $\langle p-1, 1\rangle$-набором. Далее будем полагать, что $k \leqslant n$, в противном случае X^2 — неподвижная точка. Пусть $A(X^3) = X^2$ для некоторого набора X^3. Тогда из условия $x_k^2 = p - 1$ следует, что X^3 является $\langle p-1, 1\rangle$-набором, причём $x_n^3 \neq 0$. Повторяя аналогичные рассуждения, находим, что любой набор цикла X^s, $s \in \{1, \ldots, r\}$, является $\langle p-1, 1\rangle$-набором с координатой $x_n^s \neq 0$. Поскольку всегда $x_k^s = p - 1$, согласно (1.1)–(1.2) получаем, что $x_{k+1}^s, \ldots, x_{2k-1}^s = 0$ и $x_{2k}^s = p-1$, т. е. $x_{vk+1}^s, \ldots, x_{(v+1)k-1}^s = 0$ и $x_{vk}^s = p-1$ для любого $v \in \{1, \ldots, m\}$, $n = km$. Таким образом, X^1 — неподвижная точка, что противоречит определению p-собственности. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *P-собственный цикл является наследственным тогда и только тогда, когда для всех $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ он не содержит $\langle p-1, l\rangle$-наборы.*

Доказательство. Рассмотрим цикл, который для некоторого параметра $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ содержит $\langle p-1, l\rangle$-набор. Тогда для $p_2 \geqslant p$ последовательность наборов этого цикла не является циклом, так как согласно (1.1) набор, следующий за $\langle p-1, l\rangle$-набором, не содержит координату, равную p. Если все наборы p-собственного цикла для любого $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ не являются $\langle p-1, l\rangle$-наборами, то очевидно, что цикл наследуется. Следствие 1 доказано.

Пусть далее $n = 2k$. Теорема 1 сводит описание циклов для произвольного p к описанию 4-собственных циклов и наследственных циклов для $p = 3$.

Теорема 1. *При $p \geqslant 4$ все циклы являются несобственными. Для $p = 4$ все собственные циклы являются наследственными.*

Доказательство. Пусть $p \geqslant 3$. Согласно лемме 1 и следствию 1 утверждение теоремы означает, что цикл отображения $A : B_p^n \to B_p^n$, содержащий $\langle p{-}1, l\rangle$-набор, $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, появляется только при $p = 3$. Установим этот факт.

Пусть X^2 — $\langle p-1, l\rangle$-набор некоторого цикла и $A(X^1) = X^2$ для набора $X^1 \in B_p^n$. Без ограничения общности можно считать, что $l = 1$. Так как $x_k^2 = p-1$, из (1.1) следует, что X^1 является $\langle p-1, 1\rangle$- или $\langle p-2, 1\rangle$-набором, причём $x_n^1 \neq 0$. Положим $x_n^1 = a \in \{1, \ldots, p-1\}$ и обозначим $b = \max\left\{x_{k+1}^1, \ldots, x_{n-1}^1\right\}$. Рассмотрим соотношения между a и b.

(i) $b \leqslant a$. Из (1.1)–(1.3) имеем

$$A^b(X^1) = X^{b+1} = (0^{k-1}, p-1, 0^{k-1}, a-b)$$

и если $b < a$, то

$$A^{b-a+p-1}(X^{b+1}) = (0^{k-1}, p-1, 0^{k-1}, p-1).$$

Если $b = a$, то $A(X^{b+1}) = X^{b+2} = (1^{k-1}, p-1, 0^{k-1}, 1)$ и далее

$$A^{p-2}(X^{b+2}) = A^{p-3}(0^{k-1}, p-2, 0^{k-1}, 2) = (0^{k-1}, p-1, 0^{k-1}, p-1).$$

Таким образом, набор $A^{2b-a+p-2}(X^2) = (0^{k-1}, p-1, 0^{k-1}, p-1) = X^2$ — неподвижная точка.

(ii) $a \leqslant b$. Если при этом $x_j^1 \leqslant a$ для любого $j \in \{i+1, \ldots, n-1\}$, где $i \in \{k+1, \ldots, n-1\}$ — номер координаты, равной b, в наборе X^1, то

$$A^a(X^1) = X^{a+1} = \left(0^{k-1}, p-1, x_{k+1}^{a+1}, \ldots, x_{k-i-1}^{a+1}, b-a, 0^{k-i}\right),$$

где $x_s^{a+1} \neq 0, s \in \{1, \ldots, p-1\}$. Обозначим

$$X^{b+2} = A^{b+1}(X^1) = A^{b-a+1}(X^{a+1}).$$

Из (1.2) следует, что $x_{k+1}^{b+2} = \ldots = x_{k-i}^{b+2} = 0$. С учётом (1.1) имеем последовательное увеличение i-й и уменьшение k-й координат набора X^{a+1} при каждом применении отображения A. Следовательно,

$$\begin{aligned} X^{b+2} &= A(0^{i-1}, b-a, 0^{k-i-1}, p-b+a, 0^k) \\ &= (1^{i-1}, b-a+1, 0^{k-i-1}, p-b+a-1, 0^{k-1}, 1). \end{aligned}$$

Циклически сдвинем координаты набора X^{b+2} на k позиций и обозначим полученный набор через

$$Y = (0^{k-1}, 1^i, b-a+1, 0^{k-i-1}, p-b+a-1).$$

Так как Y является $\langle 1,1\rangle$-набором, $y_n = p-b+a-1 \geqslant 0$ и

$$\max\{y_{k+1},\ldots,y_{n-1}\} = \max\{0,1,b-a+1\} = b-a+1,$$

повторяя рассуждения, аналогичные п. (i), в случае $b-a+1 \leqslant y_n$ получаем, что Y и X^{b+2} — неподвижные точки. Но $X^{b+2} \neq X^1$, поэтому данный случай невозможен. Значит, $y_n \leqslant b-a+1$. Поскольку при этом $y_j = 0 \leqslant y_n$ для любого номера $j \in \{k+2,\ldots,n-1\}$, согласно рассуждениям, приведённым выше, наборы Y и X^1 совпадают, иначе X^1 не может являться набором цикла. Для координат наборов X^1 и Y получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b-a+1 = b, \\ p-b+a-1 = a, \\ x_n^1 = 1, \end{cases}$$

где $x_n^1 = p-1$ или $x_n^1 = p-2$. Так как $a \leqslant b$, находим единственное возможное решение $a=1$, $b=2$ и $p=3$.

В случае, когда $a \leqslant x_j^1 \leqslant b$ для некоторого $j \in \{i+1,\ldots,n-1\}$, рассуждения аналогичны. Система уравнений, которую получим при этом, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} p-b+a-1 = a, \\ p-q-1 = 1, \\ b-a+1 \geqslant b, \end{cases}$$

где $q=0$ при $x_n^1 = p-1$ и $q=1$ при $x_n^1 = p-2$. Поскольку между a и b должно лежать целочисленное значение x_j^1, данная система не имеет решений. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема даёт описание 4-собственных циклов для случая $n=2k$.

Теорема 2. *Цикл является* 4*-собственным тогда и только тогда, когда он содержит набор, в точности две координаты которого равны* 2*, а все остальные нулевые.*

Доказательство. Достаточность. Пусть некоторый цикл содержит набор X, в точности две координаты которого равны двум, а остальные нулевые. Без ограничения общности считаем, что $X = (0^{i-1}, 2, 0^{j-1}, 2)$, где $i \in \{k,\ldots,n-1\}$ и $j = n-i$. Применяя (1.1)–(1.3), находим набор $A^4(X) = (0^{k-j-1}, 2, 0^{j-1}, 2, 0^{i-l+j})$, координаты которого соответствуют координатам набора X, циклически сдвинутым на $n-k$ позиций. Следовательно, X — набор цикла длины npk^{-1}, причём по лемме 1 этот цикл является 4-собственным.

Необходимость. Рассмотрим произвольный 4-собственный цикл. По лемме 1 он содержит $\langle 2, l\rangle$-набор X, $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Без ограничения общности считаем, что $l = 1$, т. е. $X = (0^{k-1}, 2, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Из теоремы 1 следует, что цикл наследственный, поэтому согласно следствию 1 он не содержит $\langle 3, s\rangle$-наборов для $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда $x_n = 0$, иначе $A(X)$ — $\langle 3, 1\rangle$-набор. Заметим, что набор $X' = (0^{k-1}, 2, 0^k)$ не является набором цикла, так как $A^3(X') = (0^{k-1}, 2, 0^{k-1}, 2)$ — неподвижная точка. Поэтому существует индекс $r \in \{1, \dots, k-1\}$, для которого $x_{n-r} \neq 0$. Можно считать, что это последняя ненулевая координата набора X. Обозначим $a = \max\{x_{k+1}, \dots, x_{n-r}\} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $j = \max\{i \in \{k+1, \dots, n-r\} \mid x_i = a\}$ и рассмотрим все возможные значения параметра a.

Если $a = 1$, то $j = n - r$ и $X = (0^{k-1}, 2, x_{k+1}, \dots, x_{n-r-1}, 1, 0^r)$, где $x_i \in 0, 1$, $i \in \{k+1, \dots, n-r-1\}$. Тогда из (1.1)–(1.3) $A^4(X) = (0^{n-1}, 3)$. Согласно [1] этот набор не является набором цикла, так как сходится к неподвижной точке $(0^{k-1}, 3, 0^{k-1}, 3)$. Следовательно, $a \neq 1$.

Случай $a = 3$ также невозможен, поскольку набор

$$X = (0^{k-1}, 2, x_{k+1}, \dots, x_{j-1}, 3, x_{j+1}, \dots, x_{n-r}, 0^r)$$

при отображении A не имеет прообраза. Действительно, пусть $A(X') = X$ для некоторого набора X'. Так как $\sum\limits_{j-k \leqslant i \leqslant j-1} x_i \geqslant 2$, то

$$\sum_{j-k \leqslant i \leqslant j-1} X'_i \geqslant 1.$$

Поэтому значение x_j не может быть получено из (1.1) и (1.3). Формула (1.2) также неприменима, так как $X'_j \leqslant 3$; противоречие.

В случае $a = 2$ обозначим $X' = (0^{k-1}, 2, x_{k+1}, \dots, x_{j-1}, 2)$. Тогда

$$X = (X', x_{j+1}, \dots, x_{n-r-1}, 1, 0^r), \quad \text{если } j \leqslant n - r,$$

$$X = (X', 0^r), \quad \text{если } j = n - r.$$

Поскольку $x_i \in \{0, 1, 2\}$ для всех $i \in \{k+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n-r-1\}$, для любых значений параметра j имеем $A^2(X) = (0^{k-r-1}, 2, 0^{r-1}, 2, 0^k)$. Теорема 2 доказана.

Наконец, теорема 3 даёт описание наследственных циклов отображения $A : B_p^n \to B_p^n$ в случае $p = 3$.

Теорема 3. *Цикл отображения $A : B_3^n \to B_3^n$ является наследственным тогда и только тогда, когда он содержит наборы вида*

$$(0^{k-1}, 1^{j-k}, 2, 0^{n-r-j-1}, 1, 0^r),$$

где $r \in \{1, \dots, k-1\}$ и $j \in \{k+1, \dots, n-r\}$.

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственным применением (1.1)–(1.3) с учётом следствия 1.

Необходимость. Аналогично доказательству теоремы 2 положим

$$X = (0^{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_{n-r}, 0^r),$$

где $r \in \{1, \dots, k-1\}$ и $x_{n-r} \neq 0$. Пусть $a = \max\{x_{k+1}, \dots, x_{n-r}\} \in \{0, 1, 2\}$ и $j = \max\{i \in \{k+1, \dots, n-r\} \mid x_i = a\}$.

Если $a = x_{n-r} = 2$, то $X = (0^{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_{n-r-1}, 2, 0^r)$, где $x_i \in \{0, 1, 2\}$ для всех $i \in \{k+1, \dots, n-r-1\}$. Тогда

$$A^2(X) = (0^{k-r-1}, 2, 0^{k-r-2}, 1, 0^k)$$

есть $\langle 2, n-r+1 \rangle$-набор; противоречие.

Аналогичным образом в случае $a = x_{n-r} = 1$ набор

$$X = (0^{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_{n-r-1}, 1, 0^r)$$

не является набором наследственного цикла.

Осталось рассмотреть случай $a = 2$ и $x_{n-r} = 1$. Имеем

$$X = (0^{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_{j-1}, 2, x_{j+1}, \dots, x_{n-r-1}, 1, 0^r).$$

Так как $x_i \in 0, 1$ для всех $i \in \{k+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n-r-1\}$, имеем

$$\begin{aligned} A^4(X) &= A^3(0^{k-r-1}, 1^r, 2, 0^{j-k-1}, 1, 0^{n-j}) \\ &= A^2(0^{j-k-1}, 1^{n-r-j}, 2, 0^{r-1}, 1, 0^k) = A(1^{j-k-1}, 2, 0^{n-r-j-1}, 1, 0^{k+r-1}, 1) \\ &\qquad = (0^{j-k-1}, 1, 0^{n+k-r-j-1}, 1^r, 2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $X = (0^{k-1}, 1^{j-k}, 2, 0^{n-r-j-1}, 1, 0^r)$ — набор наследственного цикла длины 6. Теорема 3 доказана.

2. Заключение

В работе найден новый класс циклов функционирования дискретной модели регуляторного контура генной сети и получено описание циклов класса в зависимости от значения параметров p весового порога значений функций сети и n — числа её вершин. Введены понятия p-собственного и наследственного циклов, в терминах которых оказалось возможным охарактеризовать циклы для произвольного значения порога $p > 3$. Доказаны критерий p-собственности и теорема о сводимости описания циклов для произвольного $p > 3$ к описанию 4-собственных циклов и наследственных циклов при $p = 3$.

Автор выражает благодарность Александру Андреевичу Евдокимову за постановку задачи и внимание на всех этапах работы над статьёй.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.** Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестн. ТГУ. — 2005. — Т. 14. — С. 206–212.
2. **Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О.** Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестн. ТГУ. — 2008. — Т. 2, № 3. — С. 18–21.
3. **Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А., Матвеева И. И., Фадеев С. И.** Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — С. 397–480.
4. **Оре О.** Теория графов. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
5. **Evdokimov A. A., Kutumova E. O.** The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions // Proc. 7th Int. Conf. on bioinformatics of genom regulation and structure (Novosibirsk, June 20–27, 2010). — Novosibirsk: SB RAS, 2010. — P. 155.
6. **Kauffman S. A., Smith R. G.** Adaptive automata based on Darwinian selection // Physica D. — 1986. — Vol. 22, N 1–3. — P. 68–82.
7. **Kauffman S. A.** At home in the universe: the search for the laws of self-organization and complexity. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. — 321 p.
8. **Komarov A. V., Akberdin I. R., Ozonov E. A., Evdokimov A. A.** On the reconstruction of a genetic automation on the basis of Boolean dynamic data // Proc. 5th Int. Conf. on bioinformatics of genom regulation and structure (Novosibirsk, July 16–22, 2006). Vol. 3. — Novosibirsk: SB RAS, 2006. — P. 69–73.

9. **Kutumova E. O., Evdokimov A. A.** Reversible states of the functioning of regulatory circuits discrete models of gene networks // Вестн. ТГУ. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 85–94.

Кутумова Елена Олеговна,
e-mail: e.o.kutumova@gmail.com

Статья поступила
26 апреля 2011 г.