ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2011. Том 18, № 5. С. 3–10

УДК 519.718

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ С МАКСИМИННЫМ КРИТЕРИЕМ

В. Г. Визинг

Аннотация. Рассматриваются r-критериальные задачи для r-взвешенных графов ($r \geqslant 2$). Подграфы определённого вида называются *допустимыми*. Решение задачи состоит в выборе оптимального по Парето допустимого подграфа из полного множества альтернатив (ПМА). Основной результат состоит в следующем. Предположим, что один из критериев, обозначаемый MAXMIN, требует максимизации минимального первого веса рёбер допустимого подграфа и имеется эффективная процедура, строящая ПМА для $(r-1)$-критериальной задачи без этого максиминного критерия. Тогда эффективно строится ПМА для исходной r-критериальной задачи.

Ключевые слова: допустимый подграф, индикатор качества подграфа, оптимальный по Парето подграф.

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер [3, 6]. Граф называется r-*взвешенным*, если каждое его ребро имеет r положительных числовых характеристик (весов). Таким образом, под r-взвешенным графом G понимается тройка $G = (V, E, W_r)$, где V — множество вершин, E — множество рёбер и $W_r(e) = (w_1(e), \ldots, w_r(e))$ для любого $e \in E$. Положительные числа $w_1(e), \ldots, w_r(e)$ называются *первым, ..., r-м весом ребра e* соответственно.

Граф $G' = (V', E', W'_r)$ называется *подграфом* графа $G = (V, E, W_r)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и $W'_r(e) = W_r(e)$ при всех $e \in E'$. Подграф, не совпадающий с G, называется *собственным подграфом* графа G. Если G' — подграф графа G, то G называется *надграфом* графа G'.

Подграфы определённого вида будем называть *допустимыми*. Предполагается выполнение следующих условий:

a) допустимый подграф графа G является допустимым подграфом для любого надграфа графа G с тем же множеством вершин;

b) никакой собственный подграф допустимого подграфа не является допустимым подграфом графа G и любого надграфа графа G.

Например, допустимыми подграфами для связных графов могут считаться остовы графа, простые цепи, соединяющие две заданные вершины, совершенные паросочетания и др.

Поясним, что понимается под r-критериальной задачей для r-взвешенного графа. Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — функции, определённые на множестве допустимых подграфов, причём для любого допустимого подграфа H значение $f_i(H)$ зависит только от i-х весов рёбер подграфа H ($1 \leqslant i \leqslant r$). Функции $f_1, \ldots, f_r$ называются *критериями оптимальности.* Под r-критериальной задачей $Z = (f_1, \ldots, f_r)$ для r-взвешенного графа понимается задача отыскания оптимального допустимого подграфа. Будем считать, что все критерии оптимальности являются максимизируемыми. Уточним понятие оптимального допустимого подграфа при этом предположении.

Любой допустимый подграф H имеет r числовых характеристик $(f_1(H), \ldots, f_r(H))$. Эту r-ку чисел будем называть *индикатором качества* (или, короче, *индикатором*) *подграфа* H. Пусть H' и H'' — два допустимых подграфа с индикаторами $(y'_1, \ldots, y'_r)$ и $(y''_1, \ldots, y''_r)$ соответственно. Если $y'_j \leqslant y''_j$ при всех $j = 1, \ldots, r$, то будем говорить, что подграф H'' *мажорирует* подграф H' (или H' *мажорируется* подграфом H''). Если при этом индикаторы подграфов различны, то будем говорить, что H' *строго мажорируется* подграфом H''. Два допустимых подграфа с различными индикаторами называются *несравнимыми*, если ни один из них не мажорируется другим.

Оптимальным по Парето называется допустимый подграф графа G, который не мажорируется строго никаким другим допустимым подграфом графа G.

Понятия мажорируемости, несравнимости и оптимальности по Парето переносятся и на индикаторы качества допустимых подграфов.

Множество Ω оптимальных по Парето подграфов графа G называется *полным множеством альтернатив* (ПМА), если

(i) каждый подграф множества Ω является оптимальным по Парето;

(ii) различные подграфы множества Ω несравнимы;

(iii) для любого оптимального по Парето подграфа графа G в множестве Ω найдётся подграф с тем же индикатором качества.

Если имеется ПМА, то оптимальным решением многокритериальной задачи объявляется один из подграфов множества ПМА. При таком понимании решения задачи необходимо располагать эффективной процедурой для построения ПМА. Насколько известно автору, такие процедуры разработаны только для двухкритериальных задач на графах [5].

В настоящей статье мы выйдем за рамки этого ограничения.

Введём следующие обозначения для критериев. Пусть $Z = (f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_r)$ — r-критериальная задача для графа $G = (V, E, W_r)$ и $H = (V', E', W'_r)$ — произвольный допустимый подграф. Тогда

$$f_j = \begin{cases} \text{NULL}, & \text{если } f_j(H) = 0, \\ \text{MAXMIN}, & \text{если } f_j(H) = \min\limits_{e \in E'} w_j(e), \\ \text{SUM}, & \text{если } f_j(H) = \sum\limits_{e \in E'} w_j(e). \end{cases}$$

Критерий MAXMIN будем называть *максиминным.* С максиминным критерием приходится сталкиваться, например, в оптимизационных задачах для нечётких графов. В нечётком графе [7] каждое ребро e имеет вес $\nu(e)$ — степень принадлежности ребра к графу $(0 \leqslant \nu(e) \leqslant 1)$. При отыскании оптимального допустимого подграфа нечёткого графа естественно потребовать максимизации минимального значения $\nu(e)$ для рёбер подграфа. Вообще говоря, максиминные критерии встречаются в задачах на «узкие места».

Пусть G — r-взвешенный граф $(r \geqslant 2)$. Рассмотрим три задачи:

$Z_0 = (\text{NULL}, f_2, \ldots, f_r)$,

$Z_1 = (\text{MAXMIN}, \text{NULL}, \ldots, \text{NULL})$,

$Z_2 = (\text{MAXMIN}, f_2, \ldots, f_r)$.

(Задачу Z_0 можно считать $(r-1)$-критериальной, а задачу Z_1 — однокритериальной).

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть $G = (V, E, W_r)$ — r-взвешенный n-вершинный граф с m рёбрами, $\mu_0(n)$ — максимальная мощность* ПМА *в задачах Z_0 для графов, имеющих не больше n вершин, и $\mu_2(G)$ — мощность* ПМА *в задаче Z_2 для графа G. Тогда*

$$\mu_2(G) \leqslant m \cdot \mu_0(n). \tag{1}$$

1. Доказательство теоремы и алгоритм построения ПМА

Пусть Z — r-критериальная задача для r-взвешенного графа G.

Отношение строгого мажорирования допустимых подграфов является транзитивным, а отношение мажорирования — ещё и рефлексивным. Поэтому в силу конечности множества допустимых подграфов имеет место следующая

Лемма 1. *Для любого допустимого подграфа H графа G найдётся мажорирующий его оптимальный по Парето подграф. Это мажорирование является строгим, если подграф H не является оптимальным по Парето.*

Лемма 2. *Пусть $\Omega = H_1, \ldots, H_k$ — множество попарно несравнимых допустимых подграфов графа G. Множество Ω является* ПМА *тогда и только тогда, когда любой допустимый подграф графа G мажорируется хотя бы одним подграфом из Ω.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество Ω является ПМА и H — произвольный допустимый подграф графа G. По лемме 1 существует оптимальный по Парето подграф P, мажорирущий H. Но по определению в ПМА есть подграф, имеющий тот же индикатор, что и P. Этот подграф из Ω мажорирует H.

Достаточность. Пусть любой допустимый подграф мажорируется некоторым подграфом из Ω. Покажем, что Ω является ПМА. Так как Ω обладает свойством (ii) из определения ПМА, нужно доказать, что Ω обладает свойствами (i) и (iii). Пусть P' — произвольный оптимальный по Парето подграф. В Ω есть подграф H_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$, мажорирующий P'. Это мажорирование не может быть строгим, поэтому индикаторы подграфов P' и H_j совпадают. Таким образом, Ω удовлетворяет условию (iii), и в силу леммы 1 любой допустимый подграф, не являющийся оптимальным по Парето, строго мажорируется некоторым подграфом из Ω. Наконец, любой подграф из Ω является оптимальным по Парето: в противном случае он строго мажорировался бы другим подграфом из Ω, что противоречит несравнимости подграфов из Ω. Лемма 2 доказана.

Введём следующие обозначения:

A_0 — алгоритм, строящий ПМА для задачи Z_0,

A_1 — алгоритм, строящий допустимый подграф с наибольшим минимальным первым весом ребра,

A_2 — алгоритм, строящий ПМА для задачи Z_2.

Доказательство теоремы. Решим (однокритериальную) задачу Z_1 для графа G. Получим допустимый подграф H_1. Обозначим через ν_1 минимальный первый вес ребра графа H_1. Рассмотрим рёбра графа G, первые веса которых не больше ν_1. Расположим первые веса этих рёбер в порядке убывания: $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_q$ $(1 \leqslant q \leqslant m)$. Обозначим через E_i подмножество всех тех рёбер графа G, первые веса которых не меньше ν_i, а через G_i — подграфы графа G с множествами вершин V и рёбер E_i $(i = 1, \ldots, q)$. Для каждого подграфа G_i решаем задачу Z_0

и строим ПМА, которое обозначим через P_i ($i = 1, \ldots, q$). Положим $P = P_1 \cup \ldots \cup P_q$. Поскольку все подграфы $G_1, \ldots, G_q$ имеют то же множество вершин V, что и граф G, и G является надграфом для каждого из них, все подграфы множества P допустимы. Так как $q \leqslant m$ и $P_i \leqslant \mu_0(n)$ при всех $i = 1, \ldots, q$, то $|P| \leqslant m \cdot \mu_0(n)$.

Рассмотрим теперь индикаторы качества в задаче Z_2 подграфов из P. Удалим из P подграфы, индикаторы которых строго мажорируются другими индикаторами. Затем из подграфов с одинаковыми индикаторами оставим только один, остальные удалим. Оставшееся множество несравнимых подграфов обозначим через Ω. В задаче Z_2 каждый подграф из P мажорируется по крайней мере одним подграфом из Ω (возможно, самим собой). Имеем $|\Omega| \leqslant |P| \leqslant m \cdot \mu_0(n)$. Осталось доказать, что множество подграфов Ω является ПМА для задачи Z_2.

Воспользуемся леммой 2. Пусть H — произвольный допустимый подграф графа G, $(0, x_2, \ldots, x_r)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — его индикаторы качества в задачах Z_0 и Z_2 соответственно. Тогда $\nu_q \leqslant x_1 \leqslant \nu_1$. Пусть $x_1 = \nu_j$ ($1 \leqslant j \leqslant q$). Это означает, что H является подграфом графа G_j. Но в графе G_j множество P_j является ПМА для задачи Z_0, поэтому в P_j найдётся подграф H', индикатор качества которого $(0, y_2, \ldots, y_r)$ в задаче Z_0 мажорирует индикатор $(0, x_2, \ldots, x_r)$, т. е. $y_2 \geqslant x_2, \ldots, y_r \geqslant x_r$. Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ — индикатор подграфа H' в задаче Z_2. Так как первые веса всех рёбер графа G_j не меньше ν_j, то $y_1 \geqslant \nu_j = x_1$. Поэтому подграф H мажорируется подграфом H' в задаче Z_2. Но в Ω обязательно найдётся подграф H'', мажорирующий в задаче Z_2 подграф H', а значит, и подграф H. Следовательно, по лемме 2 множество подграфов Ω является ПМА для задачи Z_2. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы фактически использовался следующий алгоритм, строящий ПМА для задачи Z_2.

Алгоритм A_2. С помощью алгоритма A_1 строим допустимый подграф графа G с наибольшим минимальным первым весом ребра. Минимальный первый вес ребра такого подграфа обозначаем через ν_1. Если первые веса всех рёбер не меньше ν_1, то с помощью алгоритма A_0 строим ПМА Ω для задачи Z_0 в графе G. Множество Ω будет ПМА в графе G для задачи Z_2, и алгоритм останавливается. Если в графе G есть рёбра, первые веса которых меньше ν_1, то первые веса рёбер, не большие ν_1, располагаем в убывающем порядке: $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_q$. Последовательность $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ назовём *активной последовательностью первых весов*. Обозначаем через E_i подмножество всех рёбер графа G, первые веса которых не меньше ν_i, а через G_i — подграфы графа G

с вершинами V и рёбрами E_i $(i = 1, \ldots, q)$. С помощью алгоритма A_0 в каждом подграфе G_i строим ПМА для задачи Z_0, которое обозначаем через P_i $(i = 1, \ldots, q)$. Полагаем $P = P_1 \cup \ldots \cup P_q$. Рассматриваем индикаторы качества подграфов из P в задаче Z_2. Удаляем из P подграфы, индикаторы которых строго мажорируются другими индикаторами. Затем из подграфов с одинаковыми индикаторами оставляем только один, остальные удаляем. Оставшееся множество подграфов обозначаем через Ω. Множество подграфов Ω является искомым ПМА в графе G для задачи Z_2.

Легко видеть, что если алгоритмы A_0 и A_1 имеют полиномиальную сложность, то полиномиальную сложность имеет и алгоритм A_2.

2. Оптимальные остовы

Напомним, что *остовом* связного графа называется связный подграф с тем же множеством вершин, являющийся деревом.

Пусть $G = (V, E, W_r)$ — связный r-взвешенный n-вершинный граф с m рёбрами. Допустимыми подграфами считаются остовы графа. Под задачей об остовах графа понимается задача построения ПМА.

При $r = 1$ с минимизируемым критерием SUM задачу об остовах можно решить с помощью алгоритмов Краскала или Прима [10, 11]. Известно [1], что алгоритм Краскала имеет сложность $O(m \ln m)$. Такую же сложность имеет алгоритм в случае, когда максимизируемым критерием является MAXMIN. Поскольку мы условились иметь дело только с максимизируемыми критериями, вместо критерия SUM будем рассматривать критерий $-$SUM.

В [4] показано, что в случае двух критериев $-$SUM мощность ПМА может оказаться равной n^{n-2}. Поэтому задача является трудноразрешимой, если по меньшей мере два критерия имеют вид $-$SUM. В [2, 8] даётся эффективное решение двухкритериальной задачи об остовах, одним из критериев в которой является $-$SUM, а другим MAXMIN. В [9] содержится решение двухкритериальной задачи об остовах в том случае, когда оба критерия являются MAXMIN. Сложность алгоритма для построения ПМА не превосходит $O(n^4 \cdot \ln n)$.

Алгоритм A_2 даёт возможность эффективно решать некоторые r-критериальные задачи об остовах при $r \geqslant 3$. Проиллюстрируем это в случае $r = 3$.

Рассмотрим задачу об остовах $Z_3 = (\mathrm{MAXMIN}, \mathrm{MAXMIN}, -\mathrm{SUM})$. Как показано в [2], задача $Z_{0,3} = (\mathrm{NULL}, \mathrm{MAXMIN}, -\mathrm{SUM})$ решается алгоритмом сложности $O(m^2 \ln m)$. Как и прежде, будем обозначать этот алгоритм через A_0. Так как ПМА для однокритериальной задачи с критерием $-$SUM имеет мощность 1, по формуле (1) мощность ПМА для задачи $Z_{0,3}$ не больше m. Далее используем алгоритм A_2. С помощью алгоритма A_1 построим остов с наибольшим минимальным первым весом ребра. Сложность такого построения равна $O(m \cdot \ln m)$. Пусть ν_1 — минимальный первый вес ребра этого остова. Если первые веса всех рёбер графа G не меньше ν_1, то остовы, входящие в ПМА для задачи $Z_{0,3}$, образуют ПМА для задачи Z_3. Если в графе G есть рёбра, первые веса которых меньше ν_1, то из первых весов рёбер образуем активную последовательность $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_q$. Очевидно, что $q \leqslant m-n+2$. Обозначаем через E_i подмножество всех рёбер графа G, первые веса которых не меньше ν_i, а через G_i — подграфы графа G с вершинами V и рёбрами E_i $(i = 1, \ldots, q)$. С помощью алгоритма A_0 в каждом подграфе G_i строим ПМА для задачи $Z_{0,3}$, которое обозначаем через P_i $(i = 1, \ldots, q)$. Полагаем $P = P_1 \cup \ldots \cup P_q$. Мощность множества P не больше $(m - n + 2)^2$, а сложность алгоритма, строящего P, не больше $(m - n + 2)O(m^2 \ln m)$ и, значит, не больше $O(m^4)$. Затем в соответствии с алгоритмом A_2 из P нужно удалить «лишние» остовы. Это потребует не более $(m - n + 2)^4$ сравнений индикаторов входящих в P остовов. Таким образом, сложность алгоритма, строящего ПМА для задачи Z_3, не больше $O(m^4)$.

Рассмотрим задачу об остовах $Z_4 = (f_1, f_2, f_3)$, где $f_i =$ MAXMIN $(i = 1, 2, 3)$. Сначала рассмотрим однокритериальную задачу с критерием f_3. ПМА этой задачи состоит из единственного остова, который можно построить с помощью алгоритма, имеющего сложность $O(m \ln m)$. Затем рассмотрим задачу $Z_{0,4} = (\mathrm{NULL}, \mathrm{MAXMIN}, \mathrm{MAXMIN})$. По теореме мощность ПМА для этой задачи не больше m. Остовы, входящие в ПМА, можно построить с помощью алгоритма A_2. Алгоритм A_2 сначала строит не больше m остовов, на что потребуется не больше $mO(m \ln m)$ действий. Затем удаляются «лишние» остовы. Таким образом, сложность алгоритма, решающего задачу об остовах $Z_{0,4}$, не больше $O(m^2 \ln m)$ (это результат из [9]). Далее, по теореме мощность ПМА для задачи Z_4 не больше m^2. Остовы, входящие в ПМА, строятся алгоритмом A_2. Для построения множества P требуется не больше $m^2 O(m \ln m)$ действий. Затем с помощью $O(m^4)$ действий можно удалить «лишние» остовы, получив ПМА. Таким образом, совершив не больше $O(m^4)$ действий, можно построить ПМА для задачи Z_4.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979. — 536 с.

2. **Визинг В. Г.** Об одной двухкритериальной задаче на графах // Дискрет. анализ и исслед. опраций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 34–40.
3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
4. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Многокритериальные задачи об остовах графа // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 3. — С. 544–547.
5. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискрет. математика. — 1994. — Т. 6, вып. 1. — С. 3–33.
6. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М.: Вуз. кн., 2004. — 663 с.
7. **Кофман А.** Введение в теорию нечётких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
8. **Сергиенко И. В., Перепелица В. А.** К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 85–93.
9. **Emelichev V. A., Perepeliza V. A.** Complexity of vector optimization problems on graphs // Optimization. — 1991. — Vol. 22, N 6. — P. 903–918.
10. **Kruskal J. B. Jr.** On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 7, N 1. — P. 48–50.
11. **Prim R. C.** Shortest connection networks and some generalizations // Bell Syst. Techn. — 1957. — Vol. 36. — P. 1389–1401.

Визинг Вадим Георгиевич,
e-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
17 мая 2011 г.