ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2011. Том 18, № 3. С. 84–88

УДК 519.178

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЧИСЛА РЁБЕР В СВЯЗНЫХ ГРАФАХ НА ТРУДОЁМКОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Изучается сложностной статус задачи о независимом множестве в классах связных графов, определяемых функциональными ограничениями числа рёбер от числа вершин. Показано, что для любого натурального C в классе графов $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{G \mid |V(G)| = n, |E(G)| \leqslant n + C[\log_2(n)]\}$ эта задача полиномиально разрешима. С другой стороны, доказано, что она не является полиномиально разрешимой в классе графов $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{G \mid |V(G)| = n,\ |E(G)| \leqslant n + f^2(n)\}$ для любой неограниченной неубывающей функции $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, экспонента от которой растёт быстрее, чем полином от n. Последний результат справедлив, если для задачи о независимом множестве нет субэкспоненциальных алгоритмов.

Ключевые слова: вычислительная сложность, задача о независимом множестве.

Введение

Статья является продолжением работы [1], в которой изучалось влияние числа рёбер в графах на трудоёмкость решения задачи о независимом множестве. Напомним, что подмножество множества вершин графа называется *независимым множеством*, если эти вершины попарно не смежны. Независимое множество наибольшей мощности в графе G называется *наибольшим независимым множеством графа*, а его мощность — *числом независимости графа* и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве (далее просто задача НМ) состоит в нахождении в данном графе наибольшего независимого множества. Известно [2],

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2012 гг. (гос. контракт № 16.740.11.0310), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–01–00357–а и 11–01–00107–а) и лаборатории «Тапрадесс» при НФ ГУ-ВШЭ (проект 61.1).

что задача поиска наибольшего независимого множества по сложности полиномиально эквивалентна задаче определения числа независимости. Мы будем иметь дело именно с этой последней задачей и под задачей НМ будем понимать именно её.

В [1] рассматривались специальные подмножества множества всех графов $\mathcal{G}$. Каждая такая совокупность (обозначаемая через $\mathcal{G}_{f(n)}$) задавалась функцией $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и определялась как множество графов из $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{G \mid |V(G)| = n,\ |E(G)| \leqslant f(n)\}$. Таким образом, функция $f(n)$ ограничивает сверху рост числа рёбер в графах. В [1] поставлена задача поиска функции $f'(n)$ такой, что при любом $\varepsilon > 0$ задача НМ полиномиально разрешима в классе $\mathcal{G}_{[(1-\varepsilon)f'(n)]}$ и NP-полна в $\mathcal{G}_{[(1+\varepsilon)f'(n)]}$. Соответствующий разделитель найден, и показано, что можно положить $f'(n) = n$.

В настоящей работе рассматривается влияние выбора функции $f(n)$ на трудоёмкость определения числа независимости графа в связных графах из $\mathcal{G}_{f(n)}$ (обозначаемых через $\mathcal{G}^*_{f(n)}$). Предметом исследований является «ничейная земля» предыдущих результатов, т. е. функции $f(n)$, при $n \to \infty$ эквивалентные n. Целью исследований является получение информации о росте второго члена разделителя полиномиальных и неполиномиальных случаев. Статья содержит два основных результата. В первом из них утверждается, что при любом натуральном C задача НМ полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{G}^*_{n+C[\log_2(n)]}$ (теорема 1). Интерпретация второго результата подразумевает отсутствие субэкпоненциальных алгоритмов для решения задачи НМ (напомним, что алгоритм решения этой задачи называется *субэкпоненциальным*, если время его работы ограничено величиной $2^{o(n)}$, где n — число вершин в графе). Вера в отсутствие таких алгоритмов для задачи НМ является распространённой [3], и автор настоящей публикации разделяет её. Формулировка теоремы 2 использует понятие *надлогарифмической функции* $g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. е. неограниченной неубывающей функции, экспонента от которой растёт быстрее, чем полином от n. В теореме 2 утверждается, что невозможность решения задачи НМ за субэкспоненциальное время означает её неразрешимость за полиномиальное время в классе $\mathcal{G}^*_{n+g^2(n)}$ для любой надлогарифмической функции $g(n)$.

1. Результаты работы

Теорема 1. *Для любого натурального C задача* НМ *полиномиально разрешима в классе $\mathcal{G}^*_{n+C[\log_2(n)]}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathcal{G}^*_{n+C[\log_2(n)]}$ и выделим в нём произвольное остовное дерево (поскольку G связен, такое дерево обязательно существует). Понятно, что построение остова осуществимо за полиномиальное время. Рассмотрим те рёбра графа G, которые не принадлежат дереву. Множество вершин графа G, инцидентных этим рёбрам, обозначим через V'. Ясно, что $|V'| \leqslant 2C[\log_2(|V(G)|)] + 2$. Для каждого независимого множества $S \subseteq V'$ графа G рассмотрим граф G_S, порождённый множеством вершин $V(G) \setminus \{V' \cup N(S)\}$, где $N(S) = \{y \mid \exists x \in S : (x, y) \in E(G)\}$. Понятно, что независимые множества указанного вида могут быть построены за полиномиальное от $|V(G)|$ время. Ясно также, что каждая компонента графа G_S является деревом. Поэтому вычисление $\alpha(G_S)$ осуществимо за полиномиальное от $|V(G_S)|$ время. Число независимости графа G вычисляется по формуле

$$\max_{S \subseteq V'}(|S| + \alpha(G_S)),$$

и данная процедура легко осуществима за полиномиальное время. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если задача* НМ *не разрешима за субэкпоненциальное время, то для любой надлогарифмической функции $g(n)$ эта задача не решаема за полиномиальное время для графов класса $\mathcal{G}^*_{n+g^2(n)}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество графов

$$\mathcal{G}^{(k)} = \{G \mid g(k) \leqslant |V(G)| \leqslant g(k+1)\}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

$g(0)$ считается равным 0. Очевидно, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(k)} = \mathcal{G}$. Возможны две ситуации: либо существуют константы $C > 0$ и $\alpha > 0$, не зависящие от k, такие, что для любого k задача НМ для графов из $\mathcal{G}^{(k)}$ может быть решена за время, не превосходящее Ck^{α}, либо таких чисел не имеется. Покажем, что первая ситуация невозможна.

Рассмотрим функцию $k(n) = \max\limits_{k}\{k : g(k) \leqslant n\}$. Ввиду неограниченности и монотонности функции $g(k)$ функция $k(n)$ определена при любом n. Интерес к $k(n)$ обусловлен тем фактом, что все графы из $\mathcal{G}$ с n вершинами принадлежат $\mathcal{G}^{(k(n))}$ (это легко следует из максимальности числа $k(n)$, т. е. справедливости неравенства $n < g(k(n)+1)$). Понятно, что $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Поскольку $g(k)$ — нелогарифмическая функция, $g(k) = \log_2(k)\beta(k)$, где $\beta(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Потенцируя неравенство $g(k(n)) \leqslant n$, получаем $(k(n))^{\beta(k(n))} \leqslant 2^n$. Значит, $k(n) \leqslant 2^{\frac{n}{\beta(k(n))}}$. Так как $\beta(k(n)) \to \infty$ при $n \to \infty$, имеем $k(n) \in 2^{o(n)}$. Тогда для графов из $\mathcal{G}^{(k(n))}$ задача НМ может быть решена за время $C(k(n))^{\alpha} \in 2^{o(n)}$. Отсюда в силу равенства $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(k)} = \mathcal{G}$ следует, что задача НМ для графов из $\mathcal{G}$ решается за субэкспоненциальное от числа вершин время; противоречие. Тем самым чисел C и α с указанными ранее свойствами не существует.

К каждому графу из $\mathcal{G}$ с n вершинами добавим $k(n)$ изолированных вершин. Получим семейство графов $\mathcal{G}'$. Любая изолированная вершина графа входит в каждое его наибольшее независимое множество. Отсюда и из доказанного в предыдущем абзаце следует, что для графов из $\mathcal{G}'$ нет полиномиального от числа вершин алгоритма решения задачи о независимом множестве. Легко проверить, что число рёбер любого графа из этой совокупности, имеющего n' вершин, не превосходит $g^2(n')$. К каждому графу $G \in \mathcal{G}'$ добавим одну вершину и соединим её рёбрами со всеми его вершинами. Полученный граф G' имеет ровно $|V(G)|+1$ вершину и $|E(G)|+|V(G)|$ рёбер. Поскольку

$$|E(G)| \leqslant g^2(|V(G)|), \quad g(|V(G)|) \leqslant g(|V(G)|+1),$$

то $|E(G')| \leqslant |V(G')| + g^2(|V(G')|)$, поэтому $G' \in \mathcal{G}^*_{n+g^2(n)}$. Граф G' содержит единственную вершину степени $|V(G)|+1$, которая, как легко проверить, не входит ни в одно из его наибольших независимых множеств (за исключением случая, когда G является полным). Поэтому либо $\alpha(G') = \alpha(G)$ (если G не является полным), либо $\alpha(G') = \alpha(G)+1$ (если G полное). Таким образом, задача НМ для графов из $\mathcal{G}'$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{G}^*_{n+g^2(n)}$. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малышев Д. С.** Совместное влияние количества рёбер и компонент связности в графах на сложность вычисления числа независимости // Материалы Российской конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Республика Алтай, 2010 г.). — Новосибирск: Ин-т математики, 2010. — С. 136.
2. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979. — 536 с.

3. **Impagliazzo R., Paturi R.** Which problems have strongly exponentional complexity? //J. Comput. Syst. Sci. — 2001. — Vol. 62. — P. 512–530.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
19 ноября 2010 г.

Переработанный вариант —
22 февраля 2011 г.