

УДК 519.8

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ С ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ $7/9$ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ КОММИВОЯЖЁРАХ НА МАКСИМУМ ^{*)}

А. Н. Глебов, Д. Ж. Замбалаева

Аннотация. Рассматривается задача об отыскании в полном неориентированном графе двух рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов с максимальным суммарным весом рёбер. Для неё получен алгоритм с гарантированной оценкой точности $7/9$, наилучшей на сегодняшний день, и кубической временной сложностью. В случае, когда веса рёбер графа принимают значения из заданного промежутка $[1, q]$, разработана модификация алгоритма, имеющая оценку точности $(7q + 3)/(9q + 1)$, также наилучшую на сегодняшний день, и кубическую временную сложность.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, задача о двух коммивояжёрах, полиномиальный алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

Одним из естественных обобщений классической задачи коммивояжёра (Traveling Salesman Problem — TSP) является задача об m коммивояжёрах (m -Peripatetic Salesman Problem — m -PSP), состоящая в поиске в полном взвешенном неориентированном графе m рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным или максимальным суммарным весом рёбер. Задача исследуется как в случае произвольной, так и метрической весовой функции, а также для специального класса графов с весами рёбер 1 и 2.

С тех пор, как задача 2-PSP впервые была упомянута в [13], появилось много работ, посвящённых её исследованию. В [7] доказано, что задача о существовании двух рёберно-непересекающихся гамильтоновых

^{*)}Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00244 и 10-07-00195), второго — при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.0429 и № 14.740.11.0868).

циклов в неориентированном графе NP-полна, что влечёт NP-трудность задачи 2-PSP как на минимум, так и на максимум даже в случае, если веса рёбер принимают лишь значения 1 и 2. В [6] рассмотрены некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи на минимум 2-PSP_{min}. В [7–9] предложены и проанализированы некоторые способы нахождения нижних и верхних оценок для применения в методе ветвей и границ. В [10] представлен полиэдральный подход к решению m -PSP.

Ввиду NP-трудности известных модификаций задач TSP и m -PSP большинство работ, посвящённых их исследованию, связано с анализом полиномиально разрешимых случаев и построением приближённых эвристических алгоритмов, а также полиномиальных алгоритмов (как детерминированных, так и рандомизированных) с гарантированными оценками точности для полученного решения.

В данной статье более подробно рассматриваются алгоритмы с гарантированными оценками для задач одного и двух коммивояжёров на максимум с произвольными неотрицательными весами рёбер. В случае задачи одного коммивояжёра на максимум (TSP-max) наилучшим полиномиальным алгоритмом с гарантированной оценкой точности $3/4$ в течение длительного времени оставался алгоритм Сердюкова из [3]. За последние годы этот результат незначительно усилен разными авторами за счёт построения рандомизированных алгоритмов с оценками $25/33 - \varepsilon$ [12] и $251/331 - \varepsilon$ [5] (для любой константы $\varepsilon > 0$), а также детерминированных алгоритмов с оценками $61/81 - \varepsilon$ [4] и $25/33 - \varepsilon$ [14], основанных на дерандомизации алгоритма из [12].

Для задачи о двух коммивояжёрах на максимум (2-PSP-max) А. А. Агеевым, А. Е. Бабуриным и Э. Х. Гимади [1] получен полиномиальный приближённый алгоритм с оценкой $3/4$. Основным результатом данной статьи является алгоритм для задачи 2-PSP-max, имеющий лучшую на сегодняшний день оценку точности $7/9 \simeq 0.778$ и кубическую временную сложность. Представленный алгоритм развивает идеи, ранее использованные в работе Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазкова и А. Н. Глебова [2] для построения приближённого алгоритма с оценкой $6/5$ в задаче о двух коммивояжёрах на минимум с весами рёбер 1 и 2 (задача 2-PSP-min(1,2)). Для случая 2-PSP-max, в котором веса рёбер принимают значения из заданного промежутка $[1, q]$, нами предложена модификация алгоритма, имеющая оценку точности $(7q + 3)/(9q + 1)$, наилучшую на сегодняшний день.

Один из методов, применяемых во многих алгоритмах приближённого решения задач TSP и 2-PSP, состоит в построении гамильтоновых цик-

лов из так называемых частичных туров. *Частичным туром* в неориентированном графе называется набор из вершинно-непересекающихся цепей, покрывающих все вершины графа. *Длиной* $l(P)$ цепи P называется число составляющих её рёбер. В частности, одновершинная цепь имеет длину 0 и называется *синглом*. Далее для краткости будем называть частичный тур просто туром и отождествлять тур T с множеством входящих в него рёбер. Ребро, принадлежащее T , будем называть *T -ребром*. Через $P(T)$ будем обозначать множество всех цепей T .

Очевидно, что добавлением рёбер, соединяющих концевые вершины различных цепей частичного тура, можно получить гамильтонов цикл. Если же дана пара рёберно-непересекающихся туров или непересекающиеся гамильтонов цикл и тур, то, добавляя рёбра специальным образом, можно получить пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов. При этом построенная пара циклов будет тем ближе по весу к оптимальной, чем «лучше» исходные туры. Таким образом, приближённое решение задачи 2-PSP может быть сведено к отысканию подходящих частичных туров. Эта идея используется в алгоритме, описанном в данной статье.

Далее в работе используются следующие определения и обозначения: $G = G(V, E)$ — полный неориентированный n -вершинный граф с множествами вершин $V = V(G)$ и рёбер $E = E(G)$, $w : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ — функция весов рёбер, принимающая произвольные неотрицательные значения.

Если F — подграф в G , то через $V(F)$ и $E(F)$ обозначаются множества всех вершин и рёбер F соответственно. Через $d_F(v)$ обозначается степень вершины v в F , т.е. число инцидентных v рёбер из $E(F)$, а через $w(F)$ — сумма весов всех рёбер из F . Вершина степени $d_F(v)=d$ называется *d -вершиной* в F . *Допустимым решением* задачи 2-PSP-тах называется пара рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2 в G . Значение целевой функции для H_1, H_2 определяется как $w(H_1 \cup H_2) = w(H_1) + w(H_2)$, т.е. равно сумме весов всех рёбер из H_1 и H_2 . Через OPT обозначается оптимальное значение целевой функции.

Пусть в графе F имеется тур T . Цепь $P = v_1 \dots v_m$ из T назовём *циклической* в F , если $m > 2$ и $v_1 v_m \in E(F)$. При этом цепь длины 0 (сингл) также будем считать циклической. Все остальные цепи тура T будем называть *ациклическими* в F . Обозначим через $p(T)$ число всех цепей тура T , а через $a_F(T)$ — число его ациклических цепей в F . Ясно, что $p(T) = |V(T)| - |E(T)|$. Вершину назовём *терминальной относительно T* , если она является концом ациклической цепи или принадлежит циклической цепи. Ребро графа назовём *терминальным относительно*

но T , если оно соединяет терминальные вершины разных цепей из T . В дальнейшем, если понятно, о каком туре идёт речь, вершины и рёбра будем называть просто терминальными.

1. Описание алгоритма $A_{7/9}$

Отправной точкой предлагаемого ниже алгоритма $A_{7/9}$ является обращение к алгоритму Габова из [11], с помощью которого в G находится остовный 4-регулярный подграф G_4 с максимальным суммарным весом рёбер. В общем случае алгоритм из [11] позволяет отыскать в полном взвешенном n -вершинном графе $G(V, E)$ такой подграф H максимального рёберного веса, что степени его вершин удовлетворяют ограничениям снизу и сверху: $l_v \leq d(v) \leq h_v$, $v \in V$. При этом его временная сложность оценивается сверху величиной $O\left(\min(|E| \log n, n^2) \sum_{v \in V} h_v\right)$. Ясно, что при $l_v = h_v = 4$ для всех $v \in V$ алгоритм Габова за время $O(n^3)$ находит в G остовный 4-регулярный подграф G_4 максимального рёберного веса.

Дальнейший ход алгоритма $A_{7/9}$ связан с применением процедуры из [2], позволяющей в каждой компоненте связности G_4 найти пару рёберно-непересекающихся туров специального вида с большим числом рёбер. Далее найденные туры преобразуются в туры T_1^*, T_2^* в G со свойством $w(T_1^*) + w(T_2^*) \geq \frac{7}{9}OPT$. На завершающей стадии алгоритма туры T_1^*, T_2^* достраиваются до пары рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2 в G , представляющих собой искомое приближённое решение задачи 2-PSP-max.

Входом алгоритма служит полный n -вершинный неориентированный граф $G(V, E) \cong K_n$ с неотрицательными весами рёбер.

Алгоритм $A_{7/9}$

ЭТАП 0. При $n \leq 14$ полным перебором находим точное решение задачи 2-PSP-max. Иначе переходим на этап 1.

ЭТАП 1. Используя алгоритм Габова из [11], находим в G остовный 4-регулярный подграф G_4 с наибольшим рёберным весом. Алгоритмом поиска находим в G_4 все компоненты связности: G_4^1, \dots, G_4^t . Переходим на этап 2.

ЭТАП 2. Если $t = 1$ (граф G_4 связан), то процедурой $T_{1,2}^*$, описанной в п. 2.4, находим в G_4 рёберно-непересекающиеся туры T_1^*, T_2^* и переходим на этап 5. В противном случае полагаем $T_1^* := T_2^* := \emptyset$ (туры T_1^* и T_2^* не имеют рёбер и состоят только из одновершинных цепей) и переходим на этап 3.

ЭТАП 3. Для каждой компоненты связности G_4^i , не изоморфной графам K_5 и $K_{4,4}$, последовательно применяя процедуры $T_{1,2}^*$ из п. 2.4 и $P_{1,2}$ из п. 3.1, находим в G рёберно-непересекающиеся цепи P_1, P_2 с одним и тем же множеством вершин $V(P_1) = V(P_2) = V(G_4^i)$. Полагаем $T_1^* := T_1^* \cup P_1$ и $T_2^* := T_2^* \cup P_2$. Переходим на этап 4.

ЭТАП 4. В каждой компоненте связности G_4^i , изоморфной K_5 или $K_{4,4}$, процедурой $P'_{1,2}$ из п. 3.2 находим гамильтоновы цепи P_1, P_2 . Полагаем $T_1^* := T_1^* \cup P_1$ и $T_2^* := T_2^* \cup P_2$. Переходим на этап 5.

ЭТАП 5. Применяя к турам T_1^* и T_2^* , полученным на этапах 2–4, процедуру $H_{1,2}$ из разд. 4, находим в G рёберно-непересекающиеся гамильтоновы циклы H_1 и H_2 , которые подаем на выход алгоритма. Конец.

Целью оставшейся части статьи является доказательство следующего основного утверждения.

Теорема 1. Алгоритм $A_{7/9}$ находит в полном n -вершинном графе G пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2 , для которых выполняется оценка $w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7}{9}OPT$. Временная сложность алгоритма равна $O(n^3)$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется описать и установить свойства используемых алгоритмом $A_{7/9}$ процедур, что делается в разд. 2–4 статьи. Доказательство теоремы 1 даётся в разд. 5.

2. Построение туров T_1^*, T_2^* в связном 4-регулярном графе, не изоморфном K_5 и $K_{4,4}$

В этом разделе считается, что задан связный 4-регулярный n -вершинный граф G_4 , не изоморфный K_5 и $K_{4,4}$ (это может быть граф, найденный на этапе 1 алгоритма $A_{7/9}$ или его компонента связности). Целью раздела является процедура $T_{1,2}^*$ для нахождения в G_4 пары рёберно-непересекающихся туров T_1^*, T_2^* с суммарным весом рёбер $w(T_1^*) + w(T_2^*) \geq \frac{7}{9}w(G_4)$, обладающих некоторыми специальными свойствами.

В основе процедуры $T_{1,2}^*$ лежит построение в G_4 шести альтернативных пар рёберно-непересекающихся туров и выбор пары с наибольшим рёберным весом.

2.1. Построение базовых туров T_1 и T_2 . Вначале с помощью процедуры $P_{8/5}$ из [2] за время $O(n^2)$ находим в G_4 пару рёберно-непересекающихся туров T'_1, T'_2 и паросочетание M' , обладающие следующими свойствами (см. доказательство теоремы 4 в [2]):

- (i) $E(G_4) = T'_1 \cup T'_2 \cup M'$ — разбиение множества рёбер G_4 , при этом общее число рёбер в $T'_1 \cup T'_2$ не меньше $8n/5$;
- (ii) T'_1 состоит из ациклических цепей в G_4 , и никакие две терминальные вершины T'_1 не соединены ребром из $T'_2 \cup M'$;
- (iii) T'_2 не содержит одновершинных цепей, и никакое ребро из M' не соединяет терминальные вершины двух различных цепей из T'_2 ;
- (iv) в подграфе $H = G_4 \setminus T'_1 = T'_2 \cup M'$ нет смежных 3-вершин;
- (v) $a_H(T'_2) = p(T'_1)$, т. е. число ациклических цепей тура T'_2 в H равно числу всех цепей тура T'_1 . В частности, выполнено неравенство $p(T'_1) \leq p(T'_2)$.

Заметим, что так как M' — паросочетание, а $T'_1 \cup T'_2 \cup M'$ — разбиение $E(G_4)$, выполняется свойство

- (i') цепи из T'_1 и T'_2 не имеют общих концевых вершин, а множество концов рёбер из M' совпадает с множеством концов цепей из T'_1 и T'_2 .

Отметим, что процедура $P_{8/5}$ слишком сложна и многоступенчата, чтобы имело смысл приводить здесь её полное описание. Отметим лишь, что на первом этапе производится построение тура T'_1 , который в начале состоит лишь из одновершинных цепей, а затем последовательно преобразуется путём добавления рёбер между концевыми вершинами различных цепей из T'_1 , а также путём сокращения числа циклических цепей с помощью специальных процедур. Далее в графе $G' = G_4 \setminus T'_1$ находится тур T'_2 , при построении которого последовательно сокращается число синглов в T'_2 , пока это число не станет равным нулю. После этого в [2] (см. доказательство теоремы 4) устанавливается, что построенные туры T'_1, T'_2 и множество рёбер $M' = E(G_4) \setminus (T'_1 \cup T'_2)$ (которое является паросочетанием) удовлетворяют свойствам (i)–(v).

Оказывается, что свойств (i)–(v) недостаточно для последующего дополнения туров T'_1 и T'_2 до рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов. Поэтому мы начнём со следующей вспомогательной процедуры, преобразующей тройку T'_1, T'_2, M' в тройку T_1, T_2, M (где $T_1 = T'_1$), обладающую дополнительными свойствами, позволяющими достроить T_1, T_2 до пары гамильтоновых циклов, содержащих все рёбра из $T_1 \cup T_2$.

ПРОЦЕДУРА $T_{1,2}$

Полагаем $T_1 := T'_1$ и переходим на этап 1.

ЭТАП 1. Если $p(T'_1) \geq 2$ или $p(T'_2) \geq 3$, то полагаем $T_2 := T'_2$, $M := M'$, и процедура завершает работу. Иначе пусть

$$p_1 = v_1 v_2 \dots v_n \in P(T'_1)$$

— единственная цепь в T'_1 . При $p(T'_2) = 1$ переходим на этап 2, а при $p(T'_2) = 2$ — на этап 3.

ЭТАП 2. Пусть $p_2 = v_k \dots v_l \in P(T'_2)$. Если $l = k + 1$ (т.е. ребро $v_k v_l$, дополняющее цепь p_2 до гамильтонова цикла, принадлежит туру T'_1) и при этом $M' = \{v_1 v_k, v_{k+1} v_n\}$, то при $p_2 = v_k v_n v_m \dots v_{k+1}$ полагаем $T_2 := T'_2 \cup \{v_{k+1} v_n\} \setminus \{v_n v_m\}$, $M := \{v_1 v_k, v_m v_n\}$ (рис. 1), а при $p_2 = v_k \dots v_m v_1 v_{k+1} - T_2 := T'_2 \cup \{v_1 v_k\} \setminus \{v_1 v_m\}$, $M := \{v_1 v_m, v_{k+1} v_n\}$ (рис. 2). Во всех остальных случаях полагаем $T_2 := T'_2$, $M := M'$. После завершения этапа 2 процедура заканчивает работу.

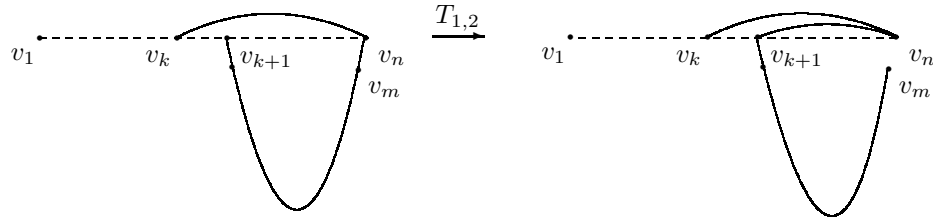


Рис. 1

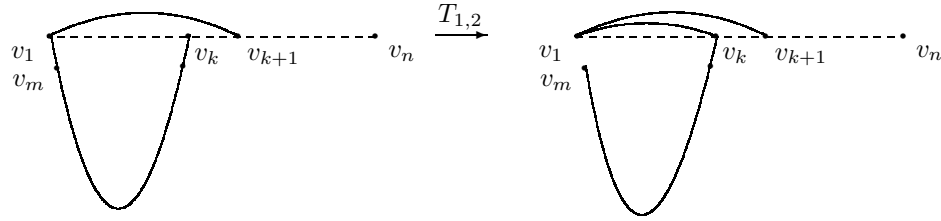


Рис. 2

ЭТАП 3. Если существует такой индекс k , что $p'_1 = v_k \dots v_s v_l \in P(T'_2)$ и $p'_2 = v_{k-1} v_n \dots v_t v_1 v_{k+1} \in P(T'_2)$, где $l \notin \{k-2, k+2\}$ (в частности, конец v_k цепи p'_1 соединён с обоими концами второй цепи p'_2 тура T'_2 рёбрами $v_k v_{k-1}$ и $v_k v_{k+1}$ из $p_1 \in P(T'_1)$), то при $v_k v_l \in M'$ полагаем $T_2 := T'_2 \cup \{v_k v_l\} \setminus \{v_s v_l\}$, $M := M' \cup \{v_s v_l\} \setminus \{v_k v_l\}$ (рис. 3 сверху), после чего процедура завершает работу, а при $v_{k-1} v_{k+1} \in M'$ и $v_1 v_k \in M'$ (случай $v_{k-1} v_{k+1} \in M'$, $v_n v_k \in M'$ симметричен) преобразуем T'_2 и M' следующим образом (рис. 3 снизу):

$$T'_2 := T'_2 \cup \{v_1 v_k, v_{k-1} v_{k+1}\} \setminus \{v_1 v_t\}, \quad M' := M' \cup \{v_1 v_t\} \setminus \{v_1 v_k, v_{k-1} v_{k+1}\},$$

после чего переходим на этап 2. Во всех остальных случаях полагаем $T_2 := T'_2$, $M := M'$, и процедура заканчивает работу.

Лемма 1. Процедура $T_{1,2}$ за время $O(1)$ строит в G_4 пару туров T_1, T_2 и паросочетание M , удовлетворяющие свойствам (i)–(v), а также двум следующим:

(vi) если $p(T_1) = p(T_2) = 1$,

$$p_1 = v_1 v_2 \dots v_n \in P(T_1), \quad p_2 = v_k \dots v_{k+1} \in P(T_2)$$

— гамильтоновы цепи, то рёбра $v_1 v_{k+1}$ и $v_k v_n$ не входят в T_2 ;

(vii) если $p(T_1) = 1, p(T_2) = 2, p_1 = v_1 v_2 \dots v_n \in P(T_1)$,

$$p'_1 = v_k \dots v_s v_l \in P(T_2), \quad p'_2 = v_{k-1} v_n \dots v_t v_1 v_{k+1} \in P(T_2),$$

то $l \in \{k-2, k+2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что туры T'_1, T'_2 и паросочетание M' , найденные процедурой $P_{8/5}$ из [2], обладают свойствами (i)–(v).

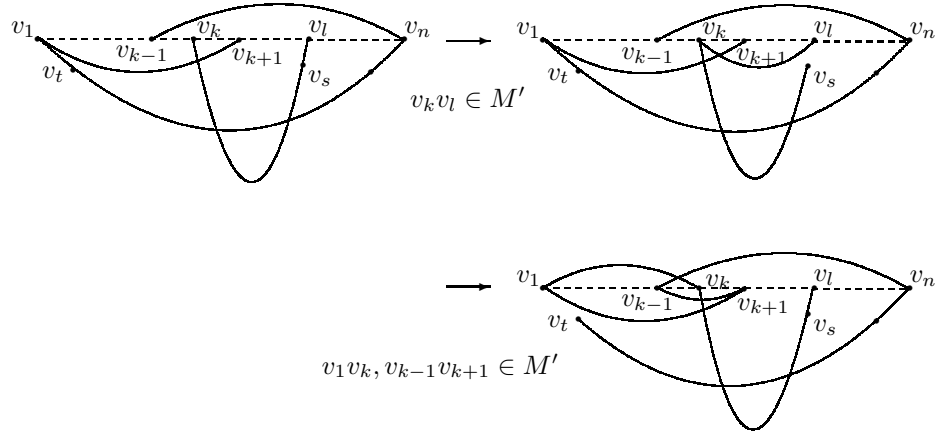


Рис. 3

Если $p(T'_1) \geq 2$ или $p(T'_2) \geq 3$, то на этапе 1 получаем $T_1 := T'_1$, $T_2 := T'_2$, $M := M'$, при этом тройка T_1, T_2, M удовлетворяет свойствам (vi) и (vii). Пусть $p(T'_1) = 1, p(T'_2) \leq 2$. Если $p(T'_2) = 1$, то процедура переходит на этап 2, иначе — на этап 3.

Рассмотрим этап 2. Пусть

$$p_1 = v_1 v_2 \dots v_n \in P(T'_1), \quad p_2 = v_k \dots v_l \in P(T'_2)$$

— гамильтоновы цепи. Без потери общности можно считать, что $l > k$. Если $l > k+1$ или $l = k+1$ и при этом рёбра $v_1 v_{k+1}$ и $v_k v_n$ не принадлежат цепи p_2 , то процедура выдаёт тройку $T_1 = T'_1, T_2 = T'_2, M = M'$,

удовлетворяющую свойствам (i)–(vii). Пусть $l = k + 1$ и без ограничения общности $v_k v_n \in p_2$. Тогда $p_2 = v_k v_n v_m \dots v_{k+1}$. Согласно свойствам (ii) и (v) цепи p_1 и p_2 являются ациклическими в G_4 и H соответственно. Отсюда и из свойства (i') следует, что либо $M' = \{v_1 v_{k+1}, v_k v_n\}$, либо $M' = \{v_1 v_k, v_{k+1} v_n\}$. В первом случае $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$, $M = M'$, и так как рёбра $v_1 v_{k+1}$ и $v_k v_n$ принадлежат M , тройка T_1, T_2, M удовлетворяет свойству (vi).

Пусть $M' = \{v_1 v_k, v_{k+1} v_n\}$. Тогда

$$T_2 = T'_2 \cup \{v_{k+1} v_n\} \setminus \{v_n v_m\}, \quad M = \{v_1 v_k, v_n v_m\}.$$

Заметим, M является паросочетанием, поскольку $m \notin \{1, k\}$, T_2 состоит из единственной цепи $v_k v_n v_{k+1} \dots v_m$, а T_1 — из цепи p_1 . Нетрудно убедиться, что свойства (i)–(v) выполняются для T_1, T_2, M . При этом свойство (vi) также выполнено, поскольку при $m = k - 1$ рёбра $v_1 v_k$ и $v_n v_{k-1}$ входят в M .

Рассмотрим этап 3. Пусть $p_1 = v_1 v_2 \dots v_n \in P(T'_1)$,

$$p'_1 = v_k \dots v_s v_l \in P(T'_2), \quad p'_2 = v_{k-1} v_n \dots v_t v_1 v_{k+1} \in P(T'_2),$$

где $l \notin \{k - 2, k + 2\}$, иначе процедура выдаёт тройку $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$, $M = M'$, удовлетворяющую свойствам (i)–(vii). В силу свойства (v) ровно одна из цепей тура T'_2 ациклическая. Таким образом, либо $v_k v_l \in M'$, либо $v_{k-1} v_{k+1} \in M'$. В первом случае

$$T_2 = T'_2 \cup \{v_k v_l\} \setminus \{v_s v_l\}, \quad M = M' \cup \{v_s v_l\} \setminus \{v_k v_l\}$$

и p'_1 преобразуется в циклическую цепь $p''_1 = v_l v_k \dots v_s$. Заметим, что M является паросочетанием, поскольку $v_s \in p'_1$, а вершины v_1, v_{k-1}, v_{k+1} и v_n принадлежат p'_2 и, значит, $s \notin \{1, k - 1, k + 1, n\}$. Нетрудно убедиться, что свойства (i)–(v) выполняются для T_1, T_2, M . При этом свойство (vii) также выполнено, поскольку вершина v_k теперь является внутренней в p''_1 , а v_{k-1} и v_{k+1} — концы p'_2 .

Пусть $v_{k-1} v_{k+1} \in M'$. В силу свойств (i'), (ii) и симметрии между v_1 и v_n можно считать, что $v_1 v_k \in M'$ и $v_l v_n \in M'$. В этом случае процедура выполняет преобразования

$$T'_2 := T'_2 \cup \{v_1 v_k, v_{k-1} v_{k+1}\} \setminus \{v_1 v_t\},$$

$$M' := M' \cup \{v_1 v_t\} \setminus \{v_1 v_k, v_{k-1} v_{k+1}\} = \{v_1 v_t, v_l v_n\},$$

в результате чего цепи p'_1 и p'_2 объединяются в гамильтонову цепь

$$p_2 = v_l v_s \dots v_k v_1 v_{k+1} v_{k-1} v_n \dots v_t \in P(T'_2),$$

и процедура переходит на этап 2. Поскольку цепь p_1 ациклическая, $v_l \in p'_1$, $v_t \in p'_2$, то $t \notin \{l, n\}$. Следовательно, преобразованное множество M' является паросочетанием и для обновлённой тройки T'_1, T'_2, M' выполняются свойства (i)–(v). Таким образом, переход на этап 2 корректен, и по доказанному выше происходит построение тройки T_1, T_2, M , удовлетворяющей свойствам (i)–(vii). После выполнения этапа 2 процедура $T_{1,2}$ завершает работу.

Для обоснования трудоёмкости процедуры $T_{1,2}$ достаточно заметить, что каждый из этапов 1–3 выполняется не более одного раза за время $O(1)$ (при этом переход на этап 2 может совершаться либо с этапа 1, либо с этапа 3). Лемма 1 доказана.

2.2. Разбиение туров T_1 и T_2 . Далее тур T_1 разбивается на три паросочетания, а T_2 — на два множества рёбер. Это делается таким образом, что каждое из полученных множеств рёбер в объединении с паросочетанием M даёт тур. Обозначим эти разбиения через $T_1 = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ и $T_2 = M'_1 \cup M'_2$. В дальнейшем будет показано, что хотя бы одна из пар туров $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, M \cup M'_1\}$, $\{T_1, M \cup M'_2\}$, $\{T_2, M \cup M_1\}$, $\{T_2, M \cup M_2\}$ и $\{T_2, M \cup M_3\}$ имеет суммарный вес рёбер не менее $\frac{7}{9}w(G_4)$.

Сначала опишем процедуру разбиения тура T_1 на паросочетания M_1, M_2, M_3 , что равносильно построению такой правильной рёберной раскраски $\varphi : T_1 \rightarrow \{1, 2, 3\}$, что множество рёбер каждого цвета в объединении с M даёт тур. Ребро, окрашенное в цвет α , будем называть α -ребром. Множество всех уже окрашенных α -рёбер (паросочетание) обозначим через M_α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

ПРОЦЕДУРА $\varphi(T_1)$

Поочерёдно для каждой цепи $p = v_1 v_2 \dots v_m \in P(T_1)$ последовательно окрашиваем все её рёбра $v_j v_{j+1}$, $j = 1, \dots, m-1$, придерживаясь следующих правил.

1) Если $j = 1$, то ребро $v_1 v_2$ окрашиваем в любой цвет $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ такой, что вершины v_1 и v_2 не соединены цепью в $M \cup M_\alpha$.

2) Пусть $j > 1$, $\varphi(v_{j-1} v_j) = \alpha$, для определённости $\alpha = 1$. Если вершины v_j и v_{j+1} не соединены цепью в $M \cup M_2$ или $M \cup M_3$, то окрашиваем $v_j v_{j+1}$ в соответствующий цвет $\beta \in \{2, 3\}$. В противном случае полагаем $\varphi(v_j v_{j+1}) := 1$, а ребро $v_{j-1} v_j$ перекрашиваем: при $j = 2$ — произвольно, иначе — в цвет, отличный от $\varphi(v_{j-2} v_{j-1})$ (рис. 4).

Лемма 2. Процедура $\varphi(T_1)$ за время $O(n)$ строит раскраску рёбер тура T_1 в три цвета такую, что множество рёбер каждого цвета является паросочетанием и в объединении с M даёт тур.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции можем считать, что к моменту окрашивания очередного ребра $v_j v_{j+1}$ цепи $p = v_1 v_2 \dots v_m \in P(T_1)$ множество всех уже окрашенных рёбер M_α является паросочетанием, а подграф $M \cup M_\alpha$ не содержит циклов, т.е. является туром (как объединение двух паросочетаний), $\alpha = 1, 2, 3$. Рассмотрим момент окрашивания $v_j v_{j+1}$. Если $j = 1$, то цвет α , удовлетворяющий правилу 1, найдётся, так как в каждом подграфе $M \cup M_\alpha$ вершины v_1, v_2 могут быть инцидентны только M -рёбрам $v_1 x_1, v_2 x_2$ соответственно, которыми будут оканчиваться все (v_1, v_2) -цепи в турах $M \cup M_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Поскольку в подграфе $T_1 \cup M$ степени всех вершин не превосходят 3, вершины x_1 и x_2 могут принадлежать не более чем двум таким цепям, а значит, нужный цвет α существует.

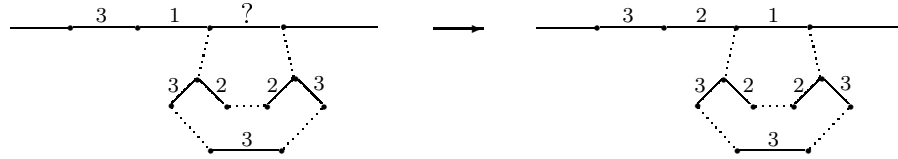


Рис. 4

Пусть $j > 1$, $\varphi(v_{j-1}v_j) = 1$ и ребро $v_j v_{j+1}$ невозможно окрасить в цвет $\beta \neq 1$, удовлетворяющий правилу 2. Тогда и в $M \cup M_2$, и в $M \cup M_3$ вершины v_j и v_{j+1} соединены цепью. Процедура $\varphi(T_1)$ окрашивает $v_j v_{j+1}$ в цвет 1 и перекрашивает $v_{j-1}v_j$ в цвет $\gamma \in \{2, 3\}$ такой, что если $j > 2$, то $\gamma \neq \varphi(v_{j-2}v_{j-1})$. При этом смежные рёбра остаются окрашенными в разные цвета. Докажем, что в $M \cup M_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) не образуется циклов. Действительно, из отсутствия подходящего цвета $\beta \in \{2, 3\}$ для окрашивания $v_j v_{j+1}$ следует, что в M существуют рёбра $v_j x$ и $v_{j+1} x'$, причём вершины x и x' инцидентны рёбрам цветов 2 и 3. Отсюда следует, что после окрашивания $v_j v_{j+1}$ в 1 не образуется циклов в $M \cup M_1$. С другой стороны, в туре $M \cup M_\gamma$ (до перекрашивания $v_{j-1}v_j$) цепь с началом v_j определена однозначно и оканчивается в v_{j+1} . Это означает, что после окрашивания ребра $v_{j-1}v_j$ цветом γ не образуется циклов в $M \cup M_\gamma$.

Временная сложность процедуры $\varphi(T_1)$ оценивается как произведение числа окрашиваемых рёбер $|T_1| = O(n)$ на время окраски одного ребра, которое определяется трудоёмкостью проверки на заикливание в турах $M \cup M_\alpha$. Каждая такая проверка может быть проведена за константное время, если процедура хранит информацию о парах концов цепей в каждом из туров $M \cup M_\alpha$. Лемма 2 доказана.

Далее построим раскраску $\psi : E(T_2) \rightarrow \{1, 2\}$ рёбер тура T_2 такую, что множество рёбер каждого цвета в объединении с M даёт тур. Множество рёбер, окрашенных цветом $i \in \{1, 2\}$, будем обозначать через M'_i .

ПРОЦЕДУРА $\psi(T_2)$

ЭТАП 1. Произвольно окрашиваем все рёбра однорёберных цепей тура T_2 цветами из $\{1, 2\}$. Переходим на этап 2.

ЭТАП 2. Поочерёдно рёбра каждой цепи $p = v_1 v_2 \dots v_m \in P(T_2)$, где $m \geq 3$, окрашиваем следующим образом:

1) красим ребро $v_1 v_2$ в цвет $\alpha \in \{1, 2\}$ такой, что v_1 и v_2 не соединены цепью в $M \cup M'_\alpha$;

2) для всех $j = 2, \dots, m-2$ полагаем $\psi(v_j v_{j+1}) := \alpha$, если j нечётно, и $\psi(v_j v_{j+1}) := 3 - \alpha$, если j чётно;

3) последнее ребро $v_{m-1} v_m$ окрашиваем в цвет $\beta = 3 - \psi(v_{m-2} v_{m-1})$, если v_{m-1} и v_m не соединены цепью в $M \cup M'_\beta$, иначе полагаем (рис. 5)

$$\psi(v_{m-1} v_m) := 3 - \beta, \quad \psi(v_{m-2} v_{m-1}) := \beta.$$

После выполнения этапа 2 процедура завершает работу.

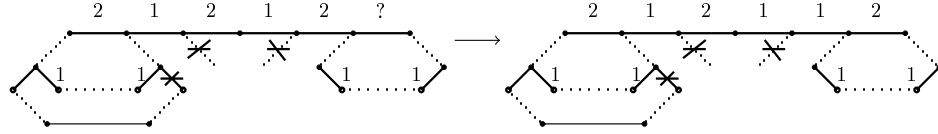


Рис. 5

Лемма 3. Процедура $\psi(T_2)$ за время $O(n)$ строит раскраску рёбер T_2 в два цвета такую, что множество рёбер каждого цвета в объединении с M даёт тур и каждая цепь тура T_2 содержит не более одной пары смежных рёбер одного цвета.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу свойства (iii) на этапе 1 циклов в $M \cup M'_i$ не образуется.

Рассмотрим этап 2. Докажем, что на шаге 1 найдётся подходящий цвет α для окрашивания ребра $v_1 v_2$. Действительно, если вершина v_2 не инцидентна рёбрам из M , то в качестве α можно взять любой из цветов 1 или 2. Пусть существует ребро $v_2 x \in M$. Поскольку $d_H(v_2) = 3$, согласно свойству (iv) имеем $d_H(x) = 2$, т. е. вершина x инцидентна не более чем одному окрашенному ребру из T_2 . Это означает, что вершины v_1 и v_2 могут быть соединены цепью только в одном из подграфов $M \cup M'_1$, $M \cup M'_2$, т. е. нужный цвет α существует.

На шаге 2 процедура окрашивает цепь p до предконцевого ребра включительно, чередуя цвета, при этом по свойству (iv) для каждого ребра $v_j v_{j+1}$ хотя бы один из его концов не покрыт рёбрами из M . Следовательно, запрещённых циклов не образуется, а все окрашенные рёбра каждого из цветов образуют паросочетание.

Рассмотрим шаг 3. Без ограничения общности считаем, что

$$\psi(v_{m-2}v_{m-1}) = 1.$$

Если v_{m-1} и v_m не соединены цепью в $M \cup M'_2$, то ребро $v_{m-1}v_m$ окрашивается в цвет 2, при этом раскраска всех рёбер цепи p остаётся правильной. Пусть v_{m-1} и v_m соединены цепью в $M \cup M'_2$, тогда в силу свойства (iv) эти вершины не соединены в $M \cup M'_1$. Следовательно, окрашивание $v_{m-1}v_m$ в цвет 1 не приводит к образованию циклов в $M \cup M'_1$. Докажем, что после перекрашивания ребра $v_{m-2}v_{m-1}$ в цвет 2 свойство $M \cup M'_2$ быть туром не нарушается. Во-первых, заметим, что до этой перекраски единственная цепь в $M \cup M'_2$ с началом в v_{m-1} оканчивается в v_m , поэтому при окрашивании $v_{m-2}v_{m-1}$ в цвет 2 циклов не образуется. Во-вторых, поскольку $d_H(v_{m-1}) = 3$, по свойству (iv) имеем $d_H(v_{m-2}) = 2$. Следовательно, после перекраски $v_{m-2}v_{m-1}$ вершина v_{m-2} в $M \cup M'_2$ имеет степень не более 2.

Остаётся заметить, что при выполнении процедуры на каждой цепи тура T_2 может образоваться лишь одна пара смежных одноцветных рёбер, а именно $v_{m-3}v_{m-2}$ и $v_{m-2}v_{m-1}$. Временная сложность процедуры $\psi(T_2)$ оценивается таким же образом, как при доказательстве леммы 2. Лемма 3 доказана.

2.3. Свойства туров $M \cup M_i$ и $M \cup M'_i$. В этом пункте устанавливаются некоторые свойства туров $M \cup M_i$ и $M \cup M'_i$, обеспечивающие возможность их дополнения до гамильтоновых циклов.

Лемма 4. *Никакой конец цепи из T_1 не может быть концом цепи в $M \cup M'_i$, $i = 1, 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v — конец цепи в T_1 . В силу свойства (i') при v имеется ребро из M и пара рёбер e_1, e_2 из T_2 . Так как по лемме 3 $M \cup M'_1$ и $M \cup M'_2$ — туры, рёбра e_1, e_2 не могут принадлежать одному и тому же M'_i . Следовательно, вершина v не является концом цепи ни в $M \cup M'_1$, ни в $M \cup M'_2$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $n \geq 15$. Если $p(T_2) \leq 2$, то для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ тур $M \cup M_i$ состоит не менее чем из четырёх цепей. При этом если среди них имеется ровно одна цепь положительной длины, то число синглов*

не меньше 5, а если цепей положительной длины ровно две, то число синглов не меньше 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(T_2) \leq 2$. Тогда $p(T_1) \leq 2$ по свойству (v). Подграф $T_1 \cup T_2$ содержит не более 8 вершин степени 3. Следовательно, $|M| \leq 4$.

Пусть s и k — количество синглов и цепей положительной длины в $M \cup M_i$ соответственно. Тогда $p(M \cup M_i) = k + s = n - |M \cup M_i|$. Так как M и M_i — паросочетания, в каждой цепи тура $M \cup M_i$ рёбер из M_i не более чем на одно больше, чем рёбер из M . Значит, $|M_i| \leq |M| + k$, откуда получаем

$$15 - (k + s) \leq n - (k + s) = |M \cup M_i| \leq |M| + |M| + k \leq 4 + 4 + k = 8 + k.$$

Следовательно, $s \geq 7 - 2k$, тем самым $p(M \cup M_i) = k + s \geq 4$. При этом если $k = 1$, то $s \geq 5$, а если $k = 2$, то $s \geq 3$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $n \geq 15$. Если $p(T_2) \leq 2$ или $p(T_1) = 1$, то для каждого $i \in \{1, 2\}$ тур $M \cup M'_i$ содержит не менее трёх цепей положительной длины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(T_2) \leq 2$. Тогда $p(T_1) \leq 2$ по свойству (v). Следовательно, $|M| \leq 4$. Из свойства (i') и описания процедуры $\psi(T_2)$ следует, что на каждой цепи $p = v_1 v_2 \dots v_m \in P(T_2)$ только одна вершина может быть не покрыта ребром из $M \cup M'_i$, а именно вершина v_{m-2} , при условии, что в M'_{3-i} имеется пара смежных рёбер $v_{m-3} v_{m-2}, v_{m-2} v_{m-1}$. Это означает, что число синглов s в $M \cup M'_i$ равно числу пар смежных рёбер в M'_{3-i} . В частности, $s \leq p(T_2) \leq 2$. При этом число пар смежных рёбер в M'_i не превосходит $p(T_2) - s \leq 2 - s$.

Пусть k — число цепей положительной длины в $M \cup M'_i$. Тогда

$$|M \cup M'_i| = n - p(M \cup M'_i) = n - k - s \geq 15 - k - s. \quad (*)$$

С другой стороны, в каждой цепи тура $M \cup M'_i$, содержащей t пар смежных рёбер из M'_i , число рёбер из M'_i не более чем на $1 + t$ превосходит число рёбер из M . Так как $|M| \leq 4$ и в M'_i имеется не более $2 - s$ пар смежных рёбер, имеем

$$|M'_i| \leq |M| + k + (2 - s) \leq 6 + k - s. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получаем

$$15 - k - s \leq |M \cup M'_i| = |M| + |M'_i| \leq 4 + 6 + k - s = 10 + k - s,$$

что равносильно $k \geq 3$.

Пусть $p(T_1) = 1$. Можно считать, что $p(T_2) \geq 3$. В силу свойства (v) в T_2 имеется не меньше двух циклических цепей. Согласно свойствам (iii) и (iv) внутренние вершины любой циклической цепи не инцидентны рёбрам из M . Следовательно, рёбра из M'_1 и M'_2 в таких цепях чередуются. Таким образом, каждая циклическая цепь тура T_2 в объединении с M -ребром, её замыкающим, содержит по крайней мере одну цепь положительной длины каждого из туров $M \cup M'_1$, $M' \cup M_2$. Остаётся заметить, что в каждом из этих туров имеется по крайней мере ещё одна цепь, содержащая рёбра M , инцидентные концам ациклических цепей из T_1 и T_2 . Лемма 6 доказана.

2.4. Построение туров T_1^* и T_2^* . Следующая процедура находит в связном 4-регулярном графе G_4 ($\equiv G_4^i$), не изоморфном K_5 и $K_{4,4}$, пару туров, которые далее используются алгоритмом $A_{7/9}$ для построения гамильтоновых циклов H_1 и H_2 .

ПРОЦЕДУРА $T_{1,2}^*$

ЭТАП 0. Последовательно применяя процедуры $P_{8/5}$ из [2] и $T_{1,2}$ из п. 2.1, находим в G_4 туры T_1 , T_2 и паросочетание M со свойствами (i)–(vii). Переходим на этап 1.

ЭТАП 1. Если $w(T_1 \cup T_2) \geq \frac{7}{9}w(G_4)$, то полагаем $T_1^* := T_1$, $T_2^* := T_2$ и завершаем работу, иначе переходим на этап 2.

ЭТАП 2. С помощью процедуры $\psi(T_2)$ разбиваем тур T_2 на множества рёбер M'_1 , M'_2 , каждое из которых в объединении с M даёт тур. Если $w(T_1 \cup M'_j \cup M) \geq \frac{7}{9}w(G_4)$ для некоторого $j \in \{1, 2\}$, то полагаем $T_1^* := T_1$, $T_2^* := M'_j \cup M$ и завершаем работу, иначе переходим на этап 3.

ЭТАП 3. Полагаем $T_2^* := T_2$. При помощи процедуры $\varphi(T_1)$ разбиваем тур T_1 на паросочетания M_1 , M_2 , M_3 , каждое из которых в объединении с M даёт тур. Выбираем j такой, что вес $w(T_2 \cup M_j \cup M)$ максимален, и полагаем $T_1^* := M_j \cup M$. Конец.

Замечание 1. Процедура $T_{1,2}^*$ выдаёт в качестве T_1^* , T_2^* одну из следующих пар: $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, M \cup M'_1\}$, $\{T_1, M \cup M'_2\}$, $\{M \cup M_1, T_2\}$, $\{M \cup M_2, T_2\}$, $\{M \cup M_3, T_2\}$.

Лемма 7. Процедура $T_{1,2}^*$ за время $O(n^2)$ находит в связном 4-регулярном графе G_4 , не изоморфном K_5 и $K_{4,4}$, пару туров T_1^* , T_2^* , суммарный вес которых не меньше $\frac{7}{9}w(G_4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2, 3 и свойства (i) следует, что если процедура завершает работу на одном из этапов 1 или 2, то она строит пару

рёберно-непересекающихся туров в G_4 , оценка суммарного веса которых следует из этапов 1 и 2.

На этапе 3 имеем

$$w(T_1 \cup T_2) < \frac{7}{9}w(G_4), \quad T_2 = M'_1 \cup M'_2,$$

$$w(T_1 \cup M'_i \cup M) < \frac{7}{9}w(G_4), \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, $w(M) > \frac{2}{9}w(G_4)$, $w(M'_i) > \frac{2}{9}w(G_4)$, $i = 1, 2$, откуда $w(T_2) > \frac{4}{9}w(G_4)$. При помощи процедуры $\varphi(T_1)$ тур T_1 разбивается на три паросочетания M_1 , M_2 и M_3 , каждое из которых по лемме 2 в объединении с M даёт тур. Покажем, что существует индекс $j \in \{1, 2, 3\}$ такой, что $w(T_2 \cup M_j \cup M) \geq \frac{7}{9}w(G_4)$. Предположим, что $w(T_2 \cup M_1 \cup M) < \frac{7}{9}w(G_4)$. Тогда $w(M_2 \cup M_3) > \frac{2}{9}w(G_4)$. Без потери общности можно считать, что $w(M_2) > \frac{1}{9}w(G_4)$. Следовательно,

$$w(T_2 \cup M_2 \cup M) > \frac{4}{9}w(G_4) + \frac{1}{9}w(G_4) + \frac{2}{9}w(G_4) = \frac{7}{9}w(G_4).$$

Чтобы оценить временную сложность процедуры $T_{1,2}^*$ заметим, что трудоёмкость этапа 0 определяется процедурой $P_{8/5}$ из [2] и равна $O(n^2)$. Время выполнения каждого из этапов 1–3 не превосходит $O(n)$, как следует из лемм 2 и 3. Лемма 7 доказана.

3. Построение рёберно-непересекающихся цепей для компонент связности G_4

В случае, когда найденный алгоритмом $A_{7/9}$ на этапе 1 граф G_4 несвязен, нам потребуется найти для каждой его компоненты связности G_4^i пару рёберно-непересекающихся цепей в G , суммарный вес которых не меньше $\frac{7}{9}w(G_4^i)$. При этом если компонента G_4^i не изоморфна K_5 и $K_{4,4}$, то построенные цепи будут содержать все рёбра туров T_1^*, T_2^* , описанных в предыдущем разделе.

Через $T \rightarrow P$ (соответственно $T \rightarrow H$) будем обозначать процедуру соединения цепей тура T в одну цепь P (цикл H) путём добавления рёбер между их концевыми вершинами в произвольном порядке, при этом если добавленные рёбра находились в другом туре, то удаляем их из него.

3.1. Случай компоненты связности, не изоморфной K_5 и $K_{4,4}$. Пусть $G_4 (\equiv G_4^i)$ — связный 4-регулярный n -вершинный подграф в G , не изоморфный K_5 и $K_{4,4}$, T_1^*, T_2^* — рёберно-непересекающиеся туры в G_4 , найденные процедурой $T_{1,2}^*$ из п. 2.4.

Лемма 8. Описанная ниже процедура $P_{1,2}$ за время $O(n)$ находит в G пару рёберно-непересекающихся цепей P_1, P_2 со свойствами $V(P_1) = V(P_2) = V(G_4)$, $E(P_1) \cup E(P_2) \supset T_1^* \cup T_2^*$ и $w(P_1 \cup P_2) \geq \frac{7}{9}w(G_4)$ (при этом не обязательно выполняется включение $E(P_1) \cup E(P_2) \subset E(G_4)$).

ПРОЦЕДУРА $P_{1,2}$

ЭТАП 1. Выполняем $T_2^* \rightarrow P_2$, при необходимости перемещая рёбра из T_1^* в P_2 . Если после этого $p(T_1^*) = 1$, то полагаем $P_1 := T_1^*$ и завершаем работу, иначе переходим на этап 2.

ЭТАП 2. Пока $p(T_1^*) > 2$, добавляем к T_1^* ребро $e \notin E(P_2)$, соединяющее концевую вершину x кратчайшей цепи из T_1^* с концом другой цепи из T_1^* . При $p(T_1^*) = 2$ переходим на этап 3.

ЭТАП 3. Если существует ребро, соединяющее концы разных цепей из T_1^* и не принадлежащее P_2 , то добавляем его к T_1^* и полагаем $P_1 := T_1^*$, после чего завершаем работу. В противном случае тур T_1^* состоит из цепей $p_1 = x$ и $p_2 = y \dots z$ таких, что $xy \in E(P_2)$ и $xz \in E(P_2)$. Не нарушая общности, можем считать, что y — внутренняя вершина в P_2 . В этом случае перемещаем ребро xy из P_2 в T_1^* и полагаем $P_1 := T_1^*$. При этом цепь P_2 распадается на две цепи положительной длины. Соединяем их между собой ребром, не входящим в P_1 , и предъявляем полученную цепь в качестве P_2 . Конец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Для обоснования корректности процедуры $P_{1,2}$ заметим, что на этапе 2 требуемое ребро e найдётся, поскольку вершина x инцидентна не более чем двум P_2 -рёбрам, а в туре T_1^* имеется не меньше трёх концов цепей, не содержащих x . Действительно, в противном случае T_1^* состоит только из трёх одновершинных цепей, что невозможно в силу 4-регулярности графа G_4 . Для обоснования этапа 3 достаточно заметить, что если тур T_i^* состоит из двух неодноршинных цепей, то рёбра, соединяющие концы разных цепей, образуют 4-цикл, а потому хотя бы одно из них не принадлежит цепи P_{3-i} . Наконец, свойства $V(P_1) = V(P_2) = V(G_4)$, $E(P_1) \cup E(P_2) \supset E(T_1^*) \cup E(T_2^*)$ и $w(P_1 \cup P_2) \geq \frac{7}{9}w(G_4)$ следуют из описания процедуры $P_{1,2}$ и леммы 7.

Остаётся заметить, что этапы 1 и 2 процедуры $P_{1,2}$ выполняются за время $O(n)$, а этап 3 — за время $O(1)$. Лемма 8 доказана.

3.2. Случай компоненты связности, изоморфной K_5 или $K_{4,4}$.

Пусть G_4 — 4-регулярный подграф в G , изоморфный K_5 или $K_{4,4}$. Опишем процедуру, которая находит в G_4 пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых цепей, суммарный вес которых не меньше $\frac{4}{5}w(G_4) >$

$\frac{7}{9}w(G_4)$. Пусть $V(G_4) = \{v_0, \dots, v_4\}$, если $G_4 \cong K_5$, иначе $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ — вершины одной доли $G_4 \cong K_{4,4}$, $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ — вершины другой.

ПРОЦЕДУРА $P'_{1,2}$

ЭТАП 1. Если $G_4 \cong K_5$, то находим индекс $j \in \{0, \dots, 4\}$ такой, что

$$w(v_j v_{j+1}) + w(v_{j+2} v_{j+4}) = \min_{i=0,4} \{w(v_i v_{i+1}) + w(v_{i+2} v_{i+4})\}$$

(суммирование индексов производится по модулю 5).

Полагаем $P_1 := v_{j+1} v_{j+2} v_{j+3} v_{j+4} v_j$, $P_2 := v_{j+2} v_j v_{j+3} v_{j+1} v_{j+4}$ и завершаем работу.

ЭТАП 2. Если $G_4 \cong K_{4,4}$, то находим пару индексов $k, l \in \{0, \dots, 3\}$ таких, что

$$w(v_k u_{l+3}) + w(v_{k+1} u_{l+2}) = \min_{i,j=0,3} \{w(v_i u_{j+3}) + w(v_{i+1} u_{j+2})\}$$

(суммирование индексов производится по модулю 4).

Полагаем

$$P_1 := v_k u_l v_{k+1} u_{l+1} v_{k+2} u_{l+2} v_{k+3} u_{l+3},$$

$$P_2 := v_{k+1} u_{l+3} v_{k+2} u_l v_{k+3} u_{l+1} v_k u_{l+2}$$

и завершаем работу.

Лемма 9. Процедура $P'_{1,2}$ за время $O(1)$ находит в графе G_4 , изоморфном K_5 или $K_{4,4}$, пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых цепей, суммарный вес которых не меньше $\frac{4}{5}w(G_4)$ или $\frac{7}{8}w(G_4)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_4 \cong K_5$. Очевидно, что минимальное по весу паросочетание вида $v_i v_{i+1}$, $v_{i+2} v_{i+4}$, $i = \overline{0,4}$, имеет вес не более $\frac{1}{5}w(G_4)$, так как все такие паросочетания образуют разбиение $E(G_4)$. Без потери общности допустим, что это паросочетание $v_0 v_1$, $v_2 v_4$. Тогда на первом этапе процедуры будут найдены индекс $j = 0$ и пара непересекающихся гамильтоновых цепей $v_1 v_2 v_3 v_4 v_0$, $v_2 v_0 v_3 v_1 v_4$, которая имеет вес $w(G_4) - (w(v_0 v_1) + w(v_2 v_4)) \geq w(G_4) - \frac{1}{5}w(G_4) = \frac{4}{5}w(G_4)$.

Пусть $G_4 \cong K_{4,4}$. Минимальное по весу паросочетание вида $v_i u_{j+3}$, $v_{i+1} u_{j+2}$, $i, j = \overline{0,3}$, имеет вес не более $\frac{1}{8}w(G_4)$, так как число таких паросочетаний равно 16 и они дважды покрывают $E(G_4)$. Без потери общности допустим, что минимальным является паросочетание $v_0 u_3$, $v_1 u_2$. Тогда на втором этапе будут найдены индексы $k = l = 0$ и пара непересекающихся гамильтоновых цепей $v_0 u_0 v_1 u_1 v_2 u_2 v_3 u_3$, $v_1 u_3 v_2 u_0 v_3 u_1 v_0 u_2$, которая имеет вес $w(G_4) - (w(v_0 u_3) + w(v_1 u_2)) \geq w(G_4) - \frac{1}{8}w(G_4) = \frac{7}{8}w(G_4)$.

Утверждение о временной сложности процедуры $P'_{1,2}$ следует из её описания и условия $|V(G_4)| \leq 8$. Лемма 9 доказана.

4. Дополнение пары частичных туров до гамильтоновых циклов

В этом разделе будет описана и обоснована процедура преобразования пары частичных туров T_1^*, T_2^* в G в пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов. При этом формулировка самой процедуры даётся в п. 4.1, а её корректность и свойства устанавливаются в п. 4.2.

4.1. Описание процедуры $H_{1,2}$. Пусть даны граф $G = K_n$, $n \geq 15$, G_4 — 4-регулярный подграф в G , полученный на этапе 1 алгоритма $A_{7/9}$, и T_1^*, T_2^* — пара частичных туров в G , построенная либо на этапе 2 этого алгоритма (если граф G_4 связан), либо на этапах 2–4 (если G_4 несвязен).

Начнём с одного необходимого определения. Пусть в графе G имеется пара рёберно-непересекающихся цепей P_1, P_2 на одном и том же множестве вершин $U \subset V$, где $|U| = m > 1$. Ориентацию $P_1 = x_1 x_2 \dots x_m$, $P_2 = y_1 y_2 \dots y_m$ цепей P_1 и P_2 назовём *согласованной*, если $x_1 = y_1$ или $x_1 \notin \{y_1, y_m\}$, а также $x_m = y_m$ или $x_m \notin \{y_1, y_m\}$. Заметим, что при этом $x_1 \neq y_m$ и $x_m \neq y_1$. Ясно, что согласованная ориентация двух цепей всегда существует.

Описанная ниже процедура $H_{1,2}$ использует на некоторых этапах процедуру $P_{T \rightarrow H}$ из [2], позволяющую достроить данный тур T , содержащий не менее трёх цепей положительной длины и рёберно-непересекающийся с заданным гамильтоновым циклом H' , до гамильтонова цикла H , непересекающегося с H' , путём добавления рёбер между концевыми вершинами цепей из T .

ПРОЦЕДУРА $P_{T \rightarrow H}$

ЭТАП 1. Пока в T имеется сингл s , выбираются три произвольные цепи положительной длины (u_1, \dots, u_k) , (v_1, \dots, v_l) и (w_1, \dots, w_m) . К туру T добавляется одно из рёбер su_1, sv_1, sw_1 , которое не принадлежит гамильтонову циклу H' . К окончанию этапа 1 в T нет синглов.

ЭТАП 2. Пока в T имеется более трёх цепей, выбираются две произвольные цепи (u_1, \dots, u_k) и (v_1, \dots, v_l) . К туру T добавляется одно из рёбер $u_1 v_1, u_1 v_l, u_k v_1, u_k v_l$, которое не принадлежит гамильтонову циклу H' .

ЭТАП 3. К началу этапа тур T состоит ровно из трёх цепей положительной длины (u_1, \dots, u_k) , (v_1, \dots, v_l) и (w_1, \dots, w_m) . Из всех возможных вариантов соединения этих цепей в гамильтонов цикл H выбирается тот, который не использует рёбер цикла H' .

Утверждение. По заданным рёберно-непересекающимся гамильтонову циклу H' и туру T в графе G процедура $P_{T \rightarrow H}$ за время $O(n)$ строит гамильтонов цикл $H \supseteq T$ такой, что $H \cap H' = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На этапе 1 имеются три ребра cu_1 , cv_1 и cw_1 , поэтому хотя бы одно из них не входит в H' . На этапе 2 рёбра u_1v_1 , u_1v_l , u_kv_1 и u_kv_l образуют цикл длины 4, поэтому хотя бы одно из них не входит в H' . Возможность построения цикла H на этапе 3 доказана в [1] рассмотрением возможных случаев расположения на цикле H' концов цепей, оставшихся на этапе 3. Таким образом, процедура корректна. Очевидно, что время её работы линейно по n . Утверждение доказано.

В приведённом ниже описании процедуры $H_{1,2}$ подразумевается, что если на некотором её этапе происходит построение двух гамильтоновых циклов H_1, H_2 , то процедура заканчивает работу.

ПРОЦЕДУРА $H_{1,2}$

ЭТАП 0. Пусть $G_4^1(V_1, E_1), G_4^2(V_2, E_2), \dots, G_4^t(V_t, E_t)$ — все компоненты связности графа G_4 . При $t = 1$ переходим на этап 1, а при $t \geq 2$ — на этап 2.

ЭТАП 1. Заметим, что на этапе 1 и его подэтапах граф G_4 связан, $V(G_4) = V$ и туры T_1^*, T_2^* построены процедурой $T_{1,2}^*$ из п. 2.4. Пусть туры T_1, T_2 и паросочетание M получены на этапе 0 этой процедуры. Если $T_1^* = T_1$, то переходим на этап 1.1, а если $T_1^* = M \cup M_i$ и $T_2^* = T_2$, где M_i — одно из паросочетаний, построенных процедурой $\varphi(T_1)$, то на этап 1.2.

ЭТАП 1.1. Пусть $T_1^* = T_1$. При $p(T_1) \geq 2$ переходим на этап 1.1.1, а при $p(T_1) = 1$ — на этап 1.1.2.

ЭТАП 1.1.1. Пусть $p(T_1) \geq 2$. Выполняем $T_2^* \rightarrow H_2$. Если после этого $p(T_1) \geq 3$, то достраиваем T_1 до гамильтонова цикла H_1 , не пересекающегося с H_2 , при помощи процедуры $P_{T \rightarrow H}$ из [2]. В противном случае выполняем $T_1 \rightarrow H_1$.

ЭТАП 1.1.2. На этом этапе и его подэтапах имеем $P(T_1) = \{p_1 = v_1v_2 \dots v_n\}$. Если $T_2^* = T_2$, то при $p(T_2) = 1$ переходим на этап 1.1.2.1, а при $p(T_2) = 2$ — на этап 1.1.2.2. Во всех остальных случаях ($T_2^* = T_2$ и $p(T_2) \geq 3$, либо $T_2^* = M \cup M'_i$) полагаем $H_1 := p_1 \cup \{v_1v_n\}$, после чего дополняем T_2^* до гамильтонова цикла H_2 процедурой $P_{T \rightarrow H}$.

ЭТАП 1.1.2.1. Пусть $T_2^* = T_2$ и $P(T_2) = \{p_2 = v_k \dots v_l\}$, где $l > k$. Полагаем $H_2 := p_2 \cup \{v_kv_l\}$, и если $l \neq k + 1$, то $H_1 := p_1 \cup \{v_1v_n\}$, иначе $H_1 := p_1 \cup \{v_1v_{k+1}, v_kv_n\} \setminus \{v_kv_{k+1}\}$.

ЭТАП 1.1.2.2. Пусть $T_2^* = T_2$ и $P(T_2) = \{p'_1, p'_2\}$. Если не существует такого индекса k , что $p'_1 = v_k \dots v_l$, $p'_2 = v_{k-1} \dots v_{k+1}$, то полагаем $H_1 := p_1 \cup \{v_1 v_n\}$ и соединяем цепи p'_1, p'_2 в гамильтонов цикл H_2 , добавляя к T_2 два ребра, не принадлежащих H_1 .

Пусть $p'_1 = v_k \dots v_l$, $p'_2 = v_{k-1} \dots v_{k+1}$. Если $l \in \{k-2, k+2\}$, для определённости $l = k+2$, то полагаем $H_2 := T_2 \cup \{v_{k-1} v_k, v_{k+1} v_{k+2}\}$, $T_1 := T_1 \setminus \{v_{k-1} v_k, v_{k+1} v_{k+2}\}$, после чего дополняем T_1 до гамильтонова цикла H_1 процедурой $P_{T \rightarrow H}$.

Наконец, в случае $l \notin \{k-2, k+2\}$ согласно свойству (vii) хотя бы одно из рёбер $v_1 v_{k+1}, v_{k-1} v_n$ не принадлежит цепи p'_2 (а значит, и туру T_2). Пусть для определённости $v_1 v_{k+1} \notin T_2$. Если $v_k v_n \notin T_2$, то полагаем $H_1 := p_1 \cup \{v_1 v_{k+1}, v_k v_n\} \setminus \{v_k v_{k+1}\}$, $H_2 := T_2 \cup \{v_k v_{k+1}, v_{k-1} v_l\}$, иначе $H_1 := p_1 \cup \{v_1 v_k, v_{k-1} v_n\} \setminus \{v_{k-1} v_k\}$, $H_2 := T_2 \cup \{v_{k-1} v_k, v_{k+1} v_l\}$.

ЭТАП 1.2. Пусть $T_1^* = M \cup M_i$ и $T_2^* = T_2$. При $p(T_2) \leq 2$ переходим на этап 1.2.1, а при $p(T_2) \geq 3$ — на этап 1.2.2.

ЭТАП 1.2.1. Пусть $p(T_2) \leq 2$. Выполняем $T_2 \rightarrow H_2$. Если после этого количество цепей положительной длины в T_1^* окажется меньше трёх, то соединяем между собой синглы из T_1^* рёбрами, не входящими в H_2 , до тех пор, пока в T_1^* не образуется трёх цепей положительной длины. Далее дополняем T_1^* до гамильтонова цикла H_1 процедурой $P_{T \rightarrow H}$.

ЭТАП 1.2.2. Пусть $p(T_2) \geq 3$. Соединяем T_1^* в гамильтонову цепь $P = v_1 v_2 \dots v_n$, последовательно добавляя рёбра, не образующие однорёберных цепей в T_2 , и полагаем $H_1 := P \cup \{v_1 v_n\}$. Если после этого в T_2 имеется не меньше трёх цепей положительной длины, то дополняем T_2 до гамильтонова цикла H_2 процедурой $P_{T \rightarrow H}$. В противном случае T_2 состоит из двух цепей положительной длины $p'_1 = v_k \dots v_l$, $p'_2 = v_s \dots v_t$ и синглов v_1 и v_n , соединённых ребром в H_1 . Без потери общности можно считать, что $k < l$ и $s < t$. В этом случае полагаем

$$H_2 := T_2 \cup \{v_1 v_l, v_1 v_t, v_k v_n, v_s v_n\}.$$

ЭТАП 2. Пусть $t \geq 2$, тогда граф G_4 несвязен. При $t = 2$ переходим на этап 2.1, а при $t \geq 3$ — на этап 2.2.

ЭТАП 2.1. Пусть $t = 2$, тур T_1^* состоит из цепей P_1, Q_1 , а тур T_2^* — из цепей P_2, Q_2 , где $V(P_1) = V(P_2) = V_1$, $V(Q_1) = V(Q_2) = V_2$. Рассмотрим согласованную ориентацию цепей $P_1 = x_1 x_2 \dots x_l$ и $P_2 = y_1 y_2 \dots y_l$, а также цепей $Q_1 = x'_1 x'_2 \dots x'_m$ и $Q_2 = y'_1 y'_2 \dots y'_m$ и положим

$$H_1 := P_1 \cup Q_1 \cup \{x_1 x'_1, x_l x'_m\}, \quad H_2 := P_2 \cup Q_2 \cup \{y_1 y'_1, y_l y'_m\}.$$

ЭТАП 2.2. Пусть $t \geq 3$. Дополняем тур T_1^* до гамильтонова цикла H_1 процедурой $T_1^* \rightarrow H_1$, а тур T_2^* — до гамильтонова цикла H_2 , не пересекающегося с H_1 , процедурой $P_{T \rightarrow H}$.

4.2. Обоснование процедуры $H_{1,2}$. Для обоснования свойств процедуры $H_{1,2}$ докажем следующую ключевую лемму.

Лемма 10. Процедура $H_{1,2}$ за время $O(n)$ находит в $G = K_n$, где $n \geq 15$, пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 такую, что $H_1 \cup H_2 \supset T_1^* \cup T_2^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что процедура $T \rightarrow H$ за время $O(n)$ достраивает тур T до гамильтонова цикла H . Процедура $P_{T \rightarrow H}$ из [2] замыкает T до гамильтонова цикла, не пересекающегося с уже имеющимся, в том случае, если T содержит не менее трёх цепей положительной длины. При этом $P_{T \rightarrow H}$ также имеет линейную трудоёмкость. Обе процедуры обладают тем свойством, что построенная пара гамильтоновых циклов (цикл и тур) содержит в объединении все рёбра исходных двух туров (цикла и тура).

Докажем, что процедура $H_{1,2}$ на всех этапах работает корректно и строит пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 в G . При этом включение $H_1 \cup H_2 \supset T_1^* \cup T_2^*$ и оценка временной сложности $O(n)$ будут следовать из описания этапов процедуры $H_{1,2}$, свойств процедур $T \rightarrow H$ и $P_{T \rightarrow H}$, леммы 8 и того факта, что этапы при выполнении процедуры $H_{1,2}$ не повторяются.

СЛУЧАЙ 1. Граф G_4 связан, т. е. на этапе 0 имеем $t = 1$. В этом случае процедура $H_{1,2}$ переходит на этап 1, а туры T_1^*, T_2^* построены процедурой $T_{1,2}^*$ из п. 2.4. Согласно замечанию 1 имеем либо $T_1^* = T_1$ (тогда $T_2^* = T_2$ или $T_2^* = M \cup M'_i$, $i \in \{1, 2\}$), либо $T_1^* = M \cup M_j$, $T_2^* = T_2$, $j \in \{1, 2, 3\}$, где туры T_1, T_2 и паросочетание M построены на этапе 0 процедуры $T_{1,2}^*$ и обладают свойствами (i)–(vii), а множества рёбер M'_i, M_j получены на этапах 2, 3 этой процедуры.

Подслучай 1.1. $T_1^* = T_1$. Процедура переходит на этап 1.1.

Подслучай 1.1.1. $p(T_1) \geq 2$. В этом случае происходит переход на этап 1.1.1. В силу свойства (ii) в T_1 исходно нет синглов, а значит, есть хотя бы две цепи положительной длины. Докажем, что если в процессе выполнения $T_2^* \rightarrow H_2$ какая-нибудь цепь из T_1 разорвалась на несколько, то среди них есть хотя бы две цепи положительной длины. Из свойства (i') и леммы 4 следует, что первоначально у цепей из T_1 и T_2^* нет общих концов. Поэтому для любой цепи из T_1 её концевые вершины после выполнения $T_2^* \rightarrow H_2$ являются концами цепей положительной длины, что и тре-

буется доказать. Отсюда следует, что если после выполнения $T_2^* \rightarrow H_2$ оказалось $p(T_1) \geq 3$, то T_1 содержит не менее трёх цепей положительной длины. Этим обоснована корректность применения процедуры $P_{T \rightarrow H}$ на этапе 1.1.1. Остаётся заметить, что если $p(T_1) = 2$ после $T_2^* \rightarrow H_2$, то тур T_1 не изменился в процессе выполнения $T_2^* \rightarrow H_2$. В этом случае корректность применения $T_1 \rightarrow H_1$ следует из свойства (ii) и отсутствия общих концевых вершин у T_1 и T_2^* .

Подслучай 1.1.2. $p(T_1) = 1$. Имеем $P(T_1) = \{p_1 = v_1 v_2 \dots v_n\}$, где $v_1 v_n \notin T_2 \cup M$ согласно свойству (ii). Процедура $H_{1,2}$ переходит на этап 1.1.2. Если не происходит перехода на этап 1.1.2.1 или 1.1.2.2 (т.е. либо $T_2^* = T_2$ и $p(T_2) \geq 3$, либо $T_2^* = M \cup M'_i$), то на этапе 1.1.2 получаем $H_1 = p_1 \cup \{v_1 v_n\}$, где ребро $v_1 v_n$ не принадлежит туру T_2^* в силу свойства (ii). Корректность последующего применения процедуры $P_{T \rightarrow H}$ к T_2^* следует из свойства (iii) и условия $p(T_2) \geq 3$ (при $T_2^* = T_2$) или из леммы 6 (при $T_2^* = M \cup M'_i$).

Если происходит переход на этап 1.1.2.1, то после его выполнения получаем $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ в силу свойств (ii), (i') и (vi). Пусть построение туров H_1 и H_2 происходит на этапе 1.1.2.2. Перед его началом $T_2^* = T_2$, $P(T_2) = \{p'_1, p'_2\}$. Если не существует такого индекса k , что $p'_1 = v_k \dots v_l$, $p'_2 = v_{k-1} \dots v_{k+1}$, то хотя бы одна пара рёбер, замыкающая T_2 до гамильтонова цикла, не имеет общих рёбер с p_1 (и не содержит $v_1 v_n$ в силу (i')), что позволяет достроить T_2 до цикла H_2 , рёберно-непересекающегося с $H_1 = p_1 \cup \{v_1 v_n\}$.

Пусть $p'_1 = v_k \dots v_l$, $p'_2 = v_{k-1} \dots v_{k+1}$. Если $l \in \{k-2, k+2\}$, скажем $l = k+2$, то на этапе 1.1.2.2 получаем $H_2 = T_2 \cup \{v_{k-1} v_k, v_{k+1} v_{k+2}\}$, при этом p_1 распадается на три цепи $v_1 \dots v_{k-1}$, $v_k v_{k+1}$ и $v_{k+2} \dots v_n$, каждая из которых имеет положительную длину в силу свойства (i'). Следовательно, применение процедуры $P_{T \rightarrow H}$ к туру T_1 корректно. Пусть $l \notin \{k-2, k+2\}$. В силу свойства (vii) можно считать, что $v_1 v_{k+1} \notin T_2$. Если $v_k v_n \notin T_2$, то выполнение условия $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ следует из определения циклов H_1 и H_2 . В случае $v_k v_n \in T_2$ дополнительно используется тот факт, что рёбра $v_1 v_k$ и $v_{k-1} v_n$ не принадлежат T_2 : первое из-за того, что цепь p'_1 начинается с ребра $v_k v_n$, второе — ввиду принадлежности вершин v_{k-1} и v_n разным цепям тура T_2 (p'_2 и p'_1 соответственно).

Подслучай 1.2. $T_1^* = M \cup M_i$, $T_2^* = T_2$. Процедура переходит на этап 1.2.

Подслучай 1.2.1. $p(T_2) \leq 2$. Происходит переход на этап 1.2.1. Заметим, что перед его началом для T_1^* верны все утверждения леммы 5. После выполнения $T_2 \rightarrow H_2$ на этапе 1.2.1 все эти утверждения остаются

верными, так как при последовательном перемещении рёбер из T_1^* в T_2^* общее число цепей и число синглов в T_1^* не уменьшается, а число цепей положительной длины уменьшается на единицу только при разрыве однорёберной цепи из T_1^* с образованием двух синглов. Остаётся заметить, что после выполнения $T_2 \rightarrow H_2$ среди любых трёх синглов в T_1^* найдутся два, которые можно соединить ребром, не принадлежащим H_2 . Отсюда и из леммы 5 следует возможность преобразования T_1^* в тур, содержащий не менее трёх цепей положительной длины, а следовательно, и корректность применения процедуры $P_{T \rightarrow H}$ к T_1^* при завершении этапа 1.2.1.

Подслучай 1.2.2. $p(T_2) \geq 3$. Процедура переходит на этап 1.2.2. Рассмотрим процесс построения гамильтоновой цепи P . До тех пор пока $p(T_1^*) \geq 2$, в T_1^* есть либо цепь положительной длины, либо не менее трёх цепей. Это означает, что если x — концевая вершина кратчайшей цепи в T_1^* , то существуют еще по крайней мере две концевые вершины y, z других цепей из T_1^* . Хотя бы одно ребро xy или xz не является однорёберной цепью в T_2 , что доказывает возможность соединения тура T_1^* в гамильтонову цепь P с соблюдением правил этапа 1.2.2. Так как в процессе этого соединения не уменьшается число цепей положительной длины в T_2 , из свойства (iii) следует, что перед добавлением ребра $v_1 v_n$ к P в туре T_2 имеется не меньше трёх таких цепей. Если ребро $v_1 v_n$ также не является однорёберной цепью в T_2 , то после его добавления к P в туре T_2 по-прежнему есть хотя бы три цепи положительной длины, что гарантирует применимость $P_{T \rightarrow H}$ к T_2 . В противном случае, если в T_2 остаются только две цепи положительной длины, то имеет место ситуация, описанная в конце этапа 1.2.2. В этом случае справедливость свойства $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ следует из определения цикла H_2 .

СЛУЧАЙ 2. Граф G_4 несвязен, т. е. $t \geq 2$. Теперь процедура переходит на этап 2. Заметим, что туры T_1^* и T_2^* построены на этапах 2–4 алгоритма $A_{7/9}$ и состоят из цепей с попарно одинаковыми множествами вершин, определяемыми компонентами связности G_4 . В частности, все эти цепи имеют положительную длину и $p(T_1^*) = p(T_2^*) = t$. Отсюда следует, что при $t \geq 3$ на этапе 2.2 процедура $T_1^* \rightarrow H_1$ не использует рёбер тура T_2^* , а после её завершения применима процедура $P_{T \rightarrow H}$ к T_2^* . Если $t = 2$, то процедура $H_{1,2}$ переходит на этап 2.1, после выполнения которого имеем $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ в силу согласованности ориентации цепей и определения туров H_1 и H_2 . Лемма 10 доказана.

5. Доказательство основной теоремы

Прежде всего заметим, что в силу лемм 1–3 и 7–10 временная сложность алгоритма $A_{7/9}$ определяется временем отыскания графа G_4 алгоритмом из [11] на этапе 1, которое равно $O(n^3)$. Свойство $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ следует из этапа 0 и леммы 10.

Докажем оценку точности. При $n \leq 14$ на этапе 0 находится точное решение задачи 2-PSP-max. Пусть $n \geq 15$. Заметим, что множество рёбер любой пары непересекающихся гамильтоновых циклов образует остовный 4-регулярный подграф в G . Таким образом, на этапе 1 решается релаксация 2-PSP-max. Следовательно, $w(G_4) \geq OPT$.

В силу лемм 7–9 к началу этапа 5 алгоритмом получена пара частичных туров T_1^* и T_2^* , суммарный вес которых не меньше $\frac{7}{9}w(G_4)$. В силу леммы 10 на этапе 5 эта пара туров дополняется (без потери веса) до пары непересекающихся гамильтоновых циклов. Отсюда и из доказанного неравенства $w(G_4) \geq OPT$ следует искомая оценка

$$w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7}{9}w(G_4) \geq \frac{7}{9}OPT.$$

Теорема 1 доказана.

6. Случай весов рёбер от 1 до q

Пусть весовая функция принимает значения в промежутке $[1, q]$, где $q > 1$ (задача 2-PSP-max(1, q)). Представленная в данном разделе модификация алгоритма $A_{7/9}$ позволяет получить для этого случая оценку точности $(7q + 3)/(9q + 1)$.

Напомним, что в соответствии с процедурами $P_{8/5}$, $T_{1,2}$, $\varphi(T_1)$ и $\psi(T_2)$, описанными в разд. 2, каждая компонента связности графа G_4 , не изоморфная K_5 и $K_{4,4}$, разбивается на туры

$$T_1 = M_1 \cup M_2 \cup M_3, \quad T_2 = M'_1 \cup M'_2$$

и паросочетание M такие, что каждое из множеств рёбер M_i и M'_j в объединении с M даёт тур.

Главное отличие описанной ниже модификации от основного алгоритма $A_{7/9}$ заключается в том, что каждая (а не только одна) из пар туров $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, M \cup M'_1\}$, $\{T_1, M \cup M'_2\}$, $\{M \cup M_1, T_2\}$, $\{M \cup M_2, T_2\}$ и $\{M \cup M_3, T_2\}$ достраивается в G до пары рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов, из которых затем выбирается наилучшая. Напомним, что в алгоритме $A_{7/9}$ соответствующий выбор осуществляется процедурой $T_{1,2}^*$, которая выдаёт из выше перечисленных пар туров ту,

вес которой составляет не менее $\frac{7}{9}w(G_4)$; лишь эта пара достраивается до пары гамильтоновых циклов H_1, H_2 .

Следующая процедура находит в связном 4-регулярном графе G_4 , не изоморфном K_5 и $K_{4,4}$, пары туров π_1, \dots, π_6 , далее используемых алгоритмом $A_{\frac{7q+3}{9q+1}}$ для построения соответствующих пар гамильтоновых циклов, среди которых выбирается решение.

ПРОЦЕДУРА $\pi_{1,6}$

ЭТАП 0. Последовательно применяя процедуры $P_{8/5}$ из [2] и $T_{1,2}$ из п. 2.1, находим в G_4 туры T_1, T_2 и паросочетание M со свойствами (i)–(vii). Полагаем $\pi_1 := \{T_1, T_2\}$ и переходим на этап 1.

ЭТАП 1. С помощью процедуры $\psi(T_2)$ разбиваем тур T_2 на множества рёбер M'_1 и M'_2 , каждое из которых в объединении с M даёт тур. Полагаем $\pi_2 := \{T_1, M \cup M'_1\}$, $\pi_3 := \{T_1, M \cup M'_2\}$. Переходим на этап 2.

ЭТАП 2. При помощи процедуры $\varphi(T_1)$ разбиваем тур T_1 на паросочетания M_1, M_2 и M_3 , каждое из которых в объединении с M даёт тур. Полагаем $\pi_4 := \{M \cup M_1, T_2\}$, $\pi_5 := \{M \cup M_2, T_2\}$, $\pi_6 := \{M \cup M_3, T_2\}$. Конец.

Лемма 11. Процедура $\pi_{1,6}$ за время $O(n^2)$ находит в связном 4-регулярном графе G_4 , не изоморфном K_5 и $K_{4,4}$, пары рёберно-непересекающихся туров $\pi_1 := \{T_1, T_2\}$, $\pi_2 := \{T_1, M \cup M'_1\}$, $\pi_3 := \{T_1, M \cup M'_2\}$, $\pi_4 := \{M \cup M_1, T_2\}$, $\pi_5 := \{M \cup M_2, T_2\}$ и $\pi_6 := \{M \cup M_3, T_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 1–3 следует, что каждая из построенных процедурой пар π_i , $i = \overline{1, 6}$, является парой рёберно-непересекающихся туров в G_4 .

Чтобы оценить временную сложность процедуры $\pi_{1,6}$ заметим, что трудоёмкость этапа 0 определяется процедурой $P_{8/5}$ из [2] и равна $O(n^2)$, а время выполнения каждого из этапов 1, 2 не превосходит $O(n)$, как следует из лемм 2 и 3. Лемма 11 доказана.

АЛГОРИТМ $A_{\frac{7q+3}{9q+1}}$

ЭТАП 0. При $n \leq 14$ полным перебором находим точное решение задачи 2-PSP-max(1, q). Иначе переходим на этап 1.

ЭТАП 1. Используя алгоритм Габова из [11], находим в G остовный 4-регулярный подграф G_4 с наибольшим рёберным весом. Алгоритмом поиска находим в G_4 все компоненты связности G_4^1, \dots, G_4^t . Переходим на этап 2.

ЭТАП 2. Если $t = 1$ (граф G_4 связан), то процедурой $\pi_{1,6}$ находим в G_4 пары рёберно-непересекающихся туров π_1, \dots, π_6 и переходим на этап 5.

В противном случае полагаем $\pi_i := \emptyset$, $i = \overline{1, 6}$ (туры, входящие в π_i , не имеют рёбер и состоят только из одновершинных цепей), и переходим на этап 3.

ЭТАП 3. Для каждой компоненты связности G_4^k , не изоморфной графам K_5 и $K_{4,4}$, применяем процедуру $\pi_{1,6}$. Далее для каждой из полученных пар туров π_i^k , $i = \overline{1, 6}$, процедурой $P_{1,2}$ из п. 3.1 находим в G рёберно-непересекающиеся цепи $P_1(i)$, $P_2(i)$ с множеством вершин $V(G_4^k)$. Полагаем $\pi_i := \pi_i \cup \{P_1(i), P_2(i)\}$ (к первому туру из π_i добавляем $P_1(i)$, ко второму — $P_2(i)$), $i = \overline{1, 6}$. Переходим на этап 4.

ЭТАП 4. В каждой компоненте связности G_4^k , изоморфной K_5 или $K_{4,4}$, процедурой $P'_{1,2}$ из п. 3.2 находим гамильтоновы цепи P_1 и P_2 . Полагаем $\pi_i := \pi_i \cup \{P_1, P_2\}$, $i = \overline{1, 6}$. Переходим на этап 5.

ЭТАП 5. Применяя к каждой паре туров π_i , полученной на этапах 2–4, процедуру $H_{1,2}$ из разд. 4, находим в G соответствующие пары рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов $(H_1(i), H_2(i))$, $i = \overline{1, 6}$. Выбираем среди них пару (H_1, H_2) с наибольшим суммарным весом рёбер, которую подаем на выход алгоритма. Конец.

Теорема 2. Алгоритм $A_{\frac{7q+3}{9q+1}}$ находит в полном n -вершинном графе G , веса рёбер которого принимают значения из промежутка $[1, q]$, пару рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов (H_1, H_2) , для которых выполняется оценка

$$w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7q+3}{9q+1} OPT.$$

Временная сложность алгоритма равна $O(n^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу лемм 8–11 временная сложность алгоритма $A_{\frac{7q+3}{9q+1}}$ определяется временем отыскания графа G_4 алгоритмом из [11] на этапе 1, которое равно $O(n^3)$. Свойство $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ следует из этапа 0 и леммы 10.

Докажем оценку точности. При $n \leq 14$ на этапе 0 находится точное решение задачи 2-PSP-max(1, q). Пусть $n \geq 15$. По доказанному выше имеем $w(G_4) \geq OPT$.

Пусть граф G_4 состоит из компонент связности G_4^1, \dots, G_4^t . Без потери общности будем считать, что компонента G_4^k не изоморфна графам K_5 и $K_{4,4}$ при $k = 1, \dots, a$, $G_4^k \cong K_5$ при $k = a+1, \dots, a+b$ и $G_4^k \cong K_{4,4}$ при $k = a+b+1, \dots, a+b+c = t$, где b и c — число компонент, изоморфных

K_5 и $K_{4,4}$ соответственно. Положим

$$G_4^A = \bigcup_{k=1}^a G_4^k, \quad G_4^B = \bigcup_{k=a+1}^{a+b} G_4^k, \quad G_4^C = \bigcup_{k=a+b+1}^t G_4^k,$$

$$n_a = |V(G_4^A)|, \quad n_b = |V(G_4^B)|, \quad n_c = |V(G_4^C)|.$$

Ясно, что $n = n_a + n_b + n_c$, $n_b = 5b$ и $n_c = 8c$.

В силу этапов 2 и 3 алгоритма для каждого $k = 1, \dots, a$ имеют место разбиения

$$G_4^k = T_1^k \cup T_2^k \cup M^k, \quad T_1^k = M_1^k \cup M_2^k \cup M_3^k, \quad T_2^k = M_1'^k \cup M_2'^k.$$

Положим

$$T_1 = \bigcup_{k=1}^a T_1^k, \quad T_2 = \bigcup_{k=1}^a T_2^k, \quad M = \bigcup_{k=1}^a M^k,$$

$$M_i = \bigcup_{k=1}^a M_i^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad M_j' = \bigcup_{k=1}^a M_j'^k, \quad j = 1, 2.$$

Ясно, что определённые таким образом туры T_1 и T_2 и паросочетания M, M_i и M_j' образуют разбиение подграфа G_4^A . Из свойства (i) следует, что $|M| \leq \frac{2n_a}{5}$ для $k = 1, \dots, a$.

Для каждой пары туров $\pi_i = (T_1(i), T_2(i))$ в G , $i = \overline{1, 6}$, построенной на этапах 2–4 алгоритма, через $(H_1(i), H_2(i))$ обозначим соответствующую пару гамильтоновых циклов, полученную из $(T_1(i), T_2(i))$ применением процедуры $H_{1,2}$ на этапе 5. Так как $H_1(i) \cup H_2(i) \supset T_1(i) \cup T_2(i)$, объединение циклов $H_1(i) \cup H_2(i)$ содержит в точности $2n - |T_1(i)| - |T_2(i)|$ рёбер, не входящих в $T_1(i) \cup T_2(i)$. Поскольку вес каждого такого ребра не меньше 1, выполняется оценка

$$w(H_1(i) \cup H_2(i)) \geq w(T_1(i) \cup T_2(i)) + 2n - |T_1(i)| - |T_2(i)|. \quad (*)$$

Из этапов 2 и 3 алгоритма следует, что построенные пары циклов $(H_1(1), H_2(1)), \dots, (H_1(6), H_2(6))$ содержат пары туров $\pi_1^A := \{T_1, T_2\}$, $\pi_2^A := \{T_1, M \cup M_1'\}$, $\pi_3^A := \{T_1, M \cup M_2'\}$, $\pi_4^A := \{M \cup M_1, T_2\}$, $\pi_5^A := \{M \cup M_2, T_2\}$ и $\pi_6^A := \{M \cup M_3, T_2\}$ в подграфе G_4^A соответственно. Далее для этих пар туров будем использовать обозначения $\pi_i^A = (T_1^A(i), T_2^A(i))$, $i = \overline{1, 6}$. Из этапа 4 и леммы 9 следует, что все пары циклов $(H_1(i), H_2(i))$ содержат одну и ту же пару туров (T_1^B, T_2^B) подграфа G_4^B с суммарным весом рёбер не меньше $\frac{4}{5}w(G_4^B)$ и числом рёбер $8b$, а также пару туров

(T_1^C, T_2^C) подграфа G_4^C с суммарным весом не меньше $\frac{7}{8}w(G_4^C)$ и числом рёбер $14c$.

Преобразуя оценку $(*)$, имеем

$$\begin{aligned} w(H_1(i) \cup H_2(i)) &\geq w(T_1(i) \cup T_2(i)) + 2n - |T_1(i)| - |T_2(i)| \\ &= w(T_1^A(i) \cup T_2^A(i)) + 2n_a - |T_1^A(i)| - |T_2^A(i)| + w(T_1^B \cup T_2^B) \\ &\quad + 2n_b - |T_1^B| - |T_2^B| + w(T_1^C \cup T_2^C) + 2n_c - |T_1^C| - |T_2^C|. \end{aligned}$$

Положим

$$w^A(i) = w(T_1^A(i) \cup T_2^A(i)) + 2n_a - |T_1^A(i)| - |T_2^A(i)|.$$

Используя ранее доказанные соотношения и неравенства, получаем

$$\begin{aligned} w(H_1(i) \cup H_2(i)) &\geq w^A(i) + \frac{4}{5}w(G_4^B) + 10b - 8b + \frac{7}{8}w(G_4^C) + 16c - 14c \\ &= w^A(i) + \frac{4}{5}w(G_4^B) + \frac{2n_b}{5} + \frac{7}{8}w(G_4^C) + \frac{2n_c}{8}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $w(G_4^B) \leq |E(G_4^B)|q = 2n_bq$ и $w(G_4^C) \leq 2n_cq$, имеем

$$\begin{aligned} w(H_1(i) \cup H_2(i)) &\geq w^A(i) + \frac{4}{5}w(G_4^B) + \frac{1}{5q}w(G_4^B) \\ &\quad + \frac{7}{8}w(G_4^C) + \frac{1}{8q}w(G_4^C) = w^A(i) + w_{BC}, \end{aligned}$$

где $w_{BC} = \frac{4q+1}{5q}w(G_4^B) + \frac{7q+1}{8q}w(G_4^C)$.

С учётом соотношений

$$G_4^A = T_1 \cup T_2 \cup M, \quad |T_1| + |T_2| + |M| = |E(G_4^A)| = 2n_a,$$

$$T_1 = M_1 \cup M_2 \cup M_3, \quad T_2 = M'_1 \cup M'_2$$

и определений пар туров $\pi_i^A = (T_1^A(i), T_2^A(i))$, $i = \overline{1, 6}$, приходим к системе оценок:

$$\begin{aligned} w(H_1 \cup H_2) &\geq w(H_1(1) \cup H_2(1)) \geq w^A(1) + w_{BC} \\ &= w(T_1 \cup T_2) + (2n_a - |T_1| - |T_2|) + w_{BC} = w(G_4^A) - w(M) + |M| + w_{BC}, \\ w(H_1 \cup H_2) &\geq w(H_1(2) \cup H_2(2)) \geq w(G_4^A) - w(M'_2) + |M'_2| + w_{BC}, \\ w(H_1 \cup H_2) &\geq w(H_1(3) \cup H_2(3)) \geq w(G_4^A) - w(M'_1) + |M'_1| + w_{BC}, \\ w(H_1 \cup H_2) &\geq w(H_1(4) \cup H_2(4)) \geq w(G_4^A) - w(M_2) - w(M_3) \\ &\quad + |M_2| + |M_3| + w_{BC}, \end{aligned}$$

$$w(H_1 \cup H_2) \geq w(H_1(5) \cup H_2(5)) \geq w(G_4^A) - w(M_1) - w(M_3) + |M_1| + |M_3| + w_{BC},$$

$$w(H_1 \cup H_2) \geq w(H_1(6) \cup H_2(6)) \geq w(G_4^A) - w(M_1) - w(M_2) + |M_1| + |M_2| + w_{BC}.$$

Складывая удвоенные первые три неравенства с последними тремя и учитывая, что $|T_1| + |T_2| + |M| = 2n_a$, получаем

$$9w(H_1 \cup H_2) \geq 7w(G_4^A) + 4n_a + 9w_{BC}. \quad (**)$$

С другой стороны, так как $|M| \leq \frac{2n_a}{5}$ и вес любого ребра не превосходит q , из первого неравенства системы следует, что

$$\begin{aligned} w(H_1 \cup H_2) &\geq w(G_4^A) - (q-1)|M| + w_{BC} \\ &\geq w(G_4^A) - (q-1)\frac{2n_a}{5} + w_{BC}. \quad (***) \end{aligned}$$

Домножая неравенство $(**)$ на $q-1$ и складывая с $(***)$, умноженным на 10, получаем $(9q+1)w(H_1 \cup H_2) \geq (7q+3)w(G_4^A) + (9q+1)w_{BC}$, что равносильно неравенству

$$w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7q+3}{9q+1}w(G_4^A) + \frac{4q+1}{5q}w(G_4^B) + \frac{7q+1}{8q}w(G_4^C).$$

Учитывая, что $w(G_4^A) + w(G_4^B) + w(G_4^C) = w(G_4) \geq OPT$ и

$$\frac{7q+3}{9q+1} \leq \min \left\{ \frac{4q+1}{5q}, \frac{7q+1}{8q} \right\}$$

при $q \geq 1$, приходим к искомой оценке

$$w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{7q+3}{9q+1} OPT.$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой $3/4$ для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 11–20.
2. Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 41–61.
3. Сердюков А. И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжёра на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 25. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. — С. 80–86.
4. Chen Z.-Z., Okamoto Y., Wang L. Improved deterministic approximation algorithms for Max TSP // Inf. Process. Lett. — 2005. — Vol. 95, N 2. — P. 333–342.
5. Chen Z.-Z., Wang L. An improved randomized approximation algorithm for Max TSP // J. Comb. Optim. — 2005. — Vol. 9, N 4. — P. 401–432.
6. De Brey M. J. D., Volgenant A. Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. — 1997. — Vol. 39, N 3. — P. 275–293.
7. De Kort J. B. J. M. Lower bounds for symmetric K -peripatetic salesman problems // Optimization. — 1991. — Vol. 22, N 1. — P. 113–122.
8. De Kort J. B. J. M. Upper bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. — 1992. — Vol. 23, N 4. — P. 357–367.
9. De Kort J. B. J. M. A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // Europ. J. Oper. Res. — 1993. — Vol. 70, N 2. — P. 229–243.
10. Duchenne E., Laporte G., Semet F. Branch-and-cut algorithms for the undirected m -peripatetic salesman problem // Europ. J. Oper. Res. — 2005. — Vol. 162, N 3. — P. 700–712.
11. Gabow H. N. An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput. (Boston, April 25–27, 1983). — New York: ACM, 1983. — P. 448–456.
12. Hassin R., Rubinstein S. Better approximations for max TSP // Inf. Process. Lett. — 2000. — Vol. 75, N 4. — P. 181–186.
13. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974) — NATO Advanced Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci., Vol. 19. — Dordrecht: Reidel, 1975. — P. 173–178.

- 14. van Zuylen A.** Multiplying pessimistic estimators: deterministic approximation of max TSP and maximum triangle packing // Computing and Combinatorics, 16th Annu. Int. Conf. COCOON 2010 (Nha Trang, Vietnam, July 19–21, 2010). Proc. — P. 60–69. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6196.)

Глебов Алексей Николаевич,
e-mail: angle@math.nsc.ru

Замбалаева Долгор Жамьяновна,
e-mail: dolgor@ngs.ru

Статья поступила
25 января 2011 г.

Переработанный вариант —
6 мая 2011 г.