ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2011. Том 18, № 5. С. 11–37

УДК 519.8

ПРИБЛИЖЁННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ КОММИВОЯЖЁРАХ НА МИНИМУМ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ *)

А. Н. Глебов, Д. Ж. Замбалаева

Аннотация. Основной результат статьи — приближённый алгоритм с оценкой временно́й сложности $O(n^5)$ и оценкой точности 4/3 (без учёта аддитивной константы) для задачи о поиске двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном n-вершинном графе с весами рёбер 1 и 2 в случае, когда весовые функции рёбер этих циклов различны (задача о двух коммивояжёрах на минимум с весами рёбер 1 и 2). Этот результат улучшает ранее установленную для задачи оценку точности 11/7.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, задача о двух коммивояжёрах, полиномиальный алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

Задача коммивояжёра (TSP) является одной из наиболее известных и активно изучаемых задач дискретной оптимизации.

В последнее время некоторыми авторами рассматривается такое естественное обобщение задачи коммивояжёра, как задача об m коммивояжёрах (m-PSP), состоящая в поиске m рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального или максимального суммарного веса в полном взвешенном графе. При этом наибольшее внимание уделяется задаче о двух коммивояжёрах (2-PSP). Эта задача рассматривается как для произвольной или метрической весовой функции, так и в более специальном случае весов рёбер 1 и 2 (задача 2-PSP(1,2)). Все указанные

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09–01–00244, 10–07–00195), второго автора — при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты №№ 02.740.11.0429 и 14.740.11.0868).

варианты задачи NP-трудны, что вытекает из NP-полноты задачи определения существования двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе [7–9].

В настоящей статье рассматривается задача о двух коммивояжёрах на минимум в полном графе с весами рёбер 1 и 2. Отметим, что для задачи одного коммивояжёра на минимум в случае произвольной весовой функции нет полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности. Для метрической задачи TSP-min известен алгоритм Кристофидеса [6] и А. И. Сердюкова [3] с оценкой 3/2. В случае весов рёбер 1 и 2 Пападимитриу и Яннакакисом в 1993 г. получен алгоритм с оценкой точности 7/6 [10]. Для этой же задачи Берман и Карпински в 2006 г. предложили алгоритм, для которого анонсировали оценку точности 8/7 [5], но данный результат не был строго обоснован.

Для задачи о двух коммивояжёрах с весами рёбер 1 и 2 (2-PSP (1,2)-min) Ю. В. Глазковым, Э. Х. Гимади и А. Н. Глебовым разработан алгоритм с оценкой точности 6/5 в случае, когда весовые функции для обоих циклов одинаковы [2]. В случае двух различных весовых функций (задача 2-PSP(1,2)-min-2w) в [4] предложен алгоритм с оценкой 11/7.

Целью настоящей работы является усиление результата из [4], а именно, построение для задачи 2-PSP(1,2)-min-2w приближённого алгоритма с оценкой точности 4/3 (без учёта аддитивной константы) и оценкой временно́й сложности $O(n^5)$. В основу алгоритма положена идея метода из [5], заключающаяся в построении и последовательном «улучшении» двух рёберно непересекающихся частичных туров (наборов цепей и циклов) из рёбер единичного веса и последующем замыкании этих туров в непересекающиеся гамильтоновы циклы. Под «улучшением» туров понимается такое их локальное преобразование, при котором уменьшается либо общее число цепей и циклов, составляющих туры, либо число одновершинных цепей (синглов). В случае, когда нужное качество решения еще не достигнуто, возможность улучшающего преобразования гарантируется с помощью техники так называемых зарядов вершин, т. е. чисел, специальным образом определяемых для каждой вершины графа, с последующим перераспределением этих зарядов между вершинами.

В статье понятие частичного тура, традиционно используемое в большинстве работ, посвящённых построению приближённых алгоритмов для задач одного и двух коммивояжёров, существенно модифицировано за счёт включения в туры наряду с цепями и циклами так называемых (s, q)-деревьев (обобщение синглов).

В разд. 1 вводятся необходимые определения и даётся общее описание алгоритма. В разд. 2 формулируется основная теорема об оценке точности решения, полученного алгоритмом, и о его временнóй сложности, а также описывается техника перераспределения зарядов между вершинами графа. Разд. 3 посвящён доказательству основной теоремы, по большей части состоящему из доказательства ключевой леммы о перераспределении зарядов.

1. Используемые понятия и описание алгоритма

Рассмотрим полный неориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, и две весовые функции рёбер $w_1 : E \to \{1, 2\}$ и $w_2 : E \to \{1, 2\}$. *Допустимым решением* задачи 2-PSP(1,2)-min-2w называется любая пара рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2 в G. *Весом* решения H_1, H_2 называется число $w_1(H_1) + w_2(H_2)$, где

$$w_i(H_i) = \sum_{e \in H_i} w_i(e), \quad i = 1, 2.$$

Допустимое решение H_1^*, H_2^* называется *оптимальным*, если оно имеет минимальный вес, который обозначим через OPT.

Под *длиной* цепи (цикла) P в графе G будем понимать число рёбер в P. Одновершинная цепь (длины 0) называется *синглом*, а цепь положительной длины — *нетривиальной*. Цепь называется *длинной*, если её длина не меньше 3, и *короткой* в противном случае.

Определим рекурсивно класс (s, q)-*деревьев* следующим образом. Любое одновершинное дерево $T = \{v\}$ будем называть (s, q)-*деревом ранга* $k(T)$=1 с множествами S-*вершин* $S(T) = \{v\}$, Q-*вершин* $Q(T) = \varnothing$, рёбер $E(T) = \varnothing$ и *корнем* $r(T) = v$, имеющим пустого *родителя* $p(v) = 0$. Если T_1 — некоторое (s, q)-дерево ранга $k - 1$ и $s \in S(T_1)$ — его произвольная S-вершина, $P = xyz$ — любая 3-цепь, вершинно непересекающаяся с T_1, то дерево T с $S(T) = S(T_1) \cup \{x, z\}$, $Q(T) = Q(T_1) \cup \{y\}$, $E(T) = E(T_1) \cup \{sx, xy, yz\}$ и корнем $r(T) = r(T_1)$, где $p(y) = s$, $p(x) = p(z) = y$, назовём (s, q)-*деревом ранга* $k(T) = k$. При этом S-вершины x и z будем называть *сыновьями* Q-вершины y, а цепь $P = xyz$ — *канонической* для y в T. Из данного рекуррентного определения следует, что любое (s, q)-дерево T ранга k имеет $|S(T)| = 2k - 1$, $|Q(T)| = k - 1$ и $|E(T)| = 3(k - 1)$, а степень любой Q-вершины в T равна 3.

Лемма 1. *Пусть T — (s, q)-дерево ранга k, $s \in S(T)$ — его произвольная S-вершина. Тогда, удаляя из T подходящие $k - 1$ рёбер, можно за время $O(k)$ разбить T на сингл s и $k-1$ цепей длины 2 так, что множество внутренних вершин полученных цепей будет совпадать с $Q(T)$.*

Доказательство. Если $s = r(T)$, то, удаляя из T множество рёбер $\{qp(q) \mid q \in Q(T)\}$, получим разбиение T на сингл s и набор канонических цепей для всех Q-вершин дерева T. Допустим, что $s = s_0 \neq r(T)$, и пусть $P = s_0q_0s_1q_1 \dots s_{m-1}q_{m-1}s_m$ — единственная цепь в T, соединяющая s с корнем дерева $r(T) = s_m$. Обозначим через s'_i сына вершины q_i в T, отличного от s_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Удаляя из T рёбра $s_0q_0, s_1q_1, \dots, s_{m-1}q_{m-1}$ и все рёбра вида $qp(q)$ для $q \in Q \setminus \{q_0, q_1, \dots, q_{m-1}\}$, получим искомое разбиение T на сингл $s = s_0$ и цепи $s'_0q_0s_1, s'_1q_1s_2, \dots, s'_{m-1}q_{m-1}s_m$, а также все канонические цепи для вершин из $Q \setminus \{q_0, q_1, \dots, q_{m-1}\}$. Остаётся заметить, что разбиение дерева T выполняется за время $O(k)$ в силу неравенства $m \leqslant |Q(T)| = k - 1$. Лемма 1 доказана.

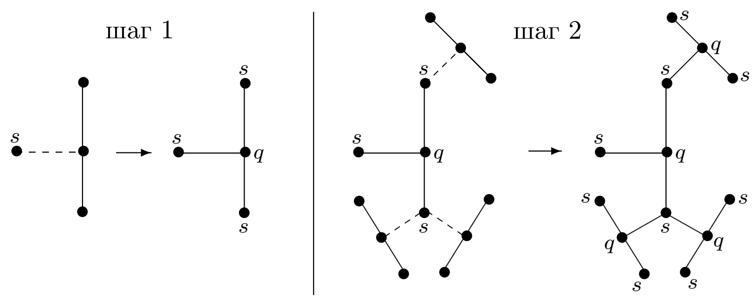

Рис. 1. Пример построения (s, q)-дерева

Обобщённым туром (или просто *туром*) в графе G назовём множество вершинно непересекающихся цепей, циклов и (s, q)-деревьев, покрывающих все вершины G. В дальнейшем будем отождествлять тур с множеством его рёбер. При этом синглы в туре будем рассматривать как его (s, q)-деревья ранга 1, а не как цепи. Далее под множеством цепей тура всегда понимается множество его нетривиальных цепей. Полагаем, что *ранг* любой цепи P (цикла C) в туре равен 1 ($k(P) = k(C) = 1$). *Рангом* (*числом объектов*) $k(A)$ тура A назовём сумму рангов составляющих его цепей, циклов и (s, q)-деревьев. Заметим, что ранг тура A совпадает с числом всех объектов (цепей) в *производном туре* для A, полученном из A размыканием всех его циклов, т. е. удалением ребра из каждого цикла, и разбиением всех (s, q)-деревьев согласно лемме 1.

Обозначим через $d_A(v)$ степень вершины v в туре A, т. е. число рёбер в A, инцидентных v. Ясно, что $d_A(v) = 0$ тогда и только тогда, когда вершина v является синглом в A. Вершину v назовём S-, Q-, PT-, PZ- или *Z-вершиной* тура A, если v — S- или Q-вершина (s,q)-дерева, конец нетривиальной цепи, внутренняя вершина цепи или вершина цикла в A соответственно. Под *PZ^l-вершиной* будем понимать PZ-вершину длинной цепи, а под PZ^s — середину цепи длины 2. Вершина называется *терминальной* или *T-вершиной* для A, если она является PT-, S- или Z-вершиной в A.

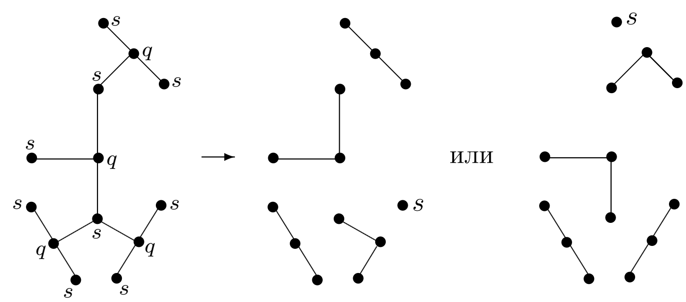

Рис. 2. Пример разбиения (s,q)-дерева

Определим $E_i = \{e \in E \mid w_i(e) = 1\}$ — множество *E_i-рёбер* графа G, $i = 1, 2$. Идея алгоритма заключается в построении в G пары рёберно непересекающихся туров A_1, A_2 с множествами рёбер $A_1 \subseteq E_1$ и $A_2 \subseteq E_2$ и последовательном «улучшении качества» этих туров. Чтобы описать тип вершины относительно тура A_i, обозначим через S_i, Q_i, PT_i, PZ_i, Z_i и T_i множества всех S-, Q-, PT-, PZ-, Z- и T-вершин тура A_i соответственно. Под *X-вершиной* (*Y-ребром*) будем понимать вершину (ребро), принадлежащую множеству $X \subseteq V$ ($Y \subseteq E$). Тип вершины относительно пары туров A_1, A_2 описывает термин *(X_1, X_2)-вершина*, где X_1 и X_2 — типы данной вершины относительно туров A_1 и A_2 соответственно. Например, (S, PZ)-вершина — это вершина, принадлежащая множествам S_1 и PZ_2.

Пусть H_1^*, H_2^* — пара рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов, являющаяся оптимальным решением задачи 2-PSP(1,2)-min-2w с весовыми функциями w_1 и w_2. Обозначим через B_i тур в G, образованный всеми E_i-рёбрами цикла H_i^*, $i = 1, 2$. Ясно, что при $B_i = H_i^*$ тур B_i является гамильтоновым циклом в G, в противном случае B_i представляет собой набор вершинно непересекающихся цепей.

Положим $A_i^p = A_i \setminus (B_1 \cup B_2)$, $B_i^p = B_i \setminus (A_1 \cup A_2)$, $E_i^p = E_i \setminus (A_1 \cup A_2)$, $i = 1, 2$. Будем называть рёбра из A_i^p, B_i^p и E_i^p *чистыми* в A_i, B_i и E_i

соответственно. Обозначим через E_i' множество всех E_i-рёбер, принадлежащих (s,q)-деревьям в туре A_{3-i}, а через E_i'' — множество всех E_i-рёбер xy (с учётом ориентации) таких, что $y \in S_i$ и xy принадлежит циклу в A_{3-i}. Аналогично определяются множества рёбер B_i' и B_i'' в туре B_i, $i \in \{1,2\}$.

A-*окрестностью* вершины $v \in V$ назовём множество вершин $A(v)$, состоящее из v и всех вершин, соединенных с v рёбрами, принадлежащими цепям и циклам (но не (s,q)-деревьям) в A_1 и A_2. Ясно, что $|A(v)| \leqslant 5$. *Допустимым преобразованием* туров A_1, A_2 *в окрестности вершины* v назовём замену пары A_1, A_2 парой $(A_1 \cup X_1) \setminus Y_1$, $(A_2 \cup X_2) \setminus Y_2$, где $X_1 \subset E_1$, $X_2 \subset E_2$, $|X_1| \leqslant 2$, $|X_1| \leqslant 2$, каждое ребро в $X_1 \cup X_2$ инцидентно некоторой вершине из $A(v)$ и $X_1 \cup X_2$ содержит не более двух рёбер из $E_1^p \cup E_2^p \cup E_1' \cup E_2'$. Кроме того, $Y_1 \subset A_1$, $Y_2 \subset A_2$, причём Y_i содержит не более трёх рёбер из цепей и циклов тура A_i, каждое из которых либо принадлежит X_{3-i}, либо смежно с некоторым ребром из X_i, кроме этого Y_i может содержать один или несколько наборов рёбер, каждый из которых удаляется из некоторого (s,q)-дерева тура A_i согласно лемме 1 с образованием сингла, инцидентного ребру из $X_1 \cup X_2$.

Допустимое преобразование назовём *улучшающим*, если оно уменьшает значение выражения

$$q = 27n(k_1 + k_2) + 9n(s_1 + s_2) - 3n(\gamma_1 + \gamma_2) - (\tau_1 + \tau_2),$$

называемого *качеством* туров A_1, A_2, где *параметрами качества* тура A_i (в порядке убывания их *старшинства*) являются k_i — ранг A_i, s_i — число (s,q)-деревьев, γ_i — число циклов, τ_i — число вершин, входящих в (s,q)-деревья в A_i, $i = 1, 2$.

Приведём описание алгоритма, составляющего основной результат статьи.

Алгоритм $A_{4/3}$

Шаг 0. При $n \leqslant 13$ полным перебором найти в графе G пару рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, являющуюся оптимальным решением задачи 2-PSP(1,2)-min-2w. Иначе перейти на шаг 1.

Шаг 1. Начать с $A_1 = A_2 = \varnothing$ (оба тура состоят только из синглов).

Шаг 2. Пока возможно улучшающее преобразование, находить его и применять к A_1, A_2. Если нет улучшающих преобразований, то перейти на шаг 3.

Шаг 3. Построить для A_1 и A_2 производные туры A_1', A_2', состоящие из k_1, k_2 цепей соответственно, где $k_1 \leqslant k_2$. Если $k_2 < 5$, то удалением произвольных рёбер преобразовать A_1', A_2' в туры, состоящие из пяти цепей каждый. Перейти на шаг 4.

Шаг 4. Дополнить тур A_1' до гамильтонова цикла H_1, рёберно непересекающегося с A_2', с помощью одной из описанных ниже процедур $P_{T\to H}$ при $k_1 \geqslant 5$ или $P'_{T\to H}$ при $k_1 < 5$ (при выполнении $P'_{T\to H}$ одно ребро может удаляться из A_1' или перемещаться из A_2' в H_1, а при выполнении $P_{T\to H}$ такого не происходит). Далее дополнить A_2' до гамильтонова цикла H_2, рёберно непересекающегося с H_1, процедурой $P_{T\to H}$.

На выход алгоритма подаётся пара гамильтоновых циклов H_1, H_2, полученная на шаге 0 (при $n \leqslant 13$) или на шаге 4 (при $n \geqslant 14$).

Опишем процедуру $P_{T\to H}$, применяемую на шаге 4 алгоритма (она основана на аналогичных процедурах из [1, 2]). Пусть в полном графе G порядка $n \geqslant 14$ заданы тур T, содержащий не менее пяти цепей, и тур или гамильтонов цикл T', рёберно непересекающийся с T (предполагается, что данные туры состоят только из цепей).

Процедура $P_{T\to H}$

Шаг 1. Если тур T содержит не более двух нетривиальных цепей, то добавлением подходящих рёбер между синглами из T получить тур, рёберно непересекающийся с T' и содержащий не менее трёх нетривиальных цепей.

Шаг 2. Пока в T имеется сингл s, выбрать в T нетривиальные цепи $(u_1, \ldots, u_k)$, $(v_1, \ldots, v_l)$ и $(w_1, \ldots, w_m)$. Добавить к T то из рёбер su_1, sv_1, sw_1, которое не принадлежит T'. После выполнения шага 2 в T нет синглов.

Шаг 3. Пока в T имеется более трёх цепей, выбрать две произвольные цепи $(u_1, \ldots, u_k)$ и $(v_1, \ldots, v_l)$. Добавить к T то из рёбер u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l, которого нет в T'.

Шаг 4. Тур T состоит ровно из трёх цепей положительной длины: $(u_1, \ldots, u_k)$, $(v_1, \ldots, v_l)$ и $(w_1, \ldots, w_m)$. Из всех возможных вариантов соединения этих цепей в гамильтонов цикл H выбрать тот, который не использует рёбер из T'.

Лемма 2. *Пусть G — полный граф порядка $n \geqslant 14$, в котором заданы тур T, содержащий не менее пяти цепей, и тур или гамильтонов цикл T', рёберно непересекающийся с T. Тогда процедура $P_{T\to H}$ за время $O(n)$ строит в G гамильтонов цикл $H \supseteq T$ такой, что $H \cap T' = \varnothing$.*

Доказательство. Ясно, что если на шаге 1 в T имеется хотя бы три сингла, то какие-то два из них можно соединить ребром, не принадлежащим T', ввиду отсутствия циклов длины 3 в T'. Поэтому для обоснования корректности шага 1 достаточно рассмотреть случай, когда тур T состоит из единственной нетривиальной цепи и четырёх синглов $s_1, \ldots, s_4$. Заметим, что хотя бы одна из пар рёбер $\{s_1s_2, s_3s_4\}$, $\{s_1s_3, s_2s_4\}$ или $\{s_1s_4, s_2s_3\}$ не пересекается с T', так как в противном случае в T' существовала бы вершина степени 3 или 3-цикл. Добавление указанной пары рёбер к T завершает шаг 1.

На шаге 2 при вершине s имеются три ребра: su_1, sv_1 и sw_1, поэтому хотя бы одно из них не принадлежит T'. На шаге 3 рёбра u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1 и u_kv_l образуют 4-цикл и хотя бы одно из них не принадлежит T'.

Рассмотрим шаг 4. Обозначим через H' гамильтонов цикл в G такой, что $H' = T'$, если T' является гамильтоновым циклом, или H' получен из тура T' добавлением рёбер, соединяющих концы цепей из T' в произвольном порядке (в последнем случае H' может иметь общие рёбра с T). Для обоснования корректности шага 4 достаточно показать, что цепи тура T, оставшиеся к началу шага 4, можно соединить в гамильтонов цикл рёбрами, не принадлежащими H'. Возможность такого достроения доказана в [1] рассмотрением возможных случаев расположения концов цепей тура T на цикле H'. Очевидно, что время работы процедуры $P_{T\to H}$ линейно по n. Лемма 2 доказана.

Далее опишем процедуру $P'_{T\to H}$. Пусть в полном графе G порядка $n \geqslant 14$ заданы рёберно непересекающиеся туры T и T', состоящие только из цепей.

Процедура $P'_{T\to H}$

Шаг 1. Пока в G есть ребро $e \notin T'$, соединяющее концы различных цепей тура T, добавить e к T. Иначе перейти на шаг 2.

Шаг 2. Если T состоит из единственной цепи $P = x \ldots y$, положить $H := P \cup \{xy\}$. При этом если ребро xy входит в T', то удалить его из T'. Если же T состоит из сингла s и нетривиальной цепи $Q = a \ldots b$, где $sa, sb \in T'$, то выбрать в Q такое ребро cd, что $\{c, d\} \cap \{a, b\} = \varnothing$, и положить $H := T \cup \{ab, sc, sd\} \setminus \{cd\}$.

Лемма 3. *Пусть G — полный граф порядка $n \geqslant 14$, в котором заданы рёберно непересекающиеся туры T и T'. Процедура $P'_{T\to H}$ за время $O(n)$ преобразует тур T в гамильтонов цикл H, включающий все кроме, возможно, одного ребра тура T, а из тура T' удаляет не более одного ребра. При этом если $H \not\supset T$, то тур T' не меняется. В любом случае после окончания работы процедуры $P'_{T\to H}$ имеем $H \cap T' = \varnothing$.*

Доказательство. Для обоснования корректности процедуры $P'_{T\to H}$

заметим, что после выполнения шага 1 возможны только ситуации, описанные на шаге 2. Действительно, если в туре T есть хотя бы три цепи или две нетривиальные цепи, то аналогично доказательству леммы 2 устанавливается, что к T можно добавить ребро на шаге 1. Если T состоит из сингла s и цепи $Q = a \dots b$, то из невозможности добавления ребра на шаге 1 следует, что $sa, sb \in T'$. В этом случае возможность выбора ребра cd на шаге 2 обеспечивается условием $n \geqslant 14$. Ясно, что добавленные к T рёбра sc, sd, ab не принадлежат туру T' ввиду условия $sa, sb \in T'$ и отсутствия 3-цикла (s, a, b) в T'. Время работы процедуры $P'_{T \to H}$ линейно по n. Лемма 3 доказана.

Далее мы опишем несколько стандартных улучшающих преобразований туров A_1, A_2, выполняемых на шаге 2 алгоритма $A_{4/3}$.

П0. Если $e = xy \in E_i^p \cup E_i' \cup E_i''$, x, y — терминальные вершины для A_i, не принадлежащие общему циклу в A_i, то добавляем к A_i ребро e. Если, скажем, x принадлежит циклу C в A_i, то удаляем из A_i одно из рёбер C, инцидентных x. Если $x \in S_i$, то перед добавлением ребра e к A_i разбиваем (s, q)-дерево, содержащее x, согласно лемме 1 так, чтобы образовался сингл x и набор цепей длины 2.

П1. Если $e = xy \in E_i^p \cup E_i' \cup E_i''$, $x \in S_i$, y — PZ_i-вершина длинной цепи P в A_i, то разбиваем (s, q)-дерево, содержащее x, по лемме 1 с образованием сингла x, а затем добавляем e к A_i и удаляем ребро $yz \in P$ из A_i, где z — PZ_i-вершина цепи P.

П2. Если $e = xy \in E_i^p$, $x \in S_i$, y — середина цепи P длины 2 в A_i, то добавляем e и P к (s, q)-дереву тура A_i, содержащему x.

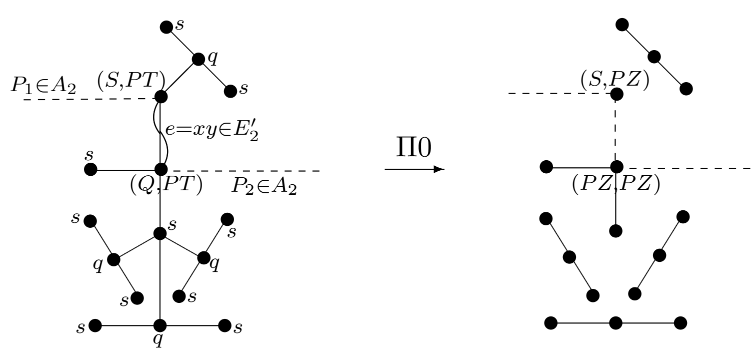

Рис. 3

В дальнейшем, если совершается преобразование, аналогичное П0 или П1, при котором к туру A_i добавляется E_i-ребро, инцидентное

Z_i- или PZ_i-вершине x, в результате чего степень x в A_i становится равной 3, то по умолчанию производится удаление ребра из цикла или цепи в A_i, содержащей x (аналогично тому, как это делается при преобразованиях П0 и П1). Если к туру A_i добавляется E_i-ребро, инцидентное S_i-вершине x, то подразумевается, что (s,q)-дерево в A_i, содержащее x, предварительно разбивается на цепи длины 2 и сингл x. Если же к A_i добавляется ребро $e \in E_i'$, то (s,q)-дерево тура A_{3-i}, содержащее e, по умолчанию разбивается с удалением ребра e. Заметим, что в результате такого разбиения три старших параметра качества тура A_{3-i}, т. е. k_{3-i}, s_{3-i} и γ_{3-i} не меняются. С точки зрения возможных улучшающих преобразований E_i'-ребро в большинстве случаев сохраняет свойства E_i^p-ребра, хотя формально таковым не является. Такое ребро нельзя добавлять к A_i, только если преобразование увеличивает лишь параметр τ_i, т. е. число вершин в (s,q)-деревьях тура A_i, поскольку в A_{3-i} это число может резко уменьшиться из-за разрушения (s,q)-дерева, содержащего e. Аналогично, при добавлении к A_i ребра $e \in E_i''$ на единицу уменьшается γ_{3-i} — число циклов в A_{3-i}. Такое улучшающее преобразование должно либо создавать хотя бы два других цикла, либо уменьшать какой-то из более старших параметров качества, т. е. k_1, k_2, s_1, s_2.

Из сказанного выше следует, что преобразование П0 является улучшающим, так как либо уменьшает k_i на 1 (если x и y принадлежат разным объектам тура A_i, см. рис. 3.), либо увеличивает γ_i на 1 (если x и y — концы одной и той же цепи в A_i). Очевидно, П1 уменьшает s_i на 1, а П2 увеличивает τ_i, не меняя более старших параметров качества. Во всех случаях значение q уменьшается.

Заметим, что если S_i-вершина соединена E_i^p-ребром с PZ_i-вершиной либо соединена E_i'-ребром с PZ_i^l-вершиной, то применимо одно из преобразований П1 или П2. В дальнейшем будем предполагать, что никакое улучшающее преобразование невозможно, а значит, будем считать, что таких рёбер не существует.

Пусть $a \in \{k_1, k_2, s_1, s_2, \gamma_1, \gamma_2, \tau_1, \tau_2\}$ — некоторый параметр качества. Через УП(a) будем обозначать улучшающее преобразование, уменьшающее a, если $a \in \{k_1, k_2, s_1, s_2\}$, и увеличивающее a, если $a \in \{\gamma_1, \gamma_2, \tau_1, \tau_2\}$.

2. Основная теорема

Основной результат статьи составляет следующая

Теорема 1. *Алгоритм $A_{4/3}$ за время $O(n^5)$ находит в полном n-вершинном графе G пару рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 таких, что $w_1(H_1) + w_2(H_2) \leqslant \frac{4}{3}OPT + 1$.*

Доказательство. Из описания алгоритма $A_{4/3}$, процедур $P_{T\to H}$, $P'_{T\to H}$ и лемм 2, 3 следует, что на выход алгоритма подаётся пара рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2 в G.

Докажем оценку точности. При $n \leqslant 13$ на шаге 0 алгоритма находится точное решение задачи 2-PSP(1,2)-min-2w. Пусть $n \geqslant 14$. Обозначим ранги построенных после шага 2 алгоритма туров A_1, A_2 через k_1 и k_2 соответственно, $k_1 \leqslant k_2$. Тогда на шаге 3 производный тур A'_i состоит в точности из k_i цепей, образованных E_i-рёбрами графа G, $i = 1, 2$.

Если $k_2 < 5$, то на шаге 4 каждый тур A'_1, A'_2 состоит из пяти цепей и дополняется до гамильтонова цикла процедурой $P_{T\to H}$. Из леммы 2 следует, что построенный на шаге 4 цикл H_i содержит все рёбра тура A'_i, а значит, в H_i имеется не более пяти рёбер веса 2, $i = 1, 2$. С учётом неравенств $n \geqslant 14$ и $OPT \geqslant 2n$, получаем оценку

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leqslant 2n + 10 \leqslant 1 + \frac{4}{3} \cdot 2n \leqslant 1 + \frac{4}{3} \cdot OPT.$$

Пусть $k_2 \geqslant 5$. Теперь тур A'_1 дополняется до H_1 одной из процедур $P_{T\to H}$ или $P'_{T\to H}$, а тур A'_2 дополняется до H_2 процедурой $P_{T\to H}$. Из лемм 2, 3 следует, что один из построенных циклов H_i содержит все рёбра тура A'_i, а второй цикл H_{3-i} — все рёбра A'_{3-i}, кроме, возможно, одного. Это означает, что всего в циклах H_1, H_2 имеется не более $k_1 + k_2 + 1$ рёбер веса 2, т. е. для веса полученного решения выполняется неравенство

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leqslant 2n + k_1 + k_2 + 1. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку тур B_i состоит из всех E_i-рёбер цикла H^*_i, $i = 1, 2$, для циклов оптимального решения выполнены равенства

$$w_i(H^*_i) = 2n - |B_i| = 2n - \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_{B_i}(v), \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Искомая оценка точности полученного решения записывается в виде

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leqslant \frac{4}{3}[(w_1(H^*_1) + w_2(H^*_2)] + 1. \tag{3}$$

С учётом (1) и (2) для выполнения (3) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$3(2n + k_1 + k_2) \leqslant 4\left[\left(2n - \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_{B_1}(v)\right) + \left(2n - \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_{B_2}(v)\right)\right],$$

что равносильно соотношению

$$3(k_1 + k_2) \leqslant \Big(5n - 2\sum_{v\in V} d_{B_1}(v)\Big) + \Big(5n - 2\sum_{v\in V} d_{B_2}(v)\Big)$$
$$= \sum_{v\in V}[(5 - 2d_{B_1}(v)) + (5 - 2d_{B_2}(v))]. \quad (4)$$

Пусть v — вершина графа G. Обозначим через $\mu^0(v) = \mu^0_1(v) + \mu^0_2(v)$ число, называемое *начальным зарядом* вершины v, где $\mu^0_i(v) = 5-2d_{B_i}(v)$ — её *начальный заряд относительно тура* B_i, $i = 1, 2$. Искомое неравенство (4) переписывается в виде

$$3(k_1 + k_2) \leqslant \sum_{v\in V} \mu^0(v). \quad (5)$$

Принимая во внимание, что в правой части (5) стоит сумма начальных зарядов всех вершин графа, а в его левой части — утроенная сумма рангов всех объектов, составляющих туры A_1 и A_2, для достижения требуемой оценки точности достаточно перераспределить заряды между вершинами графа G (не меняя их общей суммы) так, чтобы для конечного заряда $\mu(v)$ любой вершины v выполнялось неравенство $\mu(v) \geqslant \mu_1(v) + \mu_2(v)$, где $\mu_i : V \to R$ $(i = 1, 2)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{v\in P} \mu_i(v) \geqslant 3k(P) \quad (6)$$

для каждого объекта P тура A_i, $i = 1, 2$.

Определим функцию μ_i следующим образом. Назовём *специальными* ребро $e = xy \in B_i \cap A_{3-i}$ и вершину y, если e является хордой цикла в A_i и принадлежит цепи xyz длины 2 в A_{3-i}. Через $sp(v) \in \{1, 2\}$ обозначим число специальных рёбер из $B_i \cap A_{3-i}$, инцидентных специальной вершине v. Далее положим

$$\mu_i(v) = \begin{cases} 3, & \text{если } v \in S_i,\\ -3, & \text{если } v \in Q_i,\\ 3/2, & \text{если } v \in PT_i,\\ 0, & \text{если } v \in PZ_i,\\ 1, & \text{если } v \in Z_i \text{ и } v \text{ — не специальная вершина},\\ 1 - \frac{1}{2}sp(v), & \text{если } v \in Z_i \text{ и } v \text{ — специальная вершина}. \end{cases}$$

Лемма 4. *Для функций* μ_i, $i = 1, 2$, *выполняются неравенства* (6).

Доказательство. Если $P = x \dots y$ — нетривиальная цепь в A_i, то по определению функции μ_i имеем $\mu_i(x) = \mu_i(y) = 3/2$ и $\mu_i(v) = 0$ для любой внутренней вершины P. Ввиду равенства $k(P) = 1$ получаем

$$\sum_{v \in P} \mu_i(v) = 3/2 + 3/2 = 3k(P).$$

Если T — (s,q)-дерево ранга k в A_i, то в силу равенств $|S(T)| = 2k-1$, $|Q(T)| = k-1$ и $k(T) = k$ имеем

$$\sum_{v \in V(T)} \mu_i(v) = 3|S(T)| - 3|Q(T)| = 3k = 3k(T).$$

Пусть C — цикл длины $m \geqslant 3$ в A_i. Тогда $k(C) = 1$. Из определения специальной вершины следует, что в цикле C имеется не более $\lfloor m/2 \rfloor$ специальных вершин. Следовательно, не менее $\lceil m/2 \rceil$ вершин цикла имеют $\mu_i(v) = 1$. Это означает, что $\sum\limits_{v \in C} \mu_i(v) \geqslant 3 = 3k(C)$ при $m \geqslant 5$. Если $m = 4$, то в C нет специальных вершин со $sp(v) = 2$ и имеется не более двух специальных вершин со $sp(v) = 1$. Отсюда получаем $\sum\limits_{v \in C} \mu_i(v) \geqslant 1 + 1 + 1/2 + 1/2 = 3$. Наконец, при $m = 3$ цикл C не имеет специальных вершин, откуда получаем $\sum\limits_{v \in C} \mu_i(v) = 3$. Лемма 4 доказана.

Пусть $x \in V(G)$. Если в туре A_i вершина x принадлежит некоторой нетривиальной цепи, то будем обозначать цепь через P_i, а если циклу, то будем обозначать его через C_i, $i = 1, 2$. Пусть $x \in PZ_1$, $y \in T_1$, где вершина x принадлежит цепи $P_1 = \dots uxv \dots$ в A_1, $y \notin \{u, v\}$. Ребро $yt \in B_2^p$ будем называть *особым* для x, если $t \in \{u, v\}$ и $tx \in A_1 \cap B_2$. Из этого определения следует, что вершина y инцидентна не более чем одному особому для x ребру, так как в противном случае в B_2 имеется 4-цикл (u, x, v, y).

Определим следующие правила перераспределения зарядов между вершинами графа G.

R1. Пусть $x \in PZ_1$, $y \in PT_1$, $y \notin Q_2$, $xy \in B_1 \setminus A_1$ и если $P_2 = yxz$, то не существует ребра $xt \in B_2 \setminus A_2$ такого, что $t \in S_2 \cup PT_2$. Тогда x отдаёт y заряд $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, где $\alpha = 1$, если P_1 — цепь длины 2 и выполнено одно из следующих условий:

(a) $xy \in B_1^p \cup B_1'$;

(b) $xy \in A_2 \cap B_1$, $x, y \in PZ_2$ и в A_1 имеется цепь ywz, где $yw \in B_2$, $w \in S_2$ и w инцидентна B_1^p-ребру, ведущему в PT_1-вершину.

R2. Пусть $x \in PZ_1$, $y \in S_1$, $xy \in A_2 \cap B_1$ и $P_2 \neq yx\ldots$. Тогда x отдаёт y заряд $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, где $\alpha = 1$ в следующих случаях:

(a) $P_2 = xyz$ и при y имеется неособое для x ребро $yt \in B_2^p \cup B_2'$, где $t \in PT_2 \cup S_2$;

(b) $xy \in B_1'$ и y — (S,S)-вершина;

(c) $xy \in B_1''$ и y — (S,Z)-вершина.

R3. Пусть $x \in PZ_1$, $y \in T_1$, $xy \in A_2 \cap B_1$ и $P_2 = xyz$. Тогда x передаёт y заряд $\frac{1}{2}$, если при y имеется неособое для x ребро $yt \in B_2^p \cup B_2''$, $t \in PT_2 \cup S_2$.

R4. Пусть $P_1 = xyz$, $xy \in A_1^p$. Тогда x передаёт y заряд $\frac{1}{2}$, если y инцидентна $B_1^p \cup B_1''$-ребру, ведущему в $PT_1 \cup S_1$-вершину.

R5. Пусть $xy \in A_1 \cap B_1$, $yz \in A_2 \cap B_1$ и $P_1 = yx\ldots z$. Тогда x передаёт y заряд $\frac{1}{2}$ в следующих случаях:

(a) y — (PT,Z)-вершина;

(b) y — (PT,PZ)-вершина и существует ребро $yt \in B_2^p$ такое, что $t \in PT_2$ и тур A_2 не содержит цепи $t\ldots yz\ldots$.

Заметим, что вершина x не может передавать заряд одновременно по двум рёбрам из $A_1 \cap B_1$ по правилу R5, так как в этом случае $P_1 = yxz$ и в B_1 существует 3-цикл (x,y,z).

R6. Пусть x — (PT,T)-вершина, $xy \in A_1 \cap B_2$. Тогда x передаёт y заряд $\frac{1}{2}$ в следующих случаях:

(a) y — (PZ,S)-вершина, причём если $P_1 = xyzz'$, то $xz \notin B_1^p$;

(b) $P_1 = xyz$, $P_2 = x\ldots y$ и y инцидентна B_1^p-ребру, ведущему в PT_1-вершину.

R7. Пусть $x \in Q_1$, $y \in T_1$, $xy \in B_1$. Тогда x отдаёт y заряд $\frac{3}{2}$.

Формулировки правил R1–R7 симметричны для туров A_i, B_i, $i = 1,2$.

3. Завершение доказательства теоремы 1

Для доказательства оценки точности остаётся доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Если существует вершина v такая, что $\mu(v) < \mu_1(v)+\mu_2(v)$, то на шаге 2 алгоритма применимо некоторое улучшающее преобразование туров A_1, A_2.*

Доказательство. Прежде всего установим следующие свойства перераспределения зарядов в графе G.

Утверждение 1. *Пусть $v \in S_1$, $zv \in B_1$. Если $zv \notin A_2$, то v получает заряд $\frac{3}{2}$ от z по правилу R7. Если $zv \in B_1''$, то v получает не менее 1 от z*

по R7 *или* R2(c). *Если* $zv \in B_1'$, *то в случае, когда* v – (S,S)*-вершина, она получает не менее* 1 *от* z *по* R2 *или* R7, *а когда* v — (S,Q)*-вершина, то* v *получает не менее* $\frac{1}{2}$ *от* z *по* R2 *или* R7.

Доказательство. Пусть $v \in S_1$, $zv \in B_1$. Если $zv \in A_1$, то ребро zv принадлежит (s,q)-дереву в туре A_1, откуда следует, что $z \in Q_1$ и z передаёт v заряд $\frac{3}{2}$ по правилу R7. Если $zv \in B_1^p$, то снова получаем $z \in Q_1$, иначе, добавляя ребро zv к A_1, выполняем одно из улучшающих преобразований П0 (если $z \in T_1$), П1 ($z \in PZ_1^l$) или П2 ($z \in PZ_1^s$). Следовательно, v получает $\frac{3}{2}$ от z по R7.

Пусть $zv \in B_1'' \cup B_1'$. В туре A_2 ребро zv принадлежит некоторому циклу либо (s,q)-дереву T_2. Заметим, что $z \in Q_1 \cup PZ_1^s$, иначе снова выполнимо одно из преобразований П0 или П1. Если $z \in Q_1$, то z передаёт v заряд $\frac{3}{2}$ по R7. Пусть $z \in PZ_1^s$. Если $zv \in B_1''$, то v получает 1 от z по правилу R2(c). Если же $zv \in B_1'$, то в случае, когда v — (S,S)-вершина, она получает 1 от вершины z по R2(b), а если v — (S,Q)-вершина, то v получает $\frac{1}{2}$ от z по R2. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Если* $v \in PT_1$, $v \notin Q_2$, $zv \in B_1^p \cup B_1'$, *то* v *получает не менее* $\frac{1}{2}$ *от* z *по одному из правил* R1 *или* R7. *При этом если* $z \in PZ_1^s$, *то* v *получает* 1 *от* z.

Доказательство. Пусть $v \in PT_1$, $v \notin Q_2$ и $zv \in B_1^p \cup B_1'$. Тогда $z \in PZ_1 \cup Q_1$, иначе, добавляя ребро zv к A_1, выполняем П0. Следовательно, v получает от z заряд $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ по R1 или R7, где $\alpha = 1$ в случае $z \in PZ_1^s$ согласно R1(a). Утверждение 2 доказано.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in V$. Обозначим B_1-рёбра, инцидентные v, через $vz_1, \ldots, vz_\lambda$, а B_2-рёбра при v — через $vt_1, \ldots, vt_\mu$ $(\lambda, \mu \in \{0,1,2\})$.

Для доказательства леммы 5 достаточно рассмотреть следующие 15 случаев, соответствующих различным типам вершин графа G.

Случай 1. v — (S,S)-вершина и $\mu(v) < \mu_1(v) + \mu_2(v) = 3 + 3 = 6$.

Вершина v не отдаёт заряд ни по одному из правил R1–R7. Без потери общности можно считать, что $d_{B_1}(v) = 2$, $d_{B_2}(v) \geqslant 1$, иначе $\mu(v) \geqslant \mu^0(v) \geqslant 3 + 3 = 1 + 5 = 6$. Согласно утверждению 1 по каждому B_i-ребру вершина v получает не менее 1, $i = 1,2$. Если $d_{B_2}(v) = 1$, то $\mu(v) \geqslant \mu^0(v) + 3 \times 1 = 1 + 3 + 3 > 6$. Если $d_{B_2}(v) = 2$, то

$$\mu(v) \geqslant \mu^0(v) + 4 \times 1 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Случай 2. v — (S,PT)-вершина и $\mu(v) < 3 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Вершина v может отдавать заряд только один раз по правилу R4 или R6(a). Если $d_{B_1}(v)+d_{B_2}(v) \leqslant 2$, то $\mu(v) \geqslant 6-\frac{1}{2} > 4\frac{1}{2}$. Пусть $d_{B_1}(v)+d_{B_2}(v) \geqslant 3$. Согласно утверждениям 1 и 2 вершина v получает заряд $\frac{3}{2}$ по каждому инцидентному ребру из $B_1 \setminus A_2$ и не менее $\frac{1}{2}$ по каждому инцидентному ребру из $B_2 \setminus A_2$. Поскольку v инцидентна только одному A_2-ребру, в случае $d_{B_1}(v)+d_{B_2}(v)=3$ при v имеется хотя бы два ребра из $(B_1 \cup B_2) \setminus A_2$, по каждому из которых v получает не менее $\frac{1}{2}$. В этом случае $\mu(v) \geqslant 1+3-\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$. Если при v имеется пара рёбер из $B_1 \setminus A_2$, то согласно утверждению 1 имеем $\mu(v) \geqslant 1+1-\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$. Таким образом, v инцидентна рёбрам $vz_1 \in B_1 \cap A_2$, $vz_2 \in B_1 \setminus A_2$, а также $vt_1, vt_2 \in B_2 \setminus A_2$. В силу условия $vz_1 \in B_1 \cap A_2$ вершина v не отдаёт заряда по R4. Если v не делает передачи заряда по R6(a), то $\mu(v) \geqslant 2+\frac{3}{2}+2\times\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$. Пусть v отдаёт заряд (S,PZ)-вершине z_1 по R6(a). Если v получает не менее 1 по одному из рёбер vt_1 или vt_2, то $\mu(v) \geqslant 2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$. Следовательно, t_1, t_2 — PZ-вершины длинных цепей в A_2. Без потери общности можно считать, что $P_2 \neq vz_1t_1x$. В этом случае после удаления ребра vz_1 из A_2 вершина t_1 остаётся PZ^l-вершиной в A_2. Добавляя ребро vz_1 к A_1 (и удаляя его из A_2), а vt_1 — к A_2, уменьшаем параметры k_1 и s_1 (за счёт соединения S_1-вершин v и z_1), а k_2 увеличиваем на единицу, не изменяя s_2, т. е. выполняем улучшающее преобразование.

Случай 3. v — (S,Z)-вершина и $\mu(v) < 3+1 = 4$.

Вершина v не отдаёт заряда. Следовательно, $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, иначе $\mu(v) = \mu^0(v) \geqslant 3+1 = 4$. Согласно утверждению 1 по каждому B_1-ребру (которое либо принадлежит $B_1 \setminus A_2$, либо является B_1''-ребром) вершина v получает заряд не менее 1. Таким образом, $\mu(v) \geqslant 2+2\times 1 = 4$.

Утверждение 3. *Пусть v отдаёт заряд вершине t_i по правилу R5. Если $vt_{3-i} \in B_2^p \cup B_2' \cup B_2''$, то по этому ребру v не отдаёт заряда.*

Доказательство. Пусть v отдаёт заряд вершине t_1 по R5. Тогда $P_2 = t_1v\ldots w$, ребро $t_1w \in A_1 \cap B_2$ принадлежит в A_1 циклу C либо цепи P, и в последнем случае существует ребро $t_1t \in B_1^p$, где $t \in PT_1$ и $P \neq t\ldots t_1w\ldots$. Если v отдаёт заряд по ребру $vt_2 \in B_2^p \cup B_2' \cup B_2''$, то это происходит по одному из правил R1 или R2, в частности, $t_2 \in PT_2 \cup S_2$. Заметим, что $t_2 \neq w$, так как в B_2 нет 3-цикла (v, t_1, w).

Если v передаёт заряд по R5(a), то добавим к A_2 рёбра vt_2 и t_1w. Это преобразование является улучшающим, так как в случае $vt_2 \notin C$ уменьшается параметр k_2 (объединяются две цепи в A_2), а в случае, когда $vt_2 \in C$, $t_2 \in S_2$, уменьшается s_2 (сингл t_2 присоединяется к цепи P_2

в A_2, а в A_1 цикл C распадается на две нетривиальные цепи). Пусть v передаёт заряд по R5(b). В этом случае существует ребро $t_1t \in B_1^p$, $t \in PT_1$. Добавим к A_2 рёбра vt_2, t_1w, удаляя vt_1, а к A_1 добавим t_1t, уменьшив k_2. Утверждение 3 доказано.

Случай 4. Пусть v — (S, PZ)-вершина и $\mu(v) < 3 + 0 = 3$.

Вершина v может отдавать вершине t_i не более 1 по R1, либо $\frac{1}{2}$ по R2 или R5, $i = 1, 2$. Заметим, что если vt_i — B_2'-ребро, то $t_i \in Q_1$. В этом случае v отдаёт t_i заряд $\frac{1}{2}$ по R2 (а не 1 по R2(b)), если $t_i \in S_2$, и не передаёт заряда по R1, если $t_i \in PT_2$.

Допустим, что v отдаёт 2×1 по R1. Тогда $v \in PZ_2^s$, $vt_1, vt_2 \in B_2^p$ и t_1, $t_2 \in PT_2$. Докажем, что от каждой вершины z_i, $i = 1, 2$, вершина v получает суммарный заряд $\frac{3}{2}$ по правилу R7 либо по R3 и R2(a). Действительно, в противном случае имеем $z_i \notin Q_1$ и согласно утверждению 1 $vz_i \in A_2$ и $P_2 = z_ivx$. Если $z_i \in PZ_1$, то хотя бы одно из рёбер vt_1, vt_2 не является особым для z_i, поэтому z_i отдаёт v заряд 1 по R2(a) и $\frac{1}{2}$ по R3. Следовательно, $z_i \in T_1$ и выполнимо УП(k_1): добавляем vz_i к A_1, vt_1 — к A_2. Теперь $\mu(v) \geqslant 5 + 1 - 2 \times 1 > 3$ при $d_{B_1}(v) = 0$, $\mu(v) \geqslant 3 + 1 - 2 \times 1 + \frac{3}{2} > 3$ при $d_{B_1}(v) = 1$ и $\mu(v) \geqslant 1 + 1 - 2 \times 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 3$ при $d_{B_1}(v) = 2$. Таким образом, можно считать, что v отдаёт в сумме заряд не более $\frac{3}{2}$.

Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) < 3$, то $\mu(v) \geqslant 6 - \frac{3}{2} > 3$. Допустим, что $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) = 3$. Тогда v инцидентна ребру $vz_1 \in B_1$. Если $v \in PZ_2^l$, то v отдаёт не более $2 \times \frac{1}{2}$, и $\mu(v) \geqslant 4 - 1 = 3$. Пусть $v \in PZ_2^s$. Покажем, что v получает заряд от z_1. Действительно, при $vz_1 \notin A_2$ это следует из утверждения 1, а при $vz_1 \in A_2$ передача происходит по правилу R2, если $z_1 \in PZ_1$, по R6(a), если $z_1 \in T_1$, и по R7, если $z_1 \in Q_1$. Следовательно, $\mu(v) \geqslant 4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 3$. Таким образом, остаётся рассмотреть случай $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$.

Утверждение 4. *Вершина v получает по B_1-рёбрам суммарный заряд не менее 1. При этом если v не получает заряда от вершины z_i, то $P_2 = z_ivxy$, $z_i \in T_1$ и $z_ix \in B_2^p$. Если v отдаёт заряд по R2, то v получает по каждому B_1-ребру не менее 1.*

Доказательство. Если v получает заряд от каждой из вершин z_1, z_2, то в сумме v получает не меньше 1. Допустим, v не получает заряда от z_1 ни по одному из правил R2, R6(a) и R7. Тогда $vz_1 \in A_2$ по утверждению 1 и z_1 — (T, PZ)- или (T, PT)-вершина, причём в последнем случае $P_2 = z_1vxy$ и $z_1x \in B_2^p$. В первом случае, добавляя ребро vz_1 к A_1, уменьшаем s_1. Во втором случае если $z_2 \in Q_1$, то v получает $\frac{3}{2}$ от z_2 по R7. Если же $z_2 \notin Q_1$, то к A_1 добавим ребро vz_2, а из A_2 удалим vx и добавим z_1x. При этом если $z_2 \in T_1$, то уменьшится k_1, если $z_2 \in PZ_1^l$, то уменьшится s_1, а при $z_2 \in PZ_1^s$ увеличится τ_1 (за счёт добавления цепи длины 2, содержащей z_2, к (s,q)-дереву, содержащему v), остальные параметры качества не изменятся.

Теперь предположим, что v отдаёт заряд вершине $t_1 \in S_2$ по R2. Тогда P_2 — цепь длины 2, $vt_1 \in B_2'$, t_1 —(Q,S)-вершина, иначе, добавляя vt_1 к A_2, выполняем П1 или П2. Если $vz_1 \notin A_2$, то v получает $\frac{3}{2}$ от z_1 по утверждению 1. Пусть $vz_1 \in A_2$, т. е. $P_2 = z_1vx$. Если $z_1 \notin T_1$, то v получает от z_1 либо 1 по R2(a), либо $\frac{3}{2}$ по R7, если же $z_1 \in T_1$, то выполнимо УП(k_1): добавляем vz_1 к A_1, vt_1 — к A_2. Утверждение 4 доказано.

Если вершина v не отдаёт заряда, то $\mu(v) \geqslant 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$ по утверждению 4.

Допустим, что v отдаёт 1 вершине t_1 по R1. Тогда P_2 — цепь длины 2, $vt_1 \in B_2^p$, $t_1 \in PT_2$. Покажем, что v получает $\frac{3}{2}$ хотя бы по одному B_2-ребру. С учётом утверждения 1 достаточно рассмотреть случай $P_2 = z_1vz_2$. Если, скажем, $z_1 \in T_1$, то выполнимо УП(k_1): добавляем vz_1 к A_1, vt_1 — к A_2. Следовательно, $z_1, z_2 \in PZ_1 \cup Q_1$. Без потери общности $z_1t_1 \notin B_2$, в частности, ребро vt_1 не является особым для z_1. Поэтому v получает от z_1 либо $\frac{1}{2}+1$ по R3 и R2(a), либо $\frac{3}{2}$ по R7. По утверждению 4 вершина v также получает заряд от z_2. Если v не отдаёт заряда t_2, то $\mu(v) \geqslant 2-1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 3$. Случай, когда v отдаёт t_2 заряд 1 по R1, рассмотрен выше. Из утверждения 3 следует, что v не может отдавать t_2 заряд по R5. Наконец, пусть v отдаёт t_2 заряд $\frac{1}{2}$ по R2. Согласно утверждению 4 вершина v получает не менее 1 от z_2, а значит, $\mu(v) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$.

Таким образом, можно считать, что v отдаёт не более $2 \times \frac{1}{2}$. По утверждению 4 если v отдаёт заряд по R2, то v получает не менее 2×1, и $\mu(v) \geqslant 2 - 1 + 2 \times 1 = 3$. Из утверждения 1 следует, что на каждую передачу заряда по R5 вершина v получает $\frac{3}{2}$ по R7. Следовательно, v отдаёт $\frac{1}{2}$ по R1, скажем, вершине t_1. Тогда P_2 — длинная цепь, $vt_1 \in B_2^p$, $t_1 \in PT_2$. Покажем, что v получает $\frac{3}{2}$ по R7. В противном случае из утверждения 1 следует, что $P_2 = \ldots z_1vz_2 \ldots$. Без потери общности $z_1 \in PZ_2$, $P_2 \neq \ldots z_1vz_2 \ldots t_1$. Если $z_1 \notin Q_1$, то добавляем vz_1 к A_1, vt_1 — к A_2. При этом если $z_1 \in T_1$, то уменьшается k_1, если $z_1 \in PZ_1^l$, то — s_1, а если $z_1 \in PZ_1^s$, то увеличивается τ_1. Следовательно, $z_1 \in Q_1$ и z_1 передаёт v заряд $\frac{3}{2}$ по R7. Если v также получает заряд от z_2, то $\mu(v) \geqslant 2-2\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2} = 3$. В противном случае согласно утверждению 4 имеем $P_2 = z_2vxy$, $z_2 \in T_1$, $z_2x \in B_2^p$. Если $t_1 \neq y$, то добавляя к A_2 рёбра vt_1, z_2x и удаляя vx, уменьшаем k_2; в противном случае, добавляя к A_1 ребро vz_2 и заменяя в A_2 цепь P_2 на $vyxz_2$, уменьшаем k_1.

Случай 5. v — (S,Q)-вершина и $\mu(v) < 3 + (-3) = 0$.

Вершина v отдаёт не более $\frac{3}{2}$ по каждому B_2-ребру по правилу R7. При этом по каждому B_1-ребру v получает не менее $\frac{1}{2}$ согласно утверждению 1. Таким образом, $\mu(v) \geqslant 4 - 2 \times \frac{3}{2} > 0$ при $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leqslant 3$ и $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ при $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$.

Случай 6. v — (Z, PT)-вершина и $\mu(v) < 1 + \frac{3}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Вершина v может отдавать заряд только один раз по R4 или R6(a). Пусть $C_1 = \ldots xvy \ldots$, $P_2 = vw \ldots$. Можно считать, что $d_{B_1}(v){=}d_{B_2}(v){=}2$, иначе $\mu(v) = 4 - \frac{1}{2} > 2\frac{1}{2}$. Если v не получает заряда ни по одному из правил R1, R5(a), R7, то из утверждения 2 следует, что $\{t_1, t_2\} \subset \{x, y, w\}$. При этом можно считать, что $t_1 = x \in T_2$. Если $P_2 \neq vw \ldots x$, то добавляя vx к A_2, уменьшаем k_2. Пусть $P_2 = vw \ldots x$. Если $t_2 = w$, то v получает заряд от t_2 по правилу R5(a). Если же $t_2 = y \in T_2$, то поскольку $P_2 \neq vw \ldots y$, добавление ребра vy к A_2 приводит к уменьшению k_2.

Следовательно, v получает заряд. Если при этом v не отдаёт заряда, то $\mu(v) \geqslant 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. Если v отдаёт заряд по R4, то P_2 — цепь длины 2, $vw \in A_2^p$ и существует ребро $wt \in B_2^p \cup B_2''$, $t \in PT_2 \cup S_2$, а если — по R6(a), то $w \in \{z_1, z_2\}$ — (S, PZ)-вершина. В любом случае v не получает заряда по R5(a), а значит, получает его по R1. Если v дважды получает по R1, то $\mu(v) \geqslant 2 - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. В противном случае можно считать, что $P_2 = vw \ldots x$, $x \in \{t_1, t_2\}$. Если v отдаёт заряд по R6(a), то выполнимо УП(k_1): добавляем vw к A_1, vx — к A_2. Пусть v отдаёт заряд по R4. Добавим к A_2 рёбра vx, wt и удалим vw. При этом если $wt \notin C_1$, то уменьшится параметр k_2, а если $wt \in C_1$, $t \in S_2$, то уменьшится s_2 (в результате соединения сингла t с цепью P_2 при одновременном разбиении цикла C_1 на две нетривиальные цепи).

Случай 7. v — (Z, Z)-вершина. Тогда $\mu(v) \geqslant 1 + 1 = 2$, так как v не отдаёт заряда.

Случай 8. v — (Z, PZ)-вершина и $\mu(v) < \mu_1(v) + 0$, где

$$\mu_1(v) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} sp(v), & \text{если } v \text{ — специальная вершина,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вершина v может отдавать заряд только по B_2-рёбрам, причём по каждому такому ребру v передаёт не более 1 по R1 или R2 либо $\frac{1}{2}$ по R5. Следовательно, $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, иначе $\mu(v) \geqslant 4 - 2 \times 1 > 1 \geqslant \mu_1(v)$. Если v отдаёт в сумме не более 1, то $\mu(v) \geqslant 2 - 1 = 1$. Поэтому v отдаёт заряд дважды и хотя бы раз заряд 1 по R1 или R2(c), скажем, вершине t_1. Тогда $P_2 = xvy$ — цепь длины 2, и в первом случае имеем $vt_1 \in B_2^p$, $t_1 \in PT_2$, а во втором — $vt_1 \in B_2''$, $t_1 \in S_2$. Кроме того, из утверждения 3 следует, что v не отдаёт заряда по R5. Следовательно, $t_2 \in PT_2 \cup S_2$ и v отдаёт заряд вершине t_2 по R1 или R2(c).

Сначала рассмотрим случай $vt_2 \in B_2^p \cup B_2''$. Покажем, что если какое-то из рёбер vx, vy не является специальным, то v получает не менее $\frac{1}{2}$ по этому ребру. Действительно, пусть vx — неспециальное ребро. Если $vx \in A_2^p$, то v получает $\frac{1}{2}$ от x по R4. Допустим, что $vx \in A_2 \cap B_1$, $x \notin C_1$. Если $x \in Q_1$, то x передаёт v $\frac{3}{2}$ по R7, а если $x \in PZ_1$, то $\frac{1}{2}$ по R3, поскольку по крайней мере одно ребро vt_1 или vt_2 не является особым для x. Наконец, при $x \in T_1$ добавление vx к A_1 и vt_1 к A_2 приводит к уменьшению k_1 (поскольку $x \notin C_1$). Таким образом, при $vt_2 \in B_2^p \cup B_2''$ имеем $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 + (2 - sp(v)) \times \frac{1}{2} = \mu_1(v)$.

Пусть $vt_2 \notin B_2^p \cup B_2''$, т. е. $vt_2 \in B_2 \cap A_1$, $t_2 \in PT_2$. В этом случае v передаёт t_2 заряд $\frac{1}{2}$ по R1. Если v — специальная вершина, т. е. $sp(v) > 0$, то $\mu(v) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geqslant \mu_1(v)$. Пусть v — неспециальная вершина. Аналогично случаю $vt_2 \in B_2^p \cup B_2''$ устанавливается, что v получает заряд хотя бы по одному из (неспециальных) рёбер vx, vy, поскольку ребро vt_1 не может быть особым одновременно для x и y в силу отсутствия в B_2 тройки рёбер t_1v, t_1x, t_1y. Следовательно, $\mu(v) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mu_1(v)$.

Случай 9. v — (Z, Q)-вершина и $\mu(v) < 1 + (-3) = -2$.

Вершина v отдаёт не более $2 \times \frac{3}{2}$ по R7. Следовательно, $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{3}{2} > -2$.

Случай 10. v — (PT, PT)-вершина и $\mu(v) < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.

Вершина v отдаёт не более $2 \times \frac{1}{2}$ по R4 и/или R6. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leqslant 3$, то $\mu(v) \geqslant 4 - 2 \times \frac{1}{2} = 3$. Следовательно, $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, и при v имеется не менее двух B_i^p-рёбер, по каждому из которых v получает не менее $\frac{1}{2}$ по утверждению 2. Таким образом, v отдаёт заряд, иначе $\mu(v) \geqslant 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 3$.

Утверждение 5. *Если v отдаёт заряд по ребру из $A_i \cap B_{3-i}$ по правилу* R6, *то v получает не менее* 1 *хотя бы по одному B_i^p-ребру,* $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть v отдаёт заряд по R6 вершине z_1. Тогда $P_2 = vz_1 \ldots$. Следовательно, при v имеется B_2^p-ребро, скажем, vt_1. Если по нему v получает лишь $\frac{1}{2}$ по R1, то $t_1 \in PZ_2^l$. Если v отдаёт z_1 заряд по R6(a), то z_1 — (S, PZ)-вершина и $P_2 \neq vz_1t_1w$. В этом случае выполнимо УП(s_1): добавляем vz_1 к A_1, vt_1 — к A_2. Пусть v отдаёт заряд по R6(b). Тогда $P_1 = v \ldots z_1$, $P_2 = vz_1w$ и существует ребро $z_1t \in B_2^p$, где $z \in PT_2$. Добавляя vz_1 к A_1, vt_1 и z_1t к A_2, увеличиваем γ_1. Утверждение 5 доказано.

Если вершина v отдаёт заряд только по R6, причём делает $r \in \{1,2\}$ таких передач, то согласно утверждениям 2 и 5 имеем

$$\mu(v) \geqslant 2 - r \times 1/2 + r \times 1 + (2-r) \times 1/2 = 3.$$

Пусть v отдаёт заряд по R4. В этом случае при v имеется не менее трёх B_i^p-рёбер. Если v отдаёт заряд только один раз, то по утверждению 2 имеем $\mu(v) \geqslant 2 - \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 3$. Если v отдаёт заряд второй раз по R6, то $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 3$ согласно утверждению 5. Наконец, если v дважды отдаёт заряд по R4, то v инцидентна четырём B_i^p-рёбрам и $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 3$.

Случай 11. v — (PT, PZ)-вершина и $\mu(v) < \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$.

По каждому B_2-ребру v передаёт не более 1 по R1 или R2, либо $\frac{1}{2}$ по R5. Также v может отдавать $\frac{1}{2}$ по A_1-ребру по одному из правил R3 или R4. Пусть $P_1 = vw\ldots$, $P_2 = \ldots xvy\ldots$. Можно считать, что $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, иначе $\mu(v) \geqslant 4 - 2 \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(a) Пусть v отдаёт $\frac{1}{2}$ по R5. Без потери общности $vt_1 = vx \in A_2 \cap B_2$ и $P_2 = xvy\ldots$. Если v больше не отдаёт заряда, то $\mu(v) \geqslant 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. В противном случае из утверждения 3 следует, что кроме передачи по R5 вершина v отдаёт заряд только вершине w по правилам R1–R4. Это означает, что $vw \notin B_1$ и при v имеется B_1^p-ребро vz_1, по которому v получает не менее $\frac{1}{2}$ по утверждению 2. Следовательно, v отдаёт w не менее 1, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. В этом случае v отдаёт заряд вершине w по R1 и R3, либо по R2 (не только по R3 или R4). Следовательно, $w = t_2 \in T_2$, P_1 — цепь длины 2 и существует неособое для v ребро $wt \in B_1^p \cup B_1' \cup B_1''$, где $t \in S_1 \cup PT_1$.

Покажем, что v получает заряд от z_2 по R1 или R7. В противном случае из правил R1, R7 и утверждения 2 следует, что $z_2 = y \in T_1$. Так как ребро wt — неособое для v, то $t \neq y$ и выполнимо УП(k_1): добавляем vy, wt к A_1 и vw к A_2. Следовательно, v отдаёт w заряд $1 + \frac{1}{2}$ по R2 и R3, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - \frac{1}{2} - 1 + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Тогда $w \in S_2$, $wt \in B_1^p$, $t \in PT_1$. Если v получает от z_1 не менее 1, то $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Иначе из R1 и R7 следует, что $z_1 \in PZ_1^l$. Добавим vw к A_2, wt и vz_1 к A_1. При этом если P_2 — длинная цепь, то уменьшится s_2, иначе увеличится τ_2.

Далее можно считать, что вершина v не отдаёт заряда по правилу R5.

Утверждение 6. *Если вершина v отдаёт заряд по* R3 *или* R4*, либо* 1 *по* R2*, то v дважды получает по* R1 *и/или по* R7.

Доказательство. Пусть v отдаёт $\frac{1}{2}$ по R3 или R4, либо 1 по R2(a) вершине w и не получает заряда от z_1. Тогда $P_1 = vwz$, $vw \notin B_1$ (т. е.

$w \notin \{z_1, z_2\}$) и существует ребро $wt \in B_1^p \cup B_1' \cup B_1''$, где $t \in PT_1 \cup S_1$. Согласно R1 и утверждению 2 будем считать, что $z_1 = x \in T_1$.

Если v отдаёт w только $\frac{1}{2}$, то v также отдаёт заряд по R1, скажем, вершине $t_1 \in PT_2$, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Таким образом, $vt_1 \in B_2^p$. Если $P_2 \neq \ldots z_1 v \ldots t_1$, то в случае $x \neq z$ добавим vx к A_1, vt_1 к A_2, а при $x = z$ добавляем vx и wt к A_1, vt_1 к A_2. В обоих случаях уменьшается параметр k_1. Пусть $P_2 = \ldots z_1 v \ldots t_1$. В частности, P_2 — длинная цепь. Если v не получает заряда от z_2, то аналогично случаю с вершиной z_1 имеем $z_2 = y \in T_1$. Так как $P_2 \neq \ldots z_2 v \ldots t_1$, применимо одно из указанных выше улучшающих преобразований УП(k_1) (с заменой z_1 на z_2). Следовательно, v получает заряд от z_2. Если v не отдаёт заряда вершине t_2, то $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Если же v отдаёт $\frac{1}{2}$ вершине t_2 по R1, то поскольку $P_2 \neq \ldots z_1 v \ldots t_2$, снова применимо одно из указанных выше преобразований (с заменой t_1 на t_2).

Пусть v отдаёт w в сумме не менее 1. Тогда это происходит по правилам R1–R3, и без потери общности $w = t_1 \in PT_2 \cup S_2$. Кроме того, можно считать, что wt — неособое ребро для v, иначе v не отдаёт заряда w по R3 и отдаёт лишь $\frac{1}{2}$ по R2 или R1. Таким образом, $t \neq x$. Если $P_2 \neq \ldots xv \ldots w$, то добавляем vx и wt к A_1, vw к A_2, уменьшая k_1. Пусть $P_2 = \ldots xv \ldots w$. Тогда $w \in PT_2$ и v отдаёт w заряд $2 \times \frac{1}{2}$ по R1 и R3. Если v не получает заряда от z_2, то $z_2 = y \in T_1$. В этом случае, добавляя vy, wt к A_1 и vw к A_2, уменьшаем k_1. Следовательно, v получает не менее $\frac{1}{2}$ от z_2. Если v не отдаёт заряда t_2, то $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Иначе $vt_2 \in B_2^p$ и v отдаёт $\frac{1}{2}$ вершине $t_2 \in PT_2$ по R1. В этом случае, добавляя к A_1 ребро vx (а если $x = z$, то еще и wt), а vt_2 к A_2, уменьшаем k_1. Утверждение 6 доказано.

(b) Пусть v отдаёт $\frac{1}{2}$ по ребру $vw \in A_1^p$ по правилу R4. Согласно утверждению 6 вершина v получает не менее $2 \times \frac{1}{2}$ по R1 и/или по R7. Если P_2 — длинная цепь или v не отдаёт заряда какой-то из вершин t_1, t_2, то v передаёт на t_1 и t_2 в сумме не более $2 \times \frac{1}{2} = 1$ по R1, а значит, $\mu(v) \geqslant 2 - 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $P_2 = xvy$ — цепь длины 2 и $vt_1, vt_2 \in B_2^p$, $t_1, t_2 \in PT_2$. Покажем, что v получает заряд от вершин x, y (дополнительно к $2 \times \frac{1}{2}$, полученным по утверждению 6). Действительно, если $vx \notin B_1$, то $vx \in A_2^p$ и v получает $\frac{1}{2}$ от x по R4. Пусть $vx \in A_2 \cap B_1$. Можно считать, что $x = z_1$ и $x \in PZ_1 \cup Q_1$ согласно утверждению 6. Если $x \in Q_1$, то x передаёт v заряд $\frac{3}{2}$, а не $\frac{1}{2}$. Если $x \in PZ_1$, то хотя бы одно из рёбер vt_1, vt_2 не является особым для x, поэтому v получает $\frac{1}{2}$ от x по R3. Во всех случаях имеем $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 - \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(c) Пусть v не отдаёт заряда по R4, но отдаёт $\frac{1}{2}$ по R3 вершине $w = t_1$.

Тогда $P_1 = vwz$, $w \in T_2$, и существует неособое для v ребро $wt \in B_1^p \cup B_1''$, где $t \in PT_1 \cup S_1$. По утверждению 6 вершина v получает заряд дважды по R1 и/или R7. Если v отдаёт заряд только вершине w по R1–R3, то $\mu(v) \geqslant 2 - \frac{1}{2} - 1 + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, v отдаёт заряд по R1 вдоль ребра $vt_2 \in B_2^p$ вершине $t_2 \in PT_2$.

Предположим, что $P_2 = xvy$ — цепь длины 2. Если v получает заряд от вершин x, y по R3, R4 или R7, то $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 - \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. В противном случае заряд не передаётся по R3, скажем, от вершины x из-за того, что ребро vt_2 является особым для x, т. е. $vx \in B_1$, $x \in PZ_1$, $xt_2 \in A_1 \cap B_2$. В этом случае, добавляя vx и wt к A_1 и vw и xt_2 к A_2, уменьшаем k_2.

Пусть P_2 — длинная цепь. Тогда $w \in S_2$, иначе согласно R1, R3 и утверждению 6 имеем $\mu(v) \geqslant 2-3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $wt \in B_1^p$, $t \in PT_1$. Покажем, что v получает не менее 1 от z_1 или z_2. Так как P_2 — длинная цепь, можно считать, что $P_2 \neq z_1vx\ldots$, $P_2 \neq z_1vy\ldots$, $z_1 \in PZ_1$. Если $z_1 \in PZ_1^l$, то добавляя vz_1, wt к A_1 и vw к A_2, уменьшаем s_2. Если $z_1 \in PZ_1^s$, то v получает 1 от z_1 по R1(a) или R1(b). В этом случае $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(d) Пусть v отдаёт заряд только по R1 и/или R2 (не менее 1) и получает не более 1, иначе $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Тогда v не получает заряда по R7 и можно считать, что $vt_1 \notin A_2$, $t_1 \in S_2 \cup PT_2$. Допустим, что v получает заряд по R1 дважды. Если v отдаёт не более $\frac{1}{2}$ какой-то из вершин t_1 или t_2, то $\mu(v) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, v дважды отдаёт 1 и хотя бы одна такая передача происходит по R1. В этом случае имеем $P_2 = xvy$ и можно считать, что $vt_1 \in B_2^p$, $t_1 \in PT_2$. Докажем, что v хотя бы раз получает заряд от x или y по R3 или R4. Действительно, если какое-то из рёбер vx или vy не принадлежит B_1, то оно является A_2^p-ребром и по нему v получает $\frac{1}{2}$ по R4. Если $vx, vy \in B_1$, т. е. $P_2 = xvy = z_1vz_2$, то так как ребро vt_1 не является особым хотя бы для одной из вершин x или y, то v получает не менее $\frac{1}{2}$ по R3. В любом случае имеем $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Пусть v получает заряд по R1 не более раза. Из утверждения 2 следует, что либо $vw \in B_1$, либо без потери общности $z_1 = x$, $z_1 \in T_1$. Согласно утверждению 6 вершина v отдаёт вершине w не более $\frac{1}{2}$. Поэтому можно считать, что $vt_1 \in B_2^p$, $t_1 \in PT_2$. Покажем, что v получает заряд по R1 или R5(b). Допустим, что v не получает заряда по R1. Согласно утверждению 2 без потери общности $y = z_2 \in T_1$. Если $P_1 \neq vw\ldots y$ и $P_2 \neq \ldots yv\ldots t_1$, то добавляя vy к A_1 и vt_1 к A_2, уменьшаем k_1. Пусть $P_1 \neq vw\ldots y$, $P_2 = \ldots yv\ldots t_1$. Тогда P_2 — длинная цепь. Если v не отдаёт заряда вершине t_2, то $\mu(v) \geqslant 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ согласно R1. Следовательно, $vt_2 \notin A_2$, $t_2 \in PT_2 \cup S_2$, $P_2 \neq \ldots yv \ldots t_2$. Если $t_2 \neq w$, то добавляя vy к A_1 и vt_2 к A_2, уменьшаем k_1. Если же $t_2 = w$, то $z_1 = x \in T_1$. В этом случае добавим vx к A_1 и vt_1 к A_2. При этом если $P_1 \neq vw \ldots x$, то уменьшается k_1, иначе увеличивается γ_1, другие параметры качества не изменяются. Наконец, рассмотрим случай $P_1 = vw \ldots y$. Если $z_1 = x$, то поскольку $P_1 \neq vw \ldots x$, возникающие случаи симметричны только что разобранным. Пусть $z_1 = w$. Если $P_2 \neq \ldots yv \ldots t_1$, то v получает заряд от w по R5(b). В противном случае P_2 — длинная цепь и, как показано выше, v передаёт $\frac{1}{2}$ вершине $t_2 \in PT_2$ по ребру $vt_2 \in B_2^p$ (заметим, что $t_2 \neq w = z_1$). Так как $P_2 \neq \ldots yv \ldots t_2$, то v получает $\frac{1}{2}$ от w по R5(b).

Если $v \in PZ_2^l$ или v не отдаёт заряда t_2, то $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $P_2 = xvy$. Если $vw \in B_1$, то $vt_2 \in B_2^p$, $t_2 \in PT_2$. Тогда при v имеется A_2^p-ребро, скажем vx, по которому v получает $\frac{1}{2}$ по R4. Если $vy \in A_2^p$, то v также получает $\frac{1}{2}$ от y по R4 и $\mu(v) \geqslant 2-2\times 1 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $vy \in B_1$. Если v получает заряд от y по R1, то поскольку одно из рёбер vt_1 или vt_2 не является особым для y, v получает еще $\frac{1}{2}$ от y по R3 и снова $\mu(v) \geqslant \frac{3}{2}$. Пусть v получает $\frac{1}{2}$ от w по R5(b). Тогда $P_1 = vw \ldots y$ и v получает еще $\frac{1}{2}$ от y по R6(b), так что $\mu(v) \geqslant \frac{3}{2}$. Таким образом, остаётся рассмотреть случай $z_1 = x \in T_1$. Если $P_1 \neq vw \ldots x$, то выполнимо УП(k_1): добавляем vx к A_1 и vt_1 к A_2. Пусть $P_1 = vw \ldots x$. В этом случае v получает $\frac{1}{2}$ от x по R6(b). Если $vw \in B_2$, то из R1 и утверждения 6 следует, что $\mu(v) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $vt_1, vt_2 \in B_2^p$, $t_1, t_2 \in PT_2$. Аналогично ранее рассмотренным случаям доказывается, что v получает ещё $\frac{1}{2}$ от y по R3 или R4, откуда следует, что $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Случай 12. v — (PT, Q)-вершина и $\mu(v) < \frac{3}{2} + (-3) = -\frac{3}{2}$.

Вершина v отдаёт не более $2 \times \frac{3}{2}$ по R7 и не более $\frac{1}{2}$ по R4. Таким образом, $\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Случай 13. v — (PZ, PZ)-вершина и $\mu(v) < 0$.

Пусть $P_1 = \ldots xvy \ldots$, $P_2 = \ldots uvw \ldots$. Вершина v отдаёт заряд только по B_i-рёбрам, и по каждому такому ребру v отдаёт не более 1 по R1 либо $\frac{1}{2}$ по R2 или R5. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leqslant 3$, то $\mu(v) \geqslant 4 - 4 \times 1 = 0$. Следовательно, $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$. Если v по каждому B_i-ребру отдаёт не более $\frac{1}{2}$, то $\mu(v) \geqslant 2 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$. Поэтому можно считать, что $P_1 = xvy$ — цепь длины 2 и v передаёт 1 по ребру $vz_1 \in B_1 \setminus A_1$ по R1. Согласно R1 и R2 вершина v не передаёт ничего по $A_1 \cap B_2$-рёбрам.

Предположим, что P_2 — длинная цепь. В этом случае v передаёт заряд по обоим B_1-рёбрам и хотя бы по одному B_2-ребру, иначе $\mu(v) \geqslant$

$2-1-2\times\frac{1}{2}=2-2\times 1=0$. Сначала предположим, что $vz_1\in B_1^p$. В наихудшем случае имеем $\mu(v)=2-2\times 1-2\times\frac{1}{2}=-1$, т. е. у v имеет место дефицит заряда в -1. Достаточно показать, что v дважды компенсирует (экономит) по $\frac{1}{2}$ по отношению к этому теоретическому минимуму, что и происходит, поскольку v инцидентна двум A_1-рёбрам, по каждому из которых либо получает $\frac{1}{2}$ по R4 (если это A_1^p-ребро), либо отдаёт не более $\frac{1}{2}$ или 0 в случаях, если ребро принадлежит B_1 или B_2 соответственно.

Таким образом, можно считать, что v не делает передач по B_1^p-рёбрам. В этом случае без потери общности $z_1=u$ и v отдаёт 1 вершине u по R1(b). Следовательно, $u\in PZ_2$, в A_1 существует цепь uab, где $ua\in B_2$, $a\in S_2$, и a инцидентна ребру $ac\in B_1^p$, $c\in PT_1$. Если существует B_2^p-ребро vt_i, $t_i\in PT_2$, такое, что $P_2\neq t_i\ldots wvu\ldots$, то выполнимо УП($k_2$): добавляем ac к A_1, vt_i и ua к A_2 (удаляя vu). Отсюда ввиду симметрии следует, что v может отдавать заряд только по одному B_2^p-ребру, а если v дважды отдаёт 1 по R1(b), то она не делает передач по B_2^p-рёбрам. В последнем случае v отдаёт только 2×1 по R1(b), откуда $\mu(v)=2-2\times 1=0$. Пусть v передаёт заряд по R1(b) только вершине u. Тогда v не может отдавать заряды одновременно по B_2^p-ребру vt_i и по ребру $vw\in A_2\cap B_2$ по R5, так как в этом случае $P_2=wvu\ldots\neq t_i\ldots wvu\ldots$, и осуществимо описанное выше улучшающее преобразование. Таким образом, кроме передачи по R1(b) и v отдаёт заряд $\frac{1}{2}$ не более чем по одному B_2-ребру и не более $\frac{1}{2}$ по ребру vz_2 по правилам R1, R2 и R5. Следовательно, $\mu(v)\geqslant 2-1-2\times\frac{1}{2}=0$.

Пусть $P_2=uvw$ — цепь длины 2. Теперь v отдаёт заряд 1 только по B_i^p-рёбрам по правилу R1(a). Поэтому можно считать, что v передаёт 1 по B_1^p-ребру vz_1. В наихудшем случае имеем $\mu(v)=2-4\times 1=-2$. В силу наличия B_1^p-ребра vz_1, где $z_1\in PT_1$, вершина v компенсирует по $\frac{1}{2}$ на каждом инцидентном A_1-ребре. Если v также отдаёт заряд по B_2^p-ребру, то v компенсирует по $\frac{1}{2}$ и на каждом A_2-ребре, а значит, $\mu(v)\geqslant -2+4\times\frac{1}{2}=0$. Пусть v не делает передач по B_2^p-рёбрам. В этом случае v может передавать заряд по B_2-рёбрам только по правилу R5. Если при v нет A_2^p-рёбер, то на каждом A_2-ребре вершина v по-прежнему экономит $\frac{1}{2}$, так что $\mu(v)\geqslant 0$. Если v инцидентна двум A_2^p-рёбрам, то v ничего не передаёт по B_2-рёбрам и снова $\mu(v)\geqslant 0$. Наконец, если v инцидентна в точности одному A_2^p-ребру, скажем vu, то v передаёт по B_2-рёбрам только $\frac{1}{2}$ (по ребру vw по R5). Следовательно, v отдаёт 2×1 по B_1^p-рёбрам, иначе $\mu(v)\geqslant 2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$. В этом случае v инцидентна хотя бы одному A_1^p-ребру, по которому получает $\frac{1}{2}$ по R4, откуда $\mu(v)\geqslant 2-\frac{1}{2}-2\times 1+\frac{1}{2}=0$.

Случай 14. v — (PZ,Q)-вершина и $\mu(v)<0+(-3)=-3$.

По каждым B_2- и B_1-ребрам v отдаёт не более $\frac{3}{2}$ по R7 и не более 1 по одному из правил R1, R2 или R5 соответственно. Следовательно,

$$\mu(v) \geqslant 2 - 2 \times \frac{3}{2} - 2 \times 1 = -3.$$

Случай 15. v — (Q, Q)-вершина и $\mu(v) < -3 + (-3) = -6$.

Вершина v отдаёт не более $4 \times \frac{3}{2}$ по R7. Следовательно,

$$\mu(v) \geqslant 2 - 4 \times \frac{3}{2} > -6.$$

Лемма 5 доказана.

Остаётся доказать, что трудоёмкость алгоритма $A_{4/3}$ не превосходит $O(n^5)$.

Заметим, что значение параметра q заключено в пределах от 1 до $100n^2$. Следовательно, алгоритм выполняет не более $O(n^2)$ улучшающих преобразований. Поиск каждого улучшающего преобразования осуществляется путём перебора всех вершин $v \in V$ с последующим поиском преобразования в окрестности v и его выполнением. Перебор вершин осуществляется за время $O(n)$, а время отыскания преобразования в окрестности выбранной вершины определяется временем нахождения не более двух рёбер из $E_1^p \cup E_2^p \cup E_1' \cup E_2'$, добавляемых к A_1 и A_2, которое равно $O(n^2)$ (остальные добавляемые рёбра находятся за время $O(1)$, а множество удаляемых рёбер однозначно определяется по множеству добавляемых). Время выполнения найденного улучшающего преобразования определяется трудоёмкостью разбиения соответствующего набора (s, q)-деревьев, которое по лемме 1 не превосходит $O(n)$. Таким образом, на поиск и выполнение одного улучшающего преобразования тратится время $O(n \cdot n^2) = O(n^3)$, а общая трудоёмкость шагов 0–2 алгоритма не превосходит $O(n^2 \cdot n^3) = O(n^5)$. Из лемм 2 и 3 следует, что шаги 3 и 4 алгоритма выполняются за линейное время. Отсюда следует искомая оценка временно́й сложности алгоритма. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 11–20.
2. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 41–61.

3. **Сердюков А. И.** О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. Сб. науч. тр. — 1978. — Вып. 17. — С. 76–79.
4. **Baburin A. E., Della Croce F., Gimadi E. K., Glazkov Y. V., Paschos V. Th.** Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // Discrete Appl. Math. — 2009. — Vol. 157, N 9. — P. 1988–1992.
5. **Berman P., Karpinski M.** 8/7-Approximation algorithm for (1,2)-TSP // Proc. of 17th annual ACM–SIAM symposium on discrete algorithms, SODA 2006 (Miami, January 22—26, 2006). — New York: ACM Press, 2006. — P. 641–648.
6. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Technical report CS-93-19: Carnegie Mellon University, 1976.
7. **De Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. — 1991. — Vol. 22, N 1. — P. 113–122.
8. **De Kort J. B. J. M.** Upper bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. — 1992. — Vol. 23, N 4. — P. 357–367.
9. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // Eur. J. Oper. Res. — 1993. — Vol. 70, N 2. — P. 229–243.
10. **Papadimitriou C. H., Yannakakis M.** The traveling salesman problem with distances one and two // Math. Oper. Res. — 1993. — Vol. 18. N 1. — P. 1–11.

Глебов Алексей Николаевич,
e-mail: angle@math.nsc.ru
Замбалаева Долгор Жамьяновна,
e-mail: dolgor@ngs.ru

Статья поступила
23 июня 2011 г.