ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2011. Том 18, № 4. С. 77–93

УДК 519.833.5

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ N-ЯДРА В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Н. В. Смирнова, С. И. Тарашнина

Аннотация. Статья посвящена введению новой концепции решения кооперативных ТП-игр — $[0,1]$-N-ядра, которое относится к классу эксцессоподобных решений. Предлагаемое решение основано на понятиях конструктивной и блокирующей сил коалиции S, которые учитываются с произвольными весами. В работе показано, что данное решение удовлетворяет свойствам непустоты (NE), ковариантности (COV), анонимности (AN), Парето-оптимальности (PO), обоснованности (RE) и болвана (DUM). Кроме того, $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству индивидуальной рациональности (IR) на классе 0-монотонных игр и единственности (SIVA) на классе игр с постоянной суммой. Исследована взаимосвязь $[0,1]$-N-ядра с другими известными концепциями решений кооперативных ТП-игр.

Ключевые слова: ТП-игра, концепция решения, пред-N-ядро, SM-ядро, модифицированное N-ядро.

Введение

Нами исследуется новая концепция решения кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП-игр) — $[0,1]$-N-ядро. Предлагаемое решение основано на использовании понятий конструктивной и блокирующей сил коалиции S. Подобный подход предложен Зюдхолтером [7] и реализован им в решении, называемом модифицированным N-ядром (modiclus). Однако недостатком модифицированного N-ядра является его высокая вычислительная сложность. В [8] С. И. Тарашниной введена концепция решения — упрощённое модифицированное N-ядро (SM-ядро). Это решение учитывает как конструктивную, так и блокирующую силы коалиции S и в то же время избегает высокой вычислительной сложности, присущей модифицированному N-ядру. Более того, SM-ядро учитывает конструктивную и блокирующую силы коалиции S в равной степени, чего нельзя сказать о модифицированном N-ядре.

Предлагаемое в работе решение учитывает произвольные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции $S \subseteq N$ и является, по

сути, обобщением SM-ядра. Фактически $[0,1]$-N-ядро представляет собой множество точек, описываемое с помощью параметра $\alpha \in [0,1]$, где α — вес, с которым в решении учитывается конструктивная сила коалиции. Стоит отметить, что $[0,1]$-N-ядро относится к классу эксцессоподобных решений, первопроходцами среди которых являются N-ядро и пред-N-ядро [5]. Интересно, что $[0,1]$-N-ядро включает в себя пред-N-ядро (при $\alpha = 1$), SM-ядро (при $\alpha = 1/2$) и другие решения кооперативных ТП-игр. Показано, что в играх трёх лиц вектор Шепли всегда принадлежит $[0,1]$-N-ядру.

В разд. 1 приведены основные понятия, определения и утверждения, необходимые для введения формального определения $[0,1]$-N-ядра и описания его свойств. Разд. 2 посвящён формализации решения и доказательству теоремы, ключевой при исследовании свойств $[0,1]$-N-ядра, представленных в разд. 3. В разд. 4 исследуется взаимосвязь рассматриваемого решения с другими концепциями решений кооперативных ТП-игр. Полученные результаты проиллюстрированы примерами.

1. Основные понятия и определения

Рассмотрим класс кооперативных игр n лиц с трансферабельными полезностями (ТП-игры). Обозначим через $N = \{1, 2, \dots, n\}$ множество игроков. *Коалицией игроков* будем называть любое непустое подмножество S из N. Под *характеристической функцией игры* будем понимать вещественнозначную функцию $v\colon 2^N \to \mathbb{R}^1$ такую, что $v(\varnothing) = 0$.

Будем считать, что задана кооперативная ТП-игра (N, v). Множество всех игр (N, v) обозначим через G^N. Полагая, что игроки сформировали максимальную коалицию N, рассмотрим задачу распределения величины $v(N)$ между всеми игроками.

Определим множество допустимых векторов выигрышей в игре (N, v) следующим образом:

$$X^*(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leqslant v(N)\},$$

где $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i,\ S \subseteq N$.

Определение 1. *Множеством эффективно-рациональных векторов выигрышей* в игре (N, v) будем называть множество

$$X^0(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}.$$

Определение 2. *Множеством дележей* $X(N, v)$ в игре (N, v) будем называть множество эффективно-рациональных векторов выигрышей, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности, т. е. множество векторов $x \in X^0(N,v)$ таких, что $x_i \geqslant v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Далее формализуем понятие решения кооперативной ТП-игры.

Определение 3. *Решением на множестве игр* G^N называется отображение $f\colon G^N \to X^*(N,v)$, которое каждой игре $(N,v) \in G^N$ ставит в соответствие подмножество $f(N,v)$ множества $X^*(N,v)$.

В теории кооперативных игр наиболее известны такие концепции решения как C-ядро [4], N-ядро [5] и вектор Шепли [6]. Поскольку понятие решения определено неоднозначно, встаёт вопрос, какое решение лучше или наиболее приемлемо в том или ином классе игр. В этом случае важно понимать, каким свойствам удовлетворяет рассматриваемое решение. Приведём основные свойства решения $f(N,v)$ игры $(N,v) \in G^N$.

(i) **Непустота** (NE): $f(N,v) \neq \varnothing$.

(ii) **Индивидуальная рациональность** (IR): если $x \in f(N,v)$, то $x_i \geqslant v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

(iii) **Парето-оптимальность** (PO): $f(N,v) \subseteq X^0(N,v)$.

(iv) **Единственность** (SIVA): $|f(N,v)| = 1$.

(v) **Анонимность** (AN): $f(N,\pi v) = \pi(f(N,v))$ для любой перестановки π множества N в игре (N,v).

(vi) **Ковариантность относительно стратегически эквивалентных преобразований** (COV): для двух произвольных ТП-игр (N,v), $(N,w) \in G^N$, связанных соотношением[1] $w = \gamma v + \beta,\ \gamma > 0,\ \beta \in \mathbb{R}^N$, справедливо $f(N,w) = \gamma f(N,v) + \beta$.

(vii) **Обоснованность** (RE):[2] решение $f(N,v)$ удовлетворяет RE, если для любой игры (N,v) и любого $x \in f(N,v)$ одновременно справедливы неравенства $x_i \leqslant b^i_{\max}(N,v)$ и $x_i \geqslant b^i_{\min}(N,v)$ для всех $i \in N$, где

$$b^i_{\max}(N,v) = \max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$
$$b^i_{\min}(N,v) = \min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

(vii) **Свойство болвана** (DUM): если игрок i является болваном в игре (N,v), т. е. для любого $S \not\ni i$ выполнено $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$, то для любого $x \in f(N,v)$ справедливо $x_i = v(\{i\})$.

Поскольку в статье вводится решение, относящееся к классу эксцессоподобных решений, его определение тесно связано с понятием N-ядра.

[1] Для любой коалиции $S \subseteq N$ $w(S) = \gamma v(S) + \sum\limits_{i \in S} \beta_i,\ \gamma > 0,\ \beta \in \mathbb{R}^N$.

[2] В англоязычной литературе данное свойство носит название reasonableness.

Вследствие этого напомним основные определения и результаты относительно N-ядра [1, 3].

Определение 4. Для произвольного $x \in X^0(N, v)$ *эксцессом коалиции* $S \subseteq N$ будем называть величину $e(x, v, S) = v(S) - x(S)$.

Определение 5. *N-ядром относительно множества* $X \subset X^0(N, v)$ (обозначение $\mathcal{N}(X)$ или $\mathcal{N}(N, v, X)$) называется множество

$$\{x \in X \mid \theta(e(x, v, S)_{S \subseteq N}) \preceq_{\text{lex}} \theta(e(y, v, S)_{S \subseteq N}) \text{ для всех } y \in X\},$$

где $\theta(e(y, v, S)_{S \subseteq N})$ — вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания. Если $X = X(N, v)$, то N-ядро называется *N-ядром игры* (N, v). Если $X = X^0(N, v)$, то оно называется *пред-N-ядром игры* (N, v). Обозначим ядра в двух последних случаях через $\mathcal{N}$ и $\mathcal{PN}$ соответственно.

Напомним, что понятие N-ядра введено Шмайдлером в 1969 г. в [5]. Приведём основные результаты теоремы Шмайдлера из [3].

(1) *Пусть X — непустое компактное множество. Тогда $\mathcal{N}(N, v, X) \neq \varnothing$ для любой игры (N, v).*

(2) *Если X — непустое компактное выпуклое множество, то N-ядро состоит из единственного вектора.*

(3) *Если X — непустое замкнутое выпуклое подмножество множества $X^*(N, v)$, то $\mathcal{N}(N, v, X)$ непусто и состоит из единственного вектора выигрышей.*

Из (3) следует, что пред-N-ядро игры (N, v) состоит из единственной точки. Обозначим её через $\nu(N, v)$.

Известно, что для произвольного класса игр G^N пред-N-ядро удовлетворяет свойствам NE, SIVA, AN, COV, PO, DUM, RE и др.

2. Определение $[0, 1]$-N-ядра

Перейдём к определению нового решения кооперативных ТП-игр. В качестве непустого замкнутого выпуклого множества будем рассматривать множество эффективно-рациональных векторов $X^0(N, v)$.

Сначала обратимся к предыстории возникновения идеи данного решения. Мотивацией к созданию $[0, 1]$-N-ядра является всесторонняя оценка возможностей коалиции S в игре (N, v), которая заключается в следующем: сила коалиции $S \subseteq N$ оценивается двойственным образом. С одной стороны, коалиция S, обеспечивая себе гарантированно величину $v(S)$, обладает конструктивной силой. С другой стороны, коалиция S может блокировать образование максимальной коалиции N в игре (N, v). В этом случае будем говорить, что коалиция *обладает блокирующей силой*, оцениваемой величиной $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$. Другими словами, $v^*(S)$ есть вклад коалиции S в максимальную коалицию N в случае объединения с коалицией $N \setminus S$. Данную величину можно интерпретировать как ценность коалиции S для всего сообщества игроков в игре (N, v). Мы придерживаемся мнения, что решение кооперативных ТП-игр должно учитывать обе силы коалиции S: как конструктивную, так и блокирующую. Известные концепции решения такие, как C- и N-ядро, не учитывают блокирующую силу коалиции S в игре.

В [7] рассматривается такое решение ТП-игр, как модифицированное N-ядро (modiclus), учитывающее обе силы для каждой коалиции $S \subseteq N$ в игре (N, v). Автор интерпретирует величину $v(S)$ как заработок коалиции S, величину $v^*(S)$ — как величину, на которую коалиция S выдвигает претензии, и они не могут быть оспорены дополняющей коалицией $N \setminus S$. В би-эксцессах данного решения отражены комбинации конструктивной и блокирующей сил для произвольных пар коалиций S и T:

$$\overline{e}(x, v, S, T) = e(x, v, S) + e(x, v^*, T) \quad \text{для } (S, T) \in 2^N \times 2^N.$$

Так же, как и пред-N-ядро, модифицированное N-ядро состоит из одной точки и удовлетворяет свойствам NE, AN, COV, PO, SIVA и DUM (см. [7]). К недостаткам указанного решения можно отнести более высокую вычислительную сложность по сравнению с пред-N-ядром: в игре (N, v) вектор би-эксцессов имеет 2^{2N} компонент (для пред-N-ядра эта величина равна 2^N). Также неразрешённым остаётся вопрос о соотношении, в котором обе силы коалиции S (или T) учтены в решении.

Отправным решением для $[0, 1]$-N-ядра является упрощённое модифицированное N-ядро (SM-ядро) — решение, рассмотренное в [8], в котором конструктивная и блокирующая силы коалиции $S \subseteq N$ оцениваются в равной мере. Там же показано, что SM-ядро удовлетворяет свойствам NE, PO, AN, COV, SIVA, DUM и RE. Интересной чертой этого решения является его совпадение с вектором Шепли в супераддитивных играх трёх лиц. Более того, SM-ядро имеет интересную социально-экономическую интерпретацию. Предположим, что множество N представляет собой некоторое сообщество людей, которые распределяют величину $v(N)$ между всеми членами сообщества. Тогда в качестве решения SM-ядро предлагает вектор, минимизирующий максимальное расслоение между любыми двумя взаимодополняющими частями S и $N \setminus S$ целого сообщества N.

Предлагаемое в работе решение учитывает произвольные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции $S \subseteq N$ и является обобщением SM-ядра.

Введём формальное определение $[0,1]$-N-ядра ТП-игры. Рассмотрим игру $(N,v) \in G^N$. Двойственная к данной игра (N,v^*) задаётся по правилу

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S), \quad S \subseteq N.$$

Для фиксированного $\alpha \in [0,1]$ в игре (N,v) определим α-эксцесс коалиции $S \subseteq N$ относительно $x \in X^0(N,v)$:

$$e^\alpha(x,v,S) = \alpha e(x,v,S) + (1-\alpha)e(x,v^*,S).$$

Определение 6. Для фиксированного $\alpha \in [0,1]$ *α-N-ядром относительно множества* $X^0(N,v)$ (обозначение $\mathcal{N}^\alpha(X^0)$ или $\mathcal{N}^\alpha(N,v,X^0)$) называется множество векторов

$$\big\{x \in X^0(N,v) \,|\, \theta(e^\alpha(x,v,S)_{S\subseteq N}) \preceq_{\text{lex}} \theta(e^\alpha(y,v,S)_{S\subseteq N}) \\ \text{для всех } y \in X^0(N,v)\big\},$$

где $\theta(e^\alpha(y,v,S)_{S\subseteq N})$ — вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.

Определение 7. *$[0,1]$-N-ядром игры* (N,v) на множестве $X^0(N,v)$ будем называть множество всех α-N-ядер игры (N,v). Обозначим $[0,1]$-N-ядро через $\overline{\mathcal{N}}(X^0)$. Тогда $\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \mathcal{N}^\alpha(X^0)$.

Ключевым результатом для выявления свойств и структуры $[0,1]$-N-ядра является

Теорема 1. *α-N-ядро кооперативной игры (N,v) совпадает с пред-N-ядром игры (N,v^α) для любого $\alpha \in [0,1]$, где*

$$v^\alpha(S) = \alpha v(S) + (1-\alpha)v^*(S).$$

Доказательство. Для любой коалиции $S \subseteq N$ α-эксцесс игры (N,v) имеет вид $e^\alpha(x,v,S) = \alpha e(x,v,S) + (1-\alpha)e(x,v^*,S)$. Распишем данное выражение, используя понятие двойственной игры (N,v^*):

$$\begin{aligned} e^\alpha(x,v,S) &= \alpha e(x,v,S) + (1-\alpha)e(x,v^*,S) \\ &= \alpha(v(S)-x(S)) + (1-\alpha)(v^*(S)-x(S)) \\ &= \alpha(v(S)-x(S)) + (1-\alpha)(v(N)-v(N\setminus S)-x(S)) \\ &= -x(S) + (\alpha v(S) + (1-\alpha)\big(v(N)-v(N\setminus S)\big)) \\ &= -x(S) + (\alpha v(S) + (1-\alpha)v^*(S)) = v^\alpha(S) - x(S) = e(x,v^\alpha,S), \end{aligned}$$

т. е. $e^\alpha(x, v, S) = e(x, v^\alpha, S)$. Это равенство выполняется для всех $S \subseteq N$. Поэтому α-N-ядро кооперативной игры (N, v) совпадает с пред-N-ядром игры (N, v^α). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ α-N-ядро кооперативной игры (N, v) непусто и состоит из единственной точки.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы Шмайдлера и теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Обозначим эту точку через $\nu^\alpha(v)$. Тогда формулировку теоремы 1 можно переписать в следующем виде.

Замечание 1. Пусть (N, v), $(N, v^\alpha) \in G^N$, причём $v^\alpha(S) = \alpha v(S)+$ $+(1-\alpha)v^*(S),\ S \subseteq N$. Тогда $\nu^\alpha(v) = \nu(v^\alpha)$.

Замечание 2. Теорема 1 подтверждает, что $[0, 1]$-N-ядро учитывает все возможные соотношения конструктивной и блокирующей сил коалиции S $(S \subseteq N)$ в игре (N, v).

Замечание 3. Из теоремы 1 следует, что вычислительная сложность данного решения сопоставима с вычислительной сложностью пред-N-ядра. Для нахождения α-N-ядра подойдёт любой алгоритм, разработанный для вычисления пред-N-ядра.

В дальнейшем при исследовании структуры, свойств и взаимосвязи $[0, 1]$-N-ядра с другими решениями кооперативных ТП-игр будем опираться на теорему 1.

Пример 1. Рассмотрим пример «Рынок перчаток» с тремя игроками. Условия игры заключаются в следующем: игрок 1 обладает одной правой перчаткой, две левые перчатки распределены между игроками 2 и 3 по одной на каждого из игроков. Выигрыш коалиции равен числу пар перчаток, составленных рассматриваемой коалицией (т. е. выигрыш равен 0 или 1). Таким образом, характеристическая функция имеет вид

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0,\ v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(N) = 1.$$

Различные решения данной игры представлены в табл. 1.

Проанализируем полученные решения. Можно видеть, что в данном примере C-ядро состоит из единственной точки, которая совпадает с пред-N-ядром игры. Эти решения предписывают выигрыш, равный единице, игроку 1 и 0 — двум другим игрокам. Другими словами, положительный результат получает игрок, владеющий на рынке перчаток единственной (дефицитной) правой перчаткой. Подобный результат можно также объяснить тем, что только вступление игрока 1 в кооперацию с другими игроками приводит к получению максимально возможного результата — единицы. Но тогда закономерен вопрос: следует ли вступать в максимальную коалицию игрокам 2 и 3, если эффект от нее для каждого из них равен 0? Данный результат они могут себе гарантировать

Таблица 1

Решения игры «Рынок перчаток» с тремя участниками

C-ядро	$C(v) = \big(1, 0, 0\big)$
Пред-N-ядро	$\nu(v) = (1, 0, 0)$
Вектор Шепли	$\varphi(v) = \big(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\big)$
Модифицированное N-ядро	$\psi(v) = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\big)$
SM-ядро	$\mu(v) = \big(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\big)$
$[0,1]$-N-ядро	для $\alpha \in \big[0, \frac{1}{4}\big]$ $\nu^{\alpha}(v) = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\big)$ для $\alpha \in \big[\frac{1}{4}, 1\big]$ $\nu^{\alpha}(v) = \big(\frac{1+2\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{3}, \frac{1-\alpha}{3}\big)$

и без кооперации. Кроме того, действуя сообща, игроки 2 и 3 могут сформировать коалицию против игрока 1 и, таким образом, не допустить получение им положительного выигрыша. Вместе они обладают той же блокирующей силой, что и игрок 1. Модифицированное N-ядро учитывает данное обстоятельство и дает выигрыш $\dfrac{1}{2}$ игроку 1 и по $\dfrac{1}{4}$ — двум другим игрокам. Блокирующая сила также учитывается вектором Шепли и SM-ядром, и выигрыши игроков 2 и 3 равны $\dfrac{1}{6}$ для каждого. $[0,1]$-N-ядро оценивает различные соотношения конструктивной и блокирующей сил каждой коалиции и геометрически представляет собой отрезок в пространстве $\mathbb{R}^3$ (рис. 1).

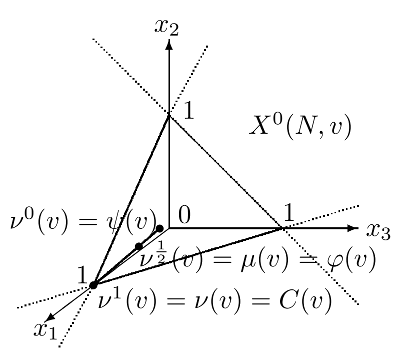

Рис. 1

Следует отметить, что α-N-ядро совпадает с модифицированным N-ядром для $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$, с вектором Шепли и SM-ядром для $\alpha = \frac{1}{2}$ и с пред-N-ядром для $\alpha = 1$.

3. Свойства $[0,1]$-N-ядра

Для каждого решения кооперативных ТП-игр важно выделить ряд свойств, которому оно удовлетворяет. Очевидно, что $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойствам, которые справедливы для α-N-ядра при любом $\alpha \in [0,1]$. Из определения 2 следует, что исследуемое решение является множественным принципом оптимальности кооперативных ТП-игр и представляет собой множество точек, каждая из которых соответствует α-N-ядру для определённого $\alpha \in [0,1]$. Очевидно, что $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет тем свойствам, которым удовлетворяет каждая из его точек. Рассмотрим приведённые выше свойства NE, PO, SIVA, AN, COV, RE, IR и DUM применительно к исследуемому решению.

Утверждение 1. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* NE.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что для любых $\alpha \in [0,1]$ и игры $(N,v) \in G^N$ α-N-ядро этой игры непусто ($\mathcal{N}^\alpha(X^0) \neq \varnothing$) и состоит из единственной точки. Поэтому $\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \mathcal{N}^\alpha(X^0) \neq \varnothing$ содержит по крайней мере одну точку. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* PO.

Доказательство. В силу того, что для любой игры $(N,v) \in G^N$ $[0,1]$-N-ядро определено на множестве эффективно-рациональных векторов $X^0(N,v)$ и согласно утверждению 1 является непустым множеством, соотношение $\overline{\mathcal{N}}(X^0) \subseteq X^0(N,v)$ прямо следует из определения 7. Утверждение 2 доказано.

Как было выявлено ранее и проиллюстрировано примером 1, на классе игр G^N $[0,1]$-N-ядро состоит не менее чем из одной точки. Это говорит о том, что в общем случае для данного решения свойство SIVA не выполняется. На предмет его выполнения рассмотрим более узкий класс кооперативных игр — игры с постоянной суммой.

Утверждение 3. *В классе кооперативных* ТП-*игр с постоянной суммой $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* SIVA.

Доказательство. Пусть (N,v) — кооперативная игра с постоянной суммой. Для любой коалиции $S \subseteq N$ в игре (N, v) имеет место равенство

$$v(S) = v(N) - v(N \setminus S) = v^*(S).$$

Тогда $v^\alpha(S) = \alpha v(S) + (1-\alpha)v^*(S) = \alpha v(S) + (1-\alpha)v(S) = v(S)$ для любой коалиции S. Следовательно, $v^\alpha = v$.

По теореме 1 для любого $\alpha \in [0,1]$ α-N-ядро рассматриваемой игры (N, v) совпадает с пред-N-ядром игры (N, v^α), т. е. $\nu^\alpha(v) = \nu(v^\alpha)$. Так как $v^\alpha = v$, для любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется $\nu^\alpha(v) = \nu(v)$. Таким образом, α-N-ядро совпадает с пред-N-ядром игры (N, v) независимо от выбора α. Следовательно, $\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \nu(v)$. Известно, что пред-$N$-ядро удовлетворяет свойству SIVA на G^N. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* AN.

Доказательство. Утверждение справедливо в силу теоремы 1 и анонимности пред-N-ядра. Утверждение 4 доказано.

Отметим, что для одноточечных решений из выполнения свойства AN обязательно следует справедливость свойства симметричности SYM. Последнее не обязательно выполняется для решений, состоящих из множества точек. Примером может служить такое решение, как C-ядро. Так как в общем случае $[0,1]$-N-ядро состоит из множества точек, рассмотрим свойство SYM для данного решения.

Определение 8. Будем говорить, что решение $f(N, v)$ игры (N, v) *удовлетворяет свойству* SYM, если из условия $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, $i, j \in N$, $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, следует, что $x_i = x_j$ для всех $x \in f(N, v)$.

Утверждение 5. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* SYM.

Доказательство. Утверждение справедливо в силу теоремы 1 и симметричности пред-N-ядра в каждой игре (N, v^α). Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* COV.

Доказательство. Рассмотрим игру (N, v) и стратегически эквивалентную ей игру (N, w), где для любого $S \subseteq N$

$$w(S) = \gamma v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i, \quad \gamma > 0, \ \beta \in \mathbb{R}^N.$$

Двойственная к (N, w) игра имеет вид

$$w^*(S) = w(N) - w(N \setminus S) = \gamma v(N) + \sum_{i \in N} \beta_i - \gamma v(N \setminus S) - \sum_{i \in N \setminus S} \beta_i$$
$$= \gamma(v(N) - v(N \setminus S)) + \sum_{i \in N} \beta_i - \sum_{i \in N \setminus S} \beta_i = \gamma v^*(S) + \sum_{i \in S} \beta_i.$$

Следовательно, двойственная игра (N, w^*) является стратегически эквивалентной двойственной игре (N, v^*).

Рассмотрим теперь игры (N, v^α) и (N, w^α). Учитывая, что

$$w^*(S) = \gamma v^*(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$$

для любого $S \subseteq N$, получим, что игра (N, w^α) является стратегически эквивалентной игре (N, v^α), т. е.

$$w^\alpha(S) = \gamma v^\alpha(S) + \sum_{i \in S} \beta_i \quad \text{для любых } S \subseteq N \text{ и } \alpha \in [0,1]. \tag{1}$$

Теперь рассмотрим α-N-ядро игры (N, w). Учитывая замечание 1, соотношение (1) и выполнение свойства COV для пред-N-ядра, имеем

$$\nu^\alpha(w) = \nu(w^\alpha) = \nu(\gamma v^\alpha + \beta) = \gamma \nu(v^\alpha) + \beta = \gamma \nu^\alpha(v) + \beta.$$

Таким образом, α-N-ядро удовлетворяет свойству COV при любом $\alpha \in [0,1]$. Следовательно, $[0,1]$-N-ядро также удовлетворяет этому свойству. Утверждение 6 доказано.

Обратимся к свойству RE, выполнение которого для некоторого решения в произвольной игре (N, v) позволяет оценить сверху и снизу выигрыш каждого игрока через маргинальные вклады этого игрока, максимальный и минимальный.

Утверждение 7. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* RE.

Доказательство. Рассмотрим игру $(N, v) \in G^N$. Необходимо показать, что для α-N-ядра при любом $\alpha \in [0,1]$ выполняются неравенства

$$\nu_i^\alpha(v) \leqslant b_{\max}^i(N, v) = \max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)), \tag{2}$$

$$\nu_i^\alpha(v) \geqslant b_{\min}^i(N, v) = \min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \tag{3}$$

для всех $i \in N$. Докажем неравенство (2). Доказательство выполнения неравенства (3) проводится аналогичным образом.

Убедимся, что $b^i_{\max}(N,v) = b^i_{\max}(N,v^*)$ для всех $i \in N$. Действительно, для любого $i \in N$ и коалиции $S \subseteq N \backslash \{i\}$ справедливо равенство $v^*(S \cup \{i\}) - v^*(S) = v(N \backslash S) - v((N \backslash S) \backslash \{i\})$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} b^i_{\max}(N,v^*) &= \max_{S \subseteq N \backslash \{i\}} (v^*(S \cup \{i\}) - v^*(S)) \\ &= \max_{S \subseteq N \backslash \{i\}} (v(N \backslash S) - v((N \backslash S) \backslash \{i\})) = b^i_{\max}(N,v), \quad i \in N. \end{aligned}$$

Выберем $\alpha \in [0,1]$ и рассмотрим игру (N,v^α). Учитывая, что для всех $i \in N$ $b^i_{\max}(N,v) = b^i_{\max}(N,v^*)$, получим оценку для $b^i_{\max}(N,v^\alpha)$:

$$\begin{aligned} b^i_{\max}(N,v^\alpha) &= \max_{S \subseteq N \backslash \{i\}} (v^\alpha(S \cup \{i\}) - v^\alpha(S)) \\ &= \max_{S \subseteq N \backslash \{i\}} (\alpha(v(S \cup \{i\}) - v(S)) + (1-\alpha)(v^*(S \cup \{i\}) - v^*(S))) \\ &\leqslant \alpha \max_{S \subseteq N \backslash \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) + (1-\alpha) \max_{S \subseteq N \backslash \{i\}} (v^*(S \cup \{i\}) - v^*(S)) \\ &= \alpha b^i_{\max}(N,v) + (1-\alpha) b^i_{\max}(N,v^*) = b^i_{\max}(N,v). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\alpha \in [0,1]$ и для всех $i \in N$ справедлива оценка $b^i_{\max}(N,v^\alpha) \leqslant b^i_{\max}(N,v)$.

Из замечания 1 и выполнения свойства RE для пред-N-ядра следует неравенство (2), т. е. для всех $\alpha \in [0,1]$

$$\nu^\alpha_i(v) = \nu_i(v^\alpha) \leqslant b^i_{\max}(N,v^\alpha) \leqslant b^i_{\max}(N,v) \quad \text{для всех } i \in N.$$

Аналогично получаем

$$\nu^\alpha_i(v) \geqslant b^i_{\min}(N,v) \quad \text{для всех } i \in N.$$

Из последних двух соотношений следует выполнение свойства RE для $[0,1]$-N-ядра. Утверждение 7 доказано.

Другой нижней оценкой выигрыша игрока i в игре (N,v) может служить величина $v(\{i\})$. Претензии игрока i на выигрыш, не меньший величины $v(\{i\})$, обоснованы тем фактом, что выигрыш, равный $v(\{i\})$, игрок i получит, если не будет вступать в максимальную коалицию N. Требовать выполнение условия IR разумно, но не всегда возможно. Примером являются игры, в которых характеристическая функция немонотонна.

Проверим выполнение свойства индивидуальной рациональности для $[0,1]$-N-ядра на конкретном примере.

Пример 2. Рассмотрим игру $(N,v) \in G^N$, где $N = \{1,2,3\}$ — множество игроков, с характеристической функцией v, заданной в виде

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = -900, \quad v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 6, \quad v(N) = 12.$$

Игроки 1 и 2 симметричны, и $[0,1]$-N-ядро игры имеет вид

для $\alpha \in \left[0, \frac{38}{151}\right]$ $\nu^\alpha(v) = (-222, -222, 456)$;

для $\alpha \in \left[\frac{38}{151}, \frac{301}{302}\right]$ $\nu^\alpha(v) = (-298 + 302\alpha, -298 + 302\alpha, 608 - 604\alpha)$;

для $\alpha \in \left[\frac{301}{302}, 1\right]$ $\nu^\alpha(v) = (3,3,6)$.

Очевидно, что для $\alpha \in \left[0, \frac{149}{151}\right]$ решение не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности.

Пример 2 выступает в качестве контрпримера и позволяет сделать вывод о том, что на заданном классе игр G^N в общем случае свойство IR для $[0,1]$-N-ядра не выполняется. Другими словами, нельзя гарантировать, что в произвольной ТП-игре каждый игрок получит больший выигрыш, чем он может получить, действуя самостоятельно.

Рассмотрим класс 0-монотонных игр. Будем обозначать его через G_0^N. Напомним, что игра (N,v) называется 0-*монотонной*, если для всех S, $T \subset N$ таких, что $S \subset T$, выполняется

$$v(S) - \sum_{i\in S} v(\{i\}) \leqslant v(T) - \sum_{i \in T} v(\{i\}).$$

Такое сужение класса игр позволяет сформулировать и доказать

Утверждение 8. *$[0,1]$-N-ядро на $G_0^N \subset G^N$ удовлетворяет свойству* IR.

Доказательство. Рассмотрим игру $(N,v) \in G_0^N$. Из утверждения 6 следует, что для любого $\alpha \in [0,1]$ и для всех $i \in N$ выполняется неравенство (3), т. е. $\nu_i^\alpha \geqslant \min\limits_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$. Для 0-монотонных игр для любого $S \subseteq N \setminus \{i\}$ имеет место неравенство $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geqslant v(\{i\})$, которое показывает, что минимальное значение выражения $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ на классе 0-монотонных игр достигается для $S = \{\varnothing\}$ и равно $v(\{i\})$. Тогда для любых $\alpha \in [0,1]$ и $i \in N$ выполняется неравенство $\nu_i^\alpha \geqslant v(\{i\})$. Тем самым свойство IR и утверждение 8 доказаны.

Таким образом, $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству IR на классе 0-монотонных игр и не удовлетворяет этому свойству на классе всех

ТП-игр. Следует отметить, что подобное качество проявляется у пред-N-ядра, вектора Шепли и SM-ядра.

Далее рассмотрим свойство, позволяющее ограничивать в выигрыше тех игроков, вступление в любую коалицию которых даёт лишь аддитивный прирост выигрыша коалиции. Это свойство называется *свойством болвана* DUM.

Утверждение 9. *На множестве игр G^N $[0,1]$-N-ядро удовлетворяет свойству* DUM.

Доказательство. Пусть в игре $(N,v) \in G^N$ игрок $i \in N$ является болваном, т. е. для любого $S \subseteq N$, $S \not\ni i$, выполняется равенство

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}).$$

Тогда в двойственной игре (N,v^*) игрок i также является болваном:

$$\begin{aligned} v^*(S \cup \{i\}) - v^*(S) = v(N) - v(N \setminus (S \cup \{i\})) - v(N) + v(N \setminus S) \\ = v(N \setminus S) - v((N \setminus S) \setminus \{i\}) = v(\{i\}). \end{aligned}$$

Следовательно, в игре (N,v^α) для любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется соотношение $v^\alpha(S \cup \{i\}) - v^\alpha(S) = v(\{i\})$ и игрок i является болваном. Таким образом, из замечания 1 и выполнения свойства DUM для пред-N-ядра следует, что $\nu_i(N,v^\alpha) = v(\{i\})$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Последнее означает выполнение свойства DUM для $[0,1]$-N-ядра. Утверждение 9 доказано.

4. Взаимосвязь с другими решениями кооперативных игр

Исследуем взаимосвязь $[0,1]$-N-ядра с другими решениями[3)] кооперативных ТП-игр.

Определение 9. Будем говорить, что $[0,1]$-N-ядро игры (N,v) *содержит одноточечное решение* $f(N,v)$, если найдётся такое $\overline{\alpha} \in [0,1]$, что $f(N,v) = \nu^{\overline{\alpha}}(v)$. В этом случае будем говорить, что $[0,1]$-N-ядро игры (N,v) содержит одноточечное решение $f(N,v)$ при $\alpha = \overline{\alpha}$.

Свойства одноточечных решений таких, как пред-N-ядро, вектор Шепли, SM-ядро и модифицированное N-ядро, достаточно изучены. Определим далее, при каких α $[0,1]$-N-ядро содержит указанные решения. Это позволит рассматривать одноточечные решения как соответствующие α-N-ядра, т. е. элементы $[0,1]$-N-ядра.

[3)] В статье не приводятся определения C-ядра, пред-K-ядра, SM-ядра, вектора Шепли и модифицированного N-ядра, ознакомиться с которыми можно в [1–8].

Утверждение 10. $[0,1]$-*N-ядро игры (N,v) содержит пред-N-ядро игры (N,v) при $\alpha = 1$.*

Доказательство. Из определения 7 и теоремы 1 следует справедливость данного утверждения. Утверждение 10 доказано.

Учитывая утверждение 10 и свойства пред-N- и C-ядер для сбалансированных и выпуклых игр [1], сформулируем следующие замечания.

Замечание 4. В сбалансированной игре (N,v) пересечение $[0,1]$-N- и C-ядер непусто и содержит пред-N-ядро данной игры, т.е. $\overline{\mathcal{N}} \cap C(N,v) \supseteq \nu(v)$.

Замечание 5. Если игра (N,v) принадлежит классу выпуклых игр, то пересечение $[0,1]$-N- и C-ядер непусто и содержит пред-k-ядро данной игры, т.е. $\overline{\mathcal{N}} \cap C(N,v) \supseteq PK(N,v)$.

Утверждение 11. $[0,1]$-*N-ядро игры (N,v) содержит SM-ядро данной игры при $\alpha = 1/2$.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из определений 6 и 7. Полагая $\alpha = 1/2$ в определении 6, имеем SM-ядро. Утверждение 11 доказано.

Утверждение 12. $[0,1]$-*N-ядро игры (N,v) трёх лиц содержит вектор Шепли данной игры при $\alpha = 1/2$.*

Доказательство. В [8] показано, что в играх трёх лиц SM-ядро и вектор Шепли предлагают в качестве решения одну и ту же точку из множества эффективно-рациональных векторов выигрышей. Из утверждения 11 следует, что SM-ядро является элементом $[0,1]$-N-ядра при $\alpha = 1/2$ в произвольной игре (N,v). Утверждение 12 доказано.

Утверждение 13. $[0,1]$-*N-ядро игры с постоянной суммой состоит из единственной точки и совпадает с пред-N-ядром, модифицированным N-ядром и SM-ядром этой игры.*

Доказательство. Из утверждения 3 следует, что $[0,1]$-N-ядро игры с постоянной суммой удовлетворяет свойству SIVA. Таким образом, на рассматриваемом классе игр $[0,1]$-N-ядро состоит из одной точки. В силу справедливости утверждений 10 и 11 $[0,1]$-N-ядро произвольной игры (N,v) содержит пред-N- и SM-ядра игры (N,v). Следовательно, на классе игр с постоянной суммой $[0,1]$-N-ядро игры (N,v) совпадает с пред-N- и SM-ядрами этой же игры.

В [7] показано, что в играх с постоянной суммой модифицированное N-ядро совпадает с пред-N-ядром этой же игры. Отсюда следует совпадение $[0,1]$-N-ядра игры с постоянной суммой с модифицированным N-ядром. Утверждение 13 доказано.

Рассмотрим связь $[0,1]$-N-ядра с модифицированным N-ядром на классе сбалансированных игр.

Утверждение 14. *В сбалансированной игре (N,v) $[0,1]$-N-ядро содержит модифицированное N-ядро игры (N,v) при $\alpha=0$.*

Доказательство. Рассмотрим сбалансированную игру (N,v). Тогда в силу непустоты C-ядра в игре (N,v) для любых $x \in X^0(N,v)$ выполняется соотношение

$$e(x,v,S) = v(S) - x(S) \leqslant 0, \quad S \subseteq N. \tag{4}$$

Напомним, что модифицированное N-ядро игры (N,v) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \operatorname*{argmin}_{x\in X^0} \max_{S,T\subseteq N} \overline{e}(x,v,S,T)\\ &= \operatorname*{argmin}_{x\in X^0} \max_{S,T\subseteq N} (e(x,v,S)+e(x,v^*,T)).\end{aligned} \tag{5}$$

Так как формула (4) выполнена для любых $x \in X^0(N,v)$, максимальное значение в правой части равенства (5) достигается для $S=\overline{S}$ таких, что $e(x,v,\overline{S})=0$. Тогда формула (5) перепишется в виде:

$$\psi(v) = \operatorname*{argmin}_{x\in X^0} \max_{T\subseteq N} (e(x,v,\overline{S})+e(x,v^*,T)) = \operatorname*{argmin}_{x\in X^0} \max_{T\subseteq N} (e(x,v^*,T)).$$

Последнее выражение определяет 0-N-ядро. Утверждение 14 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Печерский С. Л., Яновская Е. Б.** Кооперативные игры: решения и аксиомы. — СПб.: Изд-во Европ. ун-та в Санкт-Петербурге, 2004. —456 с.
2. **Maschler M.** The bargaining set, kernel, and nucleolus: a survey // Handbook of game theory, Vol. 1. — Berlin: Elsevier Sci. Publ. BV, 1992. — P. 591–665.
3. **Maschler M., Peleg B., Shapley L. S.** Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts // Math. Oper. Res. — 1979. — Vol. 4. — P. 303–338.
4. **Scarf H.** The core of an N person game // Econometrica. — 1967. — Vol. 35. — P. 50–69.
5. **Schmeidler D.** The nucleolus of a characteristic function game // SIAM J. Appl. Math. — 1969. — Vol. 17. — P. 1163–1170.

6. **Shapley L. S.** A value for n-person games // Contributions to the theory of games, II. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1953. — P. 307–317.
7. **Sudhölter P.** The modified nucleolus: properties and axiomatizations // Int. J. Game Theory. — 1997. — Vol. 26. — P. 147–182.
8. **Tarashnina S.** The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game // TOP: Oper. Res. Decision Theory. — 2010. — Vol. 17. — DOI: 10.1007/s11750-009-0118-z.

Смирнова Надежда Владимировна,
e-mail: nadezhda.v.smirnova@gmail.com

Статья поступила
26 декабря 2010 г.

Тарашнина Светлана Ивановна,
e-mail: tarashnina@gmail.com