ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2011. Том 18, № 3. С. 76–83

УДК 519.85

МНОГОГРАННИКИ ЗАДАЧИ О ВЫПОЛНИМОСТИ ЯВЛЯЮТСЯ ГРАНЯМИ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА

А. Н. Максименко

Аннотация. Пусть на множестве булевых переменных $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ задана булева формула C в конъюнктивной нормальной форме. Обозначим через $Y \subset \mathbb{R}^d$ множество характеристических векторов всех выполняющих C наборов значений переменных. *Многогранником задачи о выполнимости* $S(U,C)$ назовём выпуклую оболочку множества Y. Многогранник коммивояжёра для орграфа на n вершинах обозначим через T_n. Показано, что $S(U,C)$ аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника T_n, где $n = |U| + 2\operatorname{len}(C)$, $\operatorname{len}(C)$ — длина формулы C в литералах.

Ключевые слова: многогранник коммивояжёра, многогранник задачи о выполнимости, грань.

Пусть $D = (V, E)$ — полный ориентированный граф с множествами вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и дуг $E = \{(v_i, v_j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\}$. Для каждого гамильтонова контура h этого графа рассмотрим его характеристический вектор $x^h \in \mathbb{R}^{|E|}$ с координатами

$$x^h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (v_i, v_j) \text{ содержится в } h, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выпуклую оболочку всех таких векторов далее будем называть *многогранником коммивояжёра* и обозначать через T_n.

Проблема изучения свойств семейства многогранников T_n, $n \in \mathbb{N}$, пользуется у исследователей большой популярностью. К настоящему времени опубликованы сотни работ, целиком посвящённых этой теме (см. [5] в качестве наиболее свежего обзора). Известно, что эти многогранники обладают рядом «неудобных» свойств. Перечислим некоторые:

1. В предположении $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$ Карп и Пападимитриу [8] показали, что не существует полиномиального способа получения списка линейных ограничений для описания T_n.

2. Пападимитриу [9] доказал NP-полноту проверки на несмежность двух произвольных вершин этого многогранника.

3. Биллера и Сарангараджан [6] показали, что любой 0/1-многогранник* в $\mathbb{R}^d$ с $2^d - k$ вершинами ($k > 0$) аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника T_n при $n \geqslant (4k+1)d$.

Последний факт особенно впечатляет и проливает свет на многие проблемы, с которыми исследователям приходилось сталкиваться ранее. В нашей статье предлагается конструктивно совершенно иной способ получения этого результата. Новый взгляд на проблему позволяет существенно упростить доказательство и получить ряд интересных следствий.

Переходя к описанию основного результата, введём в рассмотрение семейство многогранников задачи о выполнимости. Рассмотрим множество булевых переменных $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ и булеву формулу C над U в конъюнктивной нормальной форме (КНФ). Множество характеристических векторов всех выполняющих C наборов значений переменных из U обозначим через $Y \subset \mathbb{R}^d$. *Многогранником задачи о выполнимости* $S(U, C)$ будем называть выпуклую оболочку множества Y.

В качестве примера рассмотрим формулу

$$C = u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_{n-1} \vee \overline{u}_n,$$

состоящую из одного дизъюнкта. Тогда множество Y содержит все d-мерные 0/1-векторы за исключением вектора $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Теперь, чтобы убрать из множества Y вектор $(0, 1, \ldots, 1, 1)$, достаточно добавить в формулу C ещё один дизъюнкт:

$$C = (u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_{n-1} \vee \overline{u}_n) \wedge (u_1 \vee \overline{u}_2 \vee \overline{u}_3 \vee \ldots \vee \overline{u}_n).$$

Ясно, что действуя в том же духе мы можем получить вершинное описание любого 0/1-многогранника в виде $S(U, C)$. Обозначим через $P(X)$ 0/1-многогранник с множеством вершин X.

Лемма 1. *Для каждого 0/1-многогранника $P(X) \subset \mathbb{R}^d$ можно построить формулу C такую, что $P(X) = S(U, C)$, причём $|U| = d$ и $\operatorname{len}(C) = kd$, где $k = 2^d - |X|$.*

*Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$ называется *0/1-многогранником*, если его вершины лежат в $\{0, 1\}^d$.

Заметим, что в некоторых случаях длину формулы C можно существенно уменьшить. В этом и состоит принципиальное отличие основного утверждения настоящей работы от результата Биллера — Сарангараджана.

Теорема 1. *Каждый многогранник $S(U,C)$ аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника T_n, где $n = |U| + 2\operatorname{len}(C)$.*

Подробное доказательство приводится ниже. Здесь же остановимся на следствиях теоремы. Так, пользуясь леммой 1, получаем

Следствие 1. *Любой 0/1-многогранник в $\mathbb{R}^d$ с $2^d - k$ вершинами аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника T_n, $n \geqslant (2k+1)d$.*

Другое существенно более полезное утверждение может быть получено, если учесть, что для многогранников комбинаторных задач класса NP длина формулы C, как правило, полиномиальна.

Задача комбинаторной оптимизации P_d.

Дано: множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$, каждому элементу $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant d$, которого приписан вес $b_i = b(a_i) \in \mathbb{R}$; полиномиально вычислимое (относительно количества d элементов) правило $f : 2^A \to \{0,1\}$, по которому определяется множество $Z = \{z \subseteq A \mid f(z) = 1\}$ всех допустимых решений задачи.

Требуется: найти допустимое решение $z \in Z$ с максимальным (минимальным) суммарным весом элементов.

Многие широко известные труднорешаемые задачи формулируются именно в таком виде. В частности, так формулируются оптимизационные задачи на графах, задача о рюкзаке и другие задачи линейного 0/1-программирования.

Многогранник такой задачи строится стандартным образом. Для каждого допустимого решения $z \in Z$ рассматривается его характеристический вектор в $\mathbb{R}^d$, и *многогранником задачи* P_d называется выпуклая оболочка всех таких векторов.

Свяжем эти многогранники с $S(U,C)$ следующим образом. Каждой булевой переменной u_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, из множества $U = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ поставим в соответствие элемент $a_i \in A$. Тогда каждому допустимому решению $z \in Z$ задачи P_d естественно поставить в соответствие характеристический набор значений переменных из U:

$$u_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in z,\ 1 \leqslant i \leqslant d, \\ 0 \ \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

а правило f можно заменить булевой формулой C в КНФ. Тогда многогранник задачи P_d в точности совпадёт с $S(U, C)$. При этом длина формулы C может оказаться экспоненциальной относительно d.

Теперь заметим, что f полиномиально вычислимо и длину формулы C можно сделать полиномиальной, но при этом в множество U, возможно, придётся добавить вспомогательные переменные (это необходимое условие для полиномиальности $\operatorname{len}(C)$). Обозначим обновлённое множество переменных через $U' = U \cup \{u_{d+1}, \ldots, u_{d+k}\}$, где $u_{d+1}, \ldots, u_{d+k}$ — вспомогательные переменные, а новую, полиномиальную по длине булеву формулу обозначим через C'. Тогда, очевидно, многогранник $S(U, C)$, а вместе с ним и многогранник задачи P_d, будет простой проекцией многогранника $S(U', C')$, получающейся отбрасыванием «лишних» k координат.

Следствие 2. *Многогранник задачи комбинаторной оптимизации P_d является аффинным образом некоторой грани многогранника T_n, причём n ограничено сверху полиномом от d.*

В частности, внешнее описание многогранников комбинаторных задач может быть получено проецированием описания многогранника T_n.

В целом же теорема 1 позволяет структурировать многие ранее разрозненные результаты, касающиеся свойств многогранника T_n. Так, например, из [7] известно, что распознавание несмежности двух произвольных вершин многогранника задачи о 3-выполнимости является NP-полной задачей. В силу теоремы 1 многогранник коммивояжёра наследует это свойство.

Другой пример связан с оценкой снизу кликового числа графа многогранника T_n. Такая задача решена в [1] и рассмотрена в отрыве от других комбинаторных задач. Однако имеется более простой путь — использовать многогранник задачи о клике, который замечателен тем, что его граф полон (см., например, [2, 4]).

Рассмотрим полный неориентированный граф G на множестве вершин $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. Каждое подмножество его вершин (в том числе и пустое) индуцирует в нём некий полный подграф, который будем называть *кликой*. Вершины w_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, будем ассоциировать с координатами x_{ii} вектора $x \in \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$, а рёбра (w_i, w_j) — с координатами x_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Тогда множество характеристических векторов клик графа G может быть описано равенствами

$$x_{ij} = x_{ii} x_{jj}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k,$$

где $x_{ii}, x_{jj} \in \{0, 1\}$, или, альтернативно, набором из $3k(k-1)/2$ дизъюнк-

ций

$$x_{ii} \vee \overline{x}_{ij}, \quad x_{jj} \vee \overline{x}_{ij}, \quad \overline{x}_{ii} \vee \overline{x}_{jj} \vee x_{ij}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k.$$

Следовательно, многогранник задачи о клике фактически является многогранником $S(U, C)$ задачи о выполнимости, где

$$|U| = k(k+1)/2 \operatorname{len}(C) = 7k(k-1)/2,$$

причём число его вершин равно 2^k и каждые две образуют ребро этого многогранника [2, 4]. Опираясь на теорему 1, получаем

Следствие 3. *Кликовое число графа многогранника T_n оценивается снизу величиной 2^k, где $k = \lceil(\sqrt{n} - 2)/3\rceil$.*

Это утверждение можно усилить, если учесть, что многогранник задачи о клике, ещё известный как корреляционный многогранник, 3-смежностен [4].

Следствие 4. *Многогранник T_n содержит в качестве грани 3-смежностный многогранник на 2^k вершинах, где $k = \lceil(\sqrt{n} - 2)/3\rceil$.*

Доказательство теоремы 1. Введём в рассмотрение вспомогательное семейство многогранников. Пусть $D' = (V, E')$ — подграф описанного ранее графа D из задачи коммивояжёра. Множество характеристических векторов всех гамильтоновых контуров графа D' обозначим через $X(D')$, $X(D') \subset \mathbb{R}^{|E|}$. Выпуклая оболочка этого множества называется *многогранником гамильтоновых контуров графа* D', обозначим его через $T(D')$. Из описания ясно, что $T(D')$ — грань многогранника T_n.

Для того чтобы показать, что $S(U, C)$ аффинно эквивалентны граням многогранника T_n, достаточно для каждого $S(U, C)$ привести пример подграфа D' такого, что $S(U, C)$ окажется аффинно эквивалентным многограннику $T(D')$. Построение этого подграфа основано на следующей идее. С помощью стандартных средств классической теории сводимости [3] конструируется алгоритм сведения задачи о выполнимости к задаче поиска гамильтонова контура. При этом между множествами допустимых решений этих задач устанавливается взаимно однозначное соответствие. То же соответствие, естественно, устанавливается и между вершинами многогранников этих задач. Далее остаётся лишь показать, что оно представляет собой аффинное невырожденное отображение.

Рассмотрим набор переменных $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ и формулу

$$C = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j,$$

состоящую из m дизъюнктов C_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Искомый граф D' будем конструировать из вершин v_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, и компонент D_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Вершины v_i будут соответствовать переменным $u_i \in U$, а компоненты D_j — дизъюнктам C_j. Из каждой вершины v_i в графе D' будут выходить ровно две дуги, соответствующие значениям «истина» и «ложь» переменной u_i. Относительно вершины v_i из всего множества компонент D_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, выделим два подмножества: H_i будет содержать все те компоненты, соответствующие дизъюнкты которых содержат литерал u_i, $\overline{H}_i$ будет содержать все те компоненты, соответствующие дизъюнкты которых содержат литерал $\overline{u}_i$. Из вершины v_i дугу «истина» направим в «первую» (порядок не важен) компоненту из множества H_i. Затем «первую» компоненту соединим аналогичной дугой со «второй» компонентой из H_i и т. д. Таким образом все компоненты из H_i будут соединены ориентированной цепью. Из последней компоненты соответствующую дугу направим в вершину v_{i+1} (сложение по модулю d). Если множество H_i пустое, то дугу «истина» из вершины v_i направим непосредственно в v_{i+1}. Аналогичные построения проделаем с множеством $\overline{H}_i$, начав цепочку с дуги «ложь», выходящей из v_i (рис. 1). Итак, теперь в каждую компоненту D_j входит и из неё выходит ровно столько дуг, сколько литералов содержится в соответствующем дизъюнкте C_j.

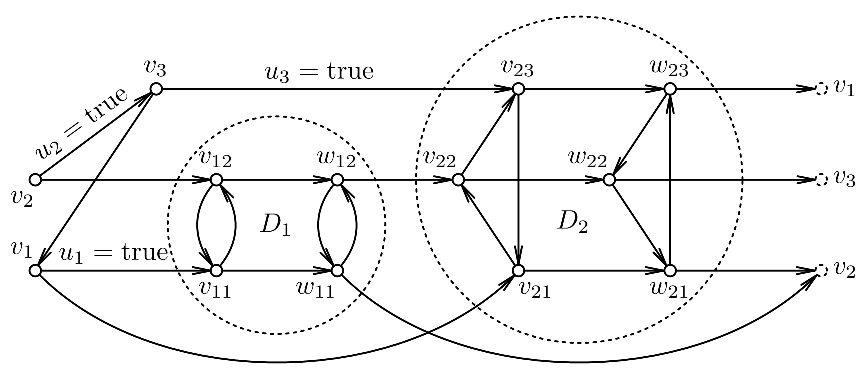

Рис. 1. Граф D' для формулы $(u_1 \vee \overline{u}_2) \wedge (\overline{u}_1 \vee \overline{u}_2 \vee u_3)$

Определим внутреннее устройство компоненты D_j. Она состоит из вершин v_{jl} и w_{jl}, $1 \leqslant l \leqslant p_j$, где p_j — число литералов в дизъюнкте C_j. Таким образом, между парами v_{jl} и w_{jl} $(1 \leqslant l \leqslant p_j)$ и литералами дизъюнкта C_j можно установить взаимно однозначное соответствие. Следовательно, каждая такая пара оказывается «привязанной» к некоторой вершине v_i, точнее, к одной из исходящих из этой вершины дуг, соответствующих литералам u_i и $\overline{u}_i$. Вершины компоненты соединены

между собой «внутренними» дугами трёх типов: (v_{jl}, w_{jl}), $(v_{jl}, v_{j\,l+1})$ и $(w_{j\,l+1}, w_{jl})$, $1 \leqslant l \leqslant p_j$, (сложение $l+1$ выполняется по модулю p_j). Других «внутренних» дуг у компоненты D_j нет. О том, как «внешние» дуги соединяют D_j с другими компонентами и вершинами v_i конструируемого графа, в общих чертах сказано выше. Остаётся лишь уточнить детали. Допустим, что пара вершин v_{j1}, w_{j1} соответствует литералу $\overline{u}_i$, присутствующему в дизъюнкте C_j. Тогда, как было сказано, компонента D_j является одним из звеньев цепи, соединяющей вершину v_i и другие компоненты из множества $\overline{H}_i$, причём начало цепи проходит по дуге «ложь». Из двух дуг, соединяющих компоненту D_j с соседями по этой цепи, входящая дуга будет оканчиваться в v_{j1}, а исходящая — начинаться в w_{j1}.

Покажем, что между множествами вершин многогранников $S(U,C)$ и $T(D')$ имеется взаимно однозначное соответствие. Заметим, что конфигурация любого гамильтонова контура в графе D' однозначно определяется набором дуг, берущих начало в вершинах v_i, или, что то же самое, набором значений булевых переменных u_i, $1 \leqslant i \leqslant d$. Кроме того, гамильтонов контур в графе D' для каждой компоненты D_j должен содержать хотя бы одну входящую в неё дугу (соответственно дизъюнкт C_j должен содержать хотя бы один литерал, принимающий значение «истина»). Таким образом, взаимно однозначное соответствие между вершинами многогранников $S(U,C)$ и $T(D')$ установлено. Покажем, что соответствующее отображение аффинно.

Заметим, что все дуги, соединяющие множество компонент H_i (или $\overline{H}_i$), присутствуют (или отсутствуют) в некотором гамильтоновом контуре вместе с дугой «истина», выходящей из v_i. Таким образом, наличие «внешних» дуг в гамильтоновом контуре линейно зависит от значений переменных из U. Остаётся установить аналогичное свойство для «внутренних» дуг. Для этого выберем произвольно компоненту D_j и рассмотрим пару вершин v_{jl} и w_{jl} $(1 \leqslant l \leqslant p_j)$. Среди инцидентных этим вершинам дуг есть две «внешние». Одна из них входит в v_{jl}, другая берёт начало в w_{jl}, причём присутствие каждой из них однозначно определяется значением соответствующей переменной $u_i \in U$ (зависимость «внешних» дуг от переменной u_i линейна). Далее возможны два случая.

(i) Если указанные «внешние» дуги участвуют в некотором гамильтоновом контуре, то вместе с ними в контур обязательно войдёт и дуга $(v_{j\,l-1}, w_{j\,l-1})$, а дуги $(v_{j\,l-1}, v_{jl})$ и $(w_{jl}, w_{j\,l-1})$ будут отсутствовать (вычитание $l-1$ по модулю p_j).

(ii) Если же «внешние» дуги не принадлежат некоторому гамильтонову контуру, то дуга $(v_{j\,l-1}, w_{j\,l-1})$ тоже в него не входит, а дуги $(v_{j\,l-1}, v_{jl})$

и $(w_{jl}, w_{j\,l-1})$ будут ему принадлежать.

Таким образом, наличие или отсутствие любой «внутренней» дуги компоненты D_j однозначно определяется наличием или отсутствием соответствующей «внешней» дуги. Аффинность отображения и теорема 1 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бондаренко В. А.** Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжёра в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 9. — С. 45–50.
2. **Бондаренко В. А., Максименко А. Н.** Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: ЛКИ, 2008. — 184 с.
3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
4. **Деза М. М., Лоран М.** Геометрия разрезов и метрик. — М.: МЦНМО, 2001. — 736 с.
5. **Applegate D. L., Bixby R. E., Chvatal V., Cook W. J.** The traveling salesman problem: a computational study. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. — 606 p.
6. **Billera L. J., Sarangarajan A.** All 0-1 polytopes are travelling salesman polytopes // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16. — P. 175–188.
7. **Fiorini S.** A combinatorial study of partial order polytopes // Eur. J. Comb. — 2003. — Vol. 24, N 2. — P. 149–159.
8. **Karp R. M., Papadimitriou C. H.** On linear characterizations of combinatorial optimization problems // SIAM J. Computing. — 1982. — Vol. 11, N 4. — P. 620–632.
9. **Papadimitriou C. H.** The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Math. Program. — 1978. — Vol. 14, N 1. — P. 312–324.

Максименко Александр Николаевич,
e-mail: maksimenko_a_n@mail.ru

Статья поступила
19 июля 2010 г.

Переработанный вариант —
15 марта 2011 г.