ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2011. Том 18, № 4. С. 66–76

УДК 519.716

# О КЛАССИФИКАЦИЯХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ С ПОМОЩЬЮ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ *)

*С. С. Марченков*

**Аннотация.** На основе языка FE функциональных уравнений многозначной логики определяются операторы FE-, FEC- и QFEC-замыканий. Доказывается, что все три оператора порождают на множестве функций $k$-значной логики одну и ту же конечную классификацию, совпадающую с классификацией по группам автоморфизмов.

**Ключевые слова:** функция многозначной логики, группа автоморфизмов.

В вопросах классификации множества функций многозначной логики широкое распространение получил подход, основанный на операторах замыкания. На множестве $P_k$ функций $k$-значной логики определяется оператор замыкания $\mathcal{O}$, порождающий на множестве $P_k$ семейство $\mathcal{O}$-замкнутых классов (в общем случае пересекающихся), $\mathcal{O}$-классификацию множества $P_k$. К настоящему времени уже определено довольно большое число различных операторов замыкания от хорошо известного оператора суперпозиции до недавно введённого оператора FE-замыкания [8, 9].

Постепенно сложился ряд требований, которым должны удовлетворять вновь открываемые операторы замыкания. Прежде всего такие операторы $\mathcal{O}$ должны либо явно, либо производным образом содержать оператор суперпозиции. Это позволяет хотя бы частично использовать развитую технику и многочисленные результаты, имеющиеся для оператора суперпозиции. Кроме того, $\mathcal{O}$-замкнутые классы оказываются в этом случае замкнутыми относительно суперпозиции, что также даёт возможность применять, например, теоремы о порождающих системах и базисах, полученные для суперпозиции.

Другим важным требованием к $\mathcal{O}$-классификациям является их эффективность, т. е. возможность получения достаточно конструктивного

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00701.)

описания всех $\mathcal{O}$-замкнутых классов в $P_k$ при любом $k$. На практике это требование оборачивается конечностью либо счётностью $\mathcal{O}$-классификации множества $P_k$.

Имеется ещё несколько требований к нетривиальности (невырожденности) $\mathcal{O}$-классификаций, языкам описания $\mathcal{O}$-классификаций и используемым функциональным и логическим средствам.

Одна из «чисто алгебраических» классификаций множества $P_k$ связана с группами перестановок. На основном множестве $E_k$ рассматривается группа перестановок $G$, и этой группе сопоставляется класс всех функций из $P_k$, самодвойственных относительно всех перестановок группы $G$ (в другой терминологии класс всех функций $f$, для которых группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; f\rangle$ включает группу $G$). Эта классификация, разумеется, конечна, причём наименьшим в ней является класс всех однородных функций из $P_k$, соответствующий полной симметрической группе перестановок на $E_k$, а наибольшим — класс $P_k$, отвечающий единичной группе.

К сожалению, эта классификация явно не связана с операторами замыкания, что затрудняет, в частности, получение результатов о выразимости одних функций через другие, порождающих системах, порядках замкнутых классов и т. д.

Вместе с тем в [4] автором определены два логико-функциональных языка: языки первого и второго порядков 1L и 2L. Как оказалось, операторы 1L- и 2L-замыканий, определяемые на основе языков 1L и 2L, порождают одинаковые классификации множества $P_k$, в точности совпадающие с упомянутой выше классификацией, базирующейся на группах перестановок. Таким образом, имеются операторы замыкания, которые только за счёт структуры логико-функциональных формул, участвующих в определении операторов замыкания, дают классификации, основанные по существу на группах автоморфизмов.

В [5–7] положено начало исследованиям по функциональным уравнениям многозначной логики. В [8, 9] с использованием систем функциональных уравнений определён новый эффективный оператор FE-замыкания. Показано, что оператор FE-замыкания для множеств $P_2$ и $P_3$ даёт те же самые классификации, что и операторы 1L- и 2L-замыканий.

В настоящей статье продолжены исследования оператора FE-замыкания и его связи с операторами 1L- и 2L-замыканий. На основе оператора FE-замыкания вводятся операторы FEC-замыкания (с помощью расширения языка FE логическими связками & и $\neg$) и QFEC-замыкания (с помощью расширения языка FEC кванторами $\exists$ и $\forall$). Доказывается, что все три оператора FE-, FEC- и QFEC-замыканий порождают классификации, совпадающие с 1L- и 2L-классификациями. В частности, все пять названных операторов дают одну и ту же классификацию, которая совпадает с классификацией на основе групп автоморфизмов.

Введём основные понятия. Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $P_k$ — множество всех функций на $E_k$ (множество функций $k$-значной логики), $P_k^{(n)}$ — множество всех функций из $P_k$, зависящих от $n$ переменных.

Определим язык первого порядка 1L (здесь и далее значность логики $k$ предполагается фиксированной). Исходными символами языка 1L являются индивидные переменные $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений $E_k$, символы $f_i^{(n)}$ для обозначения $n$-местных функций из $P_k$ ($1 \leqslant i \leqslant k^{k^n}$, $n = 1, 2, \ldots$), знак равенства $=$, логические связки конъюнкция $\&$, дизъюнкция $\vee$ и отрицание $\neg$, кванторы существования $\exists$ и общности $\forall$, левая и правая скобки и запятая. Символы $f_i^{(n)}$ называются *функциональными константами*. Иногда будем опускать индексы в обозначениях $f_i^{(n)}$, а также использовать наряду с переменными $x_i$ индивидные переменные $y, z, w$, возможно, с индексами.

Введём понятия терма и формулы языка 1L. Всякая индивидная переменная есть *терм*. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы и $f_i^{(n)}$ — обозначение функции из $P_k$, то выражение $f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ — терм. Если $t_1, t_2$ — термы языка 1L, то выражение $t_1 = t_2$ называется *элементарной формулой языка* 1L. Из элементарных формул языка 1L по обычным логическим правилам с использованием связок $\&, \vee, \neg$ и кванторов $\exists, \forall$ определяются остальные формулы языка 1L.

Всякая формула языка 1L с $m$ свободными переменными очевидным образом определяет некоторое $m$-местное отношение на $E_k$. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формула языка 1L со свободными переменными $x_1, \ldots, x_m$ и функциональными константами $f_1, \ldots, f_s$. Если $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$, то будем говорить, что отношение $\rho$ *определимо формулой* $\Phi$ *в языке* 1L (или 1L-*выразимо формулой* $\Phi$) через функции $f_1, \ldots, f_s$. Понятие определимости (выразимости) перенесём с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из $P_k$ и отношение $g(x_1, \ldots, x_m) = y$ (график функции $g$) определимо формулой $\Phi$ через функции $f_1, \ldots, f_s$, то говорим, что *функция* $g$ *определима формулой* $\Phi$ через функции $f_1, \ldots, f_s$. Если $R \subseteq P_k$, то 1L-*замыканием множества* $R$ (обозначение $1L[R]$) назовём множество всех функций, которые 1L-определимы формулами языка 1L через функции множества $R$. Множество $R$ называется 1L-*замкнутым*, если $1L[R] = R$.

Определим язык второго порядка 2L. Исходные символы языка 2L состоят из исходных символов языка 1L, к которым добавлены функциональные переменные $\varphi_i^{(n)}$ с областью значений $P_k^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$. При определении терма языка 2L добавляется новый пункт: если $t_1, \ldots, t_n$ — термы языка 2L и $\varphi_i^{(n)}$ — функциональная переменная, то $\varphi_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ также является термом языка 2L. При определении формулы языка 2L дополнительно разрешаются кванторы по функциональным переменным.

Пусть $\Phi\big(\varphi_i^{(n)}\big)$ — формула языка 2L с единственной свободной функциональной переменной $\varphi_i^{(n)}$ (в частности, все индивидные переменные формулы $\Phi$ связаны). Говорим, что *формула* $\Phi\big(\varphi_i^{(n)}\big)$ *определяет функцию* $g$ *из* $P_k^{(n)}$, если $g$ является единственной функцией, удовлетворяющей формуле $\Phi\big(\varphi_i^{(n)}\big)$. Как и для языка 1L, вводим понятие *определимости функции* $g$ *формулой* $\Phi$ через функции $f_1, \ldots, f_s$ и 2L-замыкание множества $R$. При этом все используемые формулы языка 2L должны иметь только одну свободную переменную — функциональную.

Легко видеть, что всякий 2L-замкнутый класс функций 1L-замкнут. В самом деле, пусть формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка 1L определяет функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$ через функции множества $R$. Тогда функция $g$ будет 2L-определима через функции множества $R$ с помощью формулы

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ (\forall y)\ \Big(\big(\varphi_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = y\big) \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n, y)\Big),$$

где эквивалентность $\equiv$ стандартным образом выражается через связки $\&, \vee, \neg$.

Перейдём к определению языка FE. Термы и равенства термов в языке FE вводятся так же, как в языке 2L. Равенства языка FE называем также *уравнениями языка* FE. *Решением уравнения* $t_1 = t_2$, все функциональные переменные которого суть $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$, считаем любую систему $\{g_1, \ldots, g_m\}$ функций из $P_k$ от $n_1, \ldots, n_m$ переменных соответственно, которая после замены каждой функциональной переменной $\varphi_{i_j}^{(n_j)}$ соответствующей функцией $g_j$ обращает уравнение в тождество (относительно всех входящих в уравнение $t_1 = t_2$ индивидных переменных). Если $\Xi$ — конечная система уравнений языка FE, то *решением системы уравнений* $\Xi$ называем любую систему функций из $P_k$, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему $\Xi$.

Чтобы с помощью систем уравнений определять некоторые множества функций (от одного и того же числа переменных), выделим одну из функциональных переменных системы $\Xi$, которую назовём *главной функциональной переменной системы* $\Xi$. Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений $\Xi$ и $F \subseteq P_k^{(n)}$. Говорим, что система уравнений $\Xi$ *определяет* (или FE-*определяет*) *множество функций* $F$, если $F$ является множеством всех $n$-местных функций, входящих в решения системы $\Xi$ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$. Иными словами, множество $F$ представляет собой проекцию множества всех решений системы уравнений $\Xi$ на «координату» $\varphi_i$. Это соображение позволяет выразить множество $F$ с помощью формулы языка 2L. Именно, пусть $t_1 = t_2, \ldots, t_{2s-1} = t_{2s}$ — все уравнения (равенства) системы $\Xi$, а $x_1, \ldots, x_p$ — все её индивидные переменные. Предположим ещё, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — все функциональные переменные системы $\Xi$ и $\varphi_1$ — главная функциональная переменная. Тогда множество $F$ есть в точности множество всех $n$-местных функций из $P_k$, удовлетворяющих (по переменной $\varphi_1$) следующей формуле языка 2L:

$$(\exists\varphi_2)\ldots(\exists\varphi_m)\ (\forall x_1)\ldots(\forall x_p)\ ((t_1 = t_2)\&\ldots\&(t_{2s-1} = t_{2s})).$$

По аналогии с языками 1L и 2L определяем FE-замыкание множества функций $R$ как множество всех функций из $P_k$, которые определяются в виде одноэлементных множеств системами функциональных уравнений, имеющих в качестве функциональных констант только функции из множества $R$. FE-замыкание множества $R$ обозначаем через FE$[R]$. Из приведённого выше преобразования систем функциональных уравнений в формулы языка 2L вытекает, что всякий 2L-замкнутый класс функций является также FE-замкнутым.

Оператор FE-замыкания можно задать несколько иным способом, в духе определения операторов 1L- и 2L-замыканий. Именно, сохраняя понятия терма и равенства термов, можно вместо системы равенств $\Xi$ эквивалентным образом рассматривать формулу $\Phi$, представляющую собой конъюнкцию всех равенств, входящих в систему $\Xi$. Тогда решению системы $\Xi$ будет взаимно однозначно отвечать набор функций, удовлетворяющих формуле $\Phi$. При этом все индивидные переменные формулы $\Phi$ предполагаются связанными кванторами общности, расположенными в начале формулы $\Phi$ (по существу это условие уже содержится в определении решения системы уравнений, когда мы говорим о тождествах, в которые превращаются уравнения системы).

Сделаем шаг на пути обобщения оператора FE-замыкания — разрешим использовать в упомянутых формулах $\Phi$ языка FE наряду со связкой & также связки $\vee$ и $\neg$. В результате этого обобщения образуются новые язык FEC и оператор FEC-замыкания. Понятно, что выразительные возможности языка FEC, вообще говоря, шире выразительных возможностей языка FE. В частности, любой FEC-замкнутый класс функций будет являться также и FE-замкнутым.

Приведём ещё одно обобщение оператора FE-замыкания: будем использовать в формулах языка FEC кванторы по индивидным переменным. Чтобы не рассматривать одновременно свободные и связанные переменные, будем предполагать, что все индивидные переменные во вновь образованных формулах связаны. Получившийся в результате этого обобщения язык обозначим через QFEC, а соответствующий ему оператор замыкания будем называть *оператором* QFEC-*замыкания*. Так же, как для оператора FEC-замыкания, нетрудно понять, что всякий QFEC-замкнутый класс функций будет одновременно являться FEC-замкнутым.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ и $\pi$ — перестановка на множестве $E_k$. Положим

$$g^{\pi}(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(g(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))),$$

где $\pi^{-1}$ — перестановка, обратная к $\pi$. Функция $g^{\pi}$ называется *двойственной* к функции $g$ относительно перестановки $\pi$. Если $g^{\pi} = g$, то говорят, что $g$ *самодвойственна* относительно перестановки $\pi$. Функция $g$ называется *однородной*, если она самодвойственна относительно любых перестановок на $E_k$. В другой терминологии если $g^{\pi} = g$, то перестановка $\pi$ называется *автоморфизмом* алгебры $\langle E_k; g\rangle$, а $g$ называется *однородной* функцией, если группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; g\rangle$ есть полная симметрическая группа перестановок на множестве $E_k$.

**Теорема 1.** *При любом* $k \geqslant 2$ *совокупности* FE- *и* FEC-*замкнутых классов в* $P_k$ *совпадают.*

Доказательство. Поскольку язык FEC является расширением языка FE, в дальнейшем рассматриваем лишь редукцию формул языка FEC к формулам языка FE. Пусть $\Phi$ — формула языка FEC, определяющая (по главной фунциональной переменной) функцию $g$. Будем предполагать, что формула $\Phi$ представлена, например, в дизъюнктивной нормальной форме, так что отрицание в формуле $\Phi$ действует только на атомарные подформулы, т. е. на равенства термов. Как обычно, формулу $\neg(t_1 = t_2)$ записываем в виде $t_1 \neq t_2$. Таким образом, можно считать, что формула $\Phi$ построена из элементарных формул вида $t_1 = t_2$ и $t_1 \neq t_2$ с помощью связок & и $\vee$.

Пусть все элементарные подформулы формулы $\Phi$ суть

$$t_1 =^{a_1} t_2, \ldots, t_{2s-1} =^{a_s} t_{2s}, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_s \in \{0,1\}$ и знаки $=^1$, $=^0$ совпадают со знаками $=$ и $\neq$ соответственно (среди термов $t_1, t_2, \ldots, t_{2s-1}, t_{2s}$ возможны повторения). Согласно определению FEC-замыкания, если заменить в формуле $\Phi$ главную функциональную переменную функцией $g$, а все остальные функциональные переменные — подходящими функциями из $P_k$, то полученная в результате формула $\Phi_1$ будет истинной при всех значениях входящих в неё индивидных переменных.

Заметим теперь, что для вычисления истинностного значения формулы $\Phi_1$ (на данном наборе значений индивидных переменных) необходимы не сами значения входящих в формулу $\Phi_1$ термов $t_1, \ldots, t_{2s}$, а лишь истинностные значения формул (1). Пользуясь этим замечанием, определим однородную функцию $h(y_1, \ldots, y_{2s}, z, w)$ следующими условиями. Пусть при некотором выборе значений индивидных переменных формулы $\Phi_1$ последовательность (1), в которой все функциональные переменные заменены надлежащим образом функциями из $P_k$, даёт истинностные значения $b_1, \ldots, b_s$ (т. е. $b_1, \ldots, b_s \in \{\text{И,Л}\}$). Тогда полагаем значение $h(y_1, \ldots, y_{2s}, z, w)$ равным $z$ для любых значений $y_1, \ldots, y_{2s}$, удовлетворяющих условиям $(y_{2i-1} =^{a_i} y_{2i}) \equiv b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$. Во всех остальных случаях полагаем $h(y_1, \ldots, y_{2s}, z, w) = w$. Поскольку в определении функции $h$ используется только отношение равенства/неравенства между переменными, а значения $h$ совпадают с $z$ или $w$, функция $h$ действительно будет однородной (см., например, [3]).

Пусть $t'_1, \ldots, t'_{2s}$ — термы, получающиеся из $t_1, \ldots, t_{2s}$ при определении формулы $\Phi_1$. Из способа задания $h$ сразу следует, что справедливо тождество

$$h(t'_1, t'_2, \ldots, t'_{2s-1}, t'_{2s}, z, w) = z \tag{2}$$

(переменные $z, w$ предполагаются различными и отличными от переменных формулы $\Phi$). Покажем, что равенство (2) обращается в тождество только в том случае, когда $t'_1, \ldots, t'_{2s}$ получены из термов $t_1, \ldots, t_{2s}$ заменой главной функциональной переменной функцией $g$ и подходящей заменой всех остальных функциональных переменных функциями из $P_k$.

В самом деле, согласно введённому понятию FEC-замыкания формула $\Phi$ определяет единственную функцию $g$. Это означает, что для любой другой функции $g'$ (от тех же переменных, что и функция $g$) при замене в формуле $\Phi$ главной функциональной переменной функцией $g'$ и произвольной замене всех остальных функциональных переменных функциями из $P_k$ образуется формула, которая не является тождественно истинной. Пусть указанная замена переменных в формуле $\Phi$ порождает термы $t''_1, \ldots, t''_{2s}$. Тогда при некотором выборе значений индивидных переменных формулы $t''_1 =^{a_1} t''_2, \ldots, t''_{2s-1} =^{a_s} t''_{2s}$ дадут последовательность $c_1, \ldots, c_s$ истинностных значений, отличную от любой последовательности $b_1, \ldots, b_s$, построенной выше для функции $g$. Из этого, в свою очередь, следует, что равенство $h(t''_1, t''_2, \ldots, t''_{2s-1}, t''_{2s}, z, w) = z$ тождеством не будет.

Подводя итог проведённым рассуждениям, заключаем, что уравнение

$$h(t_1, t_2, \ldots, t_{2s-1}, t_{2s}, z, w) = z$$

при замене всех функциональных переменных функциями из $P_k$ обращается в тождество в том и только том случае, когда главная функциональная переменная заменяется функцией $g$, а все остальные функциональные переменные — подходящими функциями, существование которых для функции $g$ следует из определения формулы $\Phi$.

Теперь нетрудно построить искомую систему $\Xi$ уравнений языка FE. Прежде всего напомним (см. [8, следствие 3 из теоремы 2]), что FE-замыкание пустого множества состоит из всех однородных функций класса $P_k$. Поэтому без использования функциональных констант можно построить систему $\Xi'$ функциональных уравнений, определяющую однородную функцию $h$. Считая, что у системы $\Xi'$ и формулы $\Phi$ нет общих переменных, добавим к системе $\Xi'$ уравнение

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{2s-1}, t_{2s}, z, w) = z,$$

где $\varphi$ — главная функциональная переменная системы $\Xi'$. В результате получим систему $\Xi$ функциональных уравнений, которая, как нетрудно видеть, будет определять (по главной функциональной переменной формулы $\Phi$) функцию $g$. В заключение доказательства следует отметить, что система $\Xi$ и формула $\Phi$ имеют один и тот же набор функциональных констант. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *При любом $k \geqslant 2$ совокупности* FEC- *и* QFEC-*замкнутых классов в $P_k$ совпадают.*

Доказательство. Поскольку язык QFEC является расширением языка FEC, далее рассматриваем лишь редукцию формул языка QFEC к формулам FEC. Пусть $\Phi$ — произвольная замкнутая формула языка QFEC, определяющая функцию $g$. Будем предполагать, что формула $\Phi$ приведена к пренексному виду $(Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)\Phi_1$, где $Q_1, \ldots, Q_n$ — кванторы $\exists$ или $\forall$, $x_1, \ldots, x_n$ — все индивидные переменные формулы $\Phi$, а формула $\Phi_1$ (языка FEC) не содержит кванторов. Покажем, как из формулы $\Phi$ получить формулу $\Phi'$ языка FEC с тем же набором функциональных констант, что и формула $\Phi$, определяющая функцию $g$. Проведём элиминирование кванторов в формуле $\Phi$.

Предположим сначала, что кванторная приставка в формуле $\Phi$ начинается с квантора существования: $Q_1 = \ldots = Q_s = \exists$ и либо $Q_{s+1} = \forall$, либо $s = n$. Для устранения кванторов $\exists x_1, \ldots, \exists x_s$ введём $s$ новых одноместных функциональных переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ и образуем формулу

$$(\forall y_1)(\forall y_2)\ ((\varphi_1(y_1) = \varphi_1(y_2))\& \ldots \&(\varphi_s(y_1) = \varphi_s(y_2))), \tag{3}$$

где $y_1, y_2$ — различные переменные, не принадлежащие $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Понятно, что формуле (3) удовлетворяют только наборы из $s$ функций-констант. Поэтому если к формуле (3) конъюнктивно добавить формулу

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_s)\ (Q_{s+1} x_{s+1}) \ldots (Q_n x_n)\Phi_2,$$

где $\Phi_2$ образована из $\Phi_1$ заменой каждого вхождения переменной $x_i$ термом $\varphi_i(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, то получится формула, которая будет определять исходную функцию $g$.

Итак, далее можно предполагать, что кванторная приставка формулы $\Phi$ начинается с квантора общности. Если в приставке отсутствуют кванторы существования, то при отбрасывании в формуле $\Phi$ кванторной приставки образуется формула $\Phi'$ языка FEC, которая, очевидно, определяет функцию $g$.

Пусть теперь в кванторной приставке имеются кванторы существования. В этом случае применяем известный в математической логике приём, основанный на разрешающих функциях Сколема [1, 2]. Именно, рассмотрим в формуле $\Phi$ произвольную переменную $x_i$, которая связана квантором существования. Пусть $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ — все переменные формулы $\Phi$, которые в кванторой приставке расположены перед переменной $x_i$ и связаны кванторами общности. Вводим новую $t$-местную функциональную переменную $\varphi_i$, заменяем в бескванторной части формулы $\Phi$ каждое вхождение переменной $x_i$ термом $\varphi_i(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})$ и удаляем квантор $\exists\, x_i$ из кванторной приставки.

После проведения описанной процедуры для всех переменных $x_i$, связанных кванторами существования, образуется формула $\Phi'$ языка QFEC, которая не содержит кванторов существования и которая, как нетрудно видеть, определяет исходную функцию $g$. Действительно, по правилам логики утверждение о существовании значений переменной $x_i$ (стоящей после переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$, связанных кванторами общности) эквивалентно утверждению о существовании $t$-местной функции, дающей по произвольным значениям переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ какое-либо значение переменной $x_i$. Вместе с тем при определении истинности формулы $\Phi'$

как раз и используется пункт о существовании $t$-местной функции, соответствующей функциональной переменной $\varphi_i$. Остаётся заметить, что формула $\Phi'$, не содержащая в кванторной приставке кванторов существования, с содержательной точки зрения может рассматриваться как искомая формула языка FEC. Формально же в формуле $\Phi'$ необходимо опустить кванторную приставку. Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *При любом $k \geqslant 2$ совокупности* QFEC- *и* 1L-*замкнутых классов в $P_k$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ — формула языка 1L, определяющая функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. имеет место эквивалентность

$$(g(x_1, \ldots, x_n) = y) \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n, y). \tag{4}$$

Введём $n$-местную функциональную переменную $\varphi$ и заменим всюду в $\Phi$ переменную $y$ термом $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Получим формулу $\Phi'(x_1, \ldots, x_n)$. Ввиду эквивалентности (4) формуле $\Phi'$ может удовлетворять (по переменной $\varphi$) только одна функция — функция $g$. Иными словами, замкнутая формула

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ \Phi'(x_1, \ldots, x_n)$$

языка QFEC определяет функцию $g$.

Для доказательства обратного перехода от формул языка QFEC к формулам языка 1L воспользуемся теоремами 1 и 2. В соответствии с ними будем рассматривать только системы уравнений языка FE или, что эквивалентно, бескванторные формулы, представляющие собой конъюнкции уравнений (равенств), образующих данные системы. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула этого вида, $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — все её функциональные переменные, $\varphi_1$ — главная функциональная переменная и формула $\Phi$ определяет функцию $g$. Согласно определению FE-замыкания $g$ является единственной функцией, удовлетворяющей формуле второго порядка

$$(\exists \varphi_2) \ldots (\exists \varphi_s)\ (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\ \Phi(x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

языка 2L. Однако, как показано в [4], языки 1L и 2L порождают один и тот же оператор замыкания. Поэтому формулу (5) языка 2L можно преобразовать в формулу языка 1L, определяющую данную функцию $g$. Теорема 3 доказана.

Из теорем 1–3 и результатов [4] следует, что все пять языков 1L, 2L, FE, FEC, QFEC приводят к одному и тому же оператору замыкания. В [4] описаны все замкнутые классы для операторов 1L- и 2L-замыканий.

Каждый класс состоит из всех функций, самодвойственных относительно перестановок некоторой группы перестановок на $E_k$. Иными словами, для каждого 1L-замкнутого класса $R$ найдётся такая группа $G$ перестановок на $E_k$, что $R$ состоит из всех функций $g$ из $P_k$, для которых группа автоморфизмов алгебры $\langle E_k; g\rangle$ содержит группу $G$. Верно и обратное: каждая группа перестановок на $E_k$ в указанном смысле определяет 1L-замкнутый класс функций из $P_k$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.** Математическая логика. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
2. **Клини С.** Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.
3. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 85–106.
4. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискрет. математика. — 1999. — Т. 11, № 4. — С. 110–126.
5. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** О решениях систем функциональных булевых уравнений // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 48–57.
6. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики // Докл. РАН. — 2009. — Т. 426, № 4. — С. 448–449.
7. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** Решения систем функциональных уравнений многозначной логики // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2009. — № 4. — С. 29–33.
8. **Марченков С. С.** Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 4. — С. 18–31.
9. **Федорова В. С.** SFE-замкнутые классы трехзначной логики // Сб. статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ. Вып. 7. — М.: Макс Пресс, 2010. — С. 23–33.

*Марченков Сергей Серафимович*,
e-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
18 января 2011 г.