ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2011. Том 18, № 5. С. 80–97

УДК 519.7

О НАХОЖДЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДКЛОНОВ СЛАБО-ЦЕНТРАЛЬНОГО КЛОНА *)

Н. Г. Парватов

Аннотация. Рассматривается проблема полноты в слабо-центральном клоне. Формулируются общие условия для нахождения его максимальных слабо-центральных подклонов. В случае клона, задаваемого наследственной системой множеств, получено явное описание всех его максимальных подклонов, содержащих систему так называемых слабо существенных функций.

Ключевые слова: замкнутый класс, клон, предикат, сохранение предиката, соответствие Галуа, проблема полноты, слабо-центральный предикат, центральный предикат, слабо-центральный клон.

Введение. Проблема полноты

Будем обозначать через P_E множество всех функций $f : E^n \to E$, где E — фиксированное конечное множество и n — произвольное натуральное число. Замкнутые операциями суперпозиции из [5, 6] множества функций из P_E называются *замкнутыми классами*, а замкнутые классы, включающие класс S_E всех селекторных (тождественно равных некоторому своему аргументу) функций, — *клонами*. Замкнутый класс, включающий множество A, будем называть *A-замкнутым*. Клоны, таким образом, являются S_E-замкнутыми классами. Отметим, что среди A-замкнутых классов, включающих заданное множество X функций из P_E, есть наименьший. Будем обозначать этот наименьший класс через $[X]_A$ и множество X для него станем называть *A-порождающим*. При пустом множестве A для этого класса используется обозначение $[X]$, и множество X назовём *порождающим*. Как видно, $[X]_A = [X \cup A]$. A-замкнутый класс, имеющий конечное A-порождающее множество, будем называть *конечно порождённым над A*, или просто *конечно порождённым*, если A пусто.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

© **2011 Парватов Н. Г.**

Для заданного A-замкнутого класса B *проблема A-полноты* состоит в описании, по-возможности эффективном, всех его A-порождающих подмножеств. Эта проблема может быть решена указанием такой системы $\mathcal{S}$ A-замкнутых классов, строго включённых в B, что всякий строго включённый в B A-замкнутый класс включён в некоторый из классов этой системы. Такую систему $\mathcal{S}$ станем называть *A-критериальной* в B (или просто *критериальной* при пустом A). Будем называть её *безызбыточной*, если она не содержит сравнимых по отношению включения классов. Всякая A-критериальная система включает систему $\mathcal{S}(A, B)$ максимальных по включению A-замкнутых классов, строго включённых в B, а безызбыточная A-критериальная система в случае своего существования совпадает с системой $\mathcal{S}(A, B)$. Конечно порождённый над A A-замкнутый класс B обладает конечной и безызбыточной A-критериальной системой $\mathcal{S}(A, B)$.

Обозначим через Π_E множество всех предикатов $p : E^n \to \{\text{И,Л}\}$. При изучении проблем полноты большое значение имеет отношение сохранения функциями из P_E предиктов из Π_E [2, 13]. Это отношение определяет соответствие Галуа [4] между упорядоченными включением системами подмножеств в P_E и Π_E, сопоставляющее произвольному множеству X функций из P_E множество $\mathrm{pol}_E(X)$ сохраняемых ими предикатов из Π_E, а произвольному множеству Y предикатов из Π_E — множество $\mathrm{inv}_E(Y)$ сохраняющих их функций. При этом Галуа-замкнутыми классами функций (т. е. классами $\mathrm{pol}_E(Y)$ для $Y \subseteq \Pi_E$) оказываются всевозможные клоны, а Галуа-замкнутыми классами предикатов (т. е. классами $\mathrm{inv}_E(X)$ для $X \subseteq P_E$) оказываются всевозможные классы предикатов, содержащие все диагонали (т. е. тождественно истинные или ложные предикаты и предикаты $x_i = x_j \wedge \ldots \wedge x_s = x_t$, где $\{i, j, \ldots, s, t\} = \{1, \ldots, n\}$ для натуральных n) и замкнутые операциями конъюнкции, проектирования, отождествления и перестановки переменных, введения и удаления фиктивных переменных. Сформулированные утверждения, составляющие суть теории Галуа для клонов, доказаны в [2, 13].

Из сказанного следует, что для некоторого множества Λ предикатов из $\mathrm{inv}_E(A) \setminus \mathrm{inv}_E(B)$ A-критериальной для B является система $\mathcal{S}_\Lambda(B)$, состоящая из клонов $B \cap \mathrm{pol}_E(p)$ для всевозможных предикатов p из Λ. Это свойство выполняется, например, при $\Lambda = \mathrm{inv}_E(A) \setminus \mathrm{inv}_E(B)$, но в основном интересны менее тривиальные случаи, приводящие к менее избыточным системам. Представляют интерес методы нахождения множества Λ, дающие для заданных клонов A и B эффективную критериальную систему $\mathcal{S}_\Lambda(B)$.

Эффективных таких методов не известно, но можно предложить следующий подход. Пусть множество $\mathrm{inv}_E(A)$ предупорядочено [3] отношением $\leqslant$, причём выполняется импликация

$$(p \leqslant q) \Rightarrow (\mathrm{pol}_E(\{q\} \cup \mathrm{inv}_E(B)) \subseteq \mathrm{pol}_E(\{p\} \cup \mathrm{inv}_E(B))) \tag{1}$$

для любых предикатов p и q из множества $\mathrm{inv}_E(A)$. В этой ситуации множество $\mathrm{inv}_E(B)$ обладает свойством наследственности: вместе с любым своим предикатом q оно содержит и всякий предикат p из $\mathrm{inv}_E(A)$ такой, что $p \leqslant q$. Это означает, что класс $\mathrm{inv}_E(B)$ можно задать указанием (запрещающего) множества $\Lambda \subseteq \mathrm{inv}_E(A) \setminus \mathrm{inv}_E(B)$ такого, что для любого предиката q из $\mathrm{inv}_E(A)$ условие $q \in \mathrm{inv}_E(B)$ равносильно отсутствию в множестве Λ предиката p такого, что $p \leqslant q$. Несложно понять, что система $\mathcal{S}_\Lambda(B)$ будет в этой ситуации A-критериальной для B. Если в соотношении (1) потребовать выполнение равносильности вместо импликации, то при помощи описанного подхода можно получить безызбыточную A-критериальную систему для B, если она для данных клонов A и B существует. Однако неконструктивность определения такого предупорядочения затрудняет его использование. Если предупорядочение $\leqslant$ определить иначе, понимая под неравенством $p \leqslant q$ возможность получить p из q отождествлением переменных, то описанный подход позволяет получить конечную (но не обязательно безызбыточную) A-критериальную систему для B при условии, что конечные системы для заданных клонов A и B существуют, т. е. клон B конечно порождён над A.

В статье проблема полноты рассматривается для слабо-центральных клонов, имеющих разнообразные приложения в дискретной математике. К числу таких клонов относятся, в частности, максимальные в P_E клоны, описываемые центральными предикатами [14], а также клоны квазимонотонных полурешёточных функций, используемых для описания дискретных управляющих систем с изменяющимися состояниями [1, 8]. Для слабо-центральных клонов A и B сформулированы достаточно простые общие условия, характеризующие клоны системы $\mathcal{S}(A, B)$. В случае, когда слабо-центральный клон B определяется посредством наследственной системы множеств и клон B состоит из так называемых слабо существенных функций клона B, получено явное описание клонов из $\mathcal{S}(A, B)$.

1. Слабо-центральные предикаты и клоны

В этом разделе определены слабо-центральные клоны и для них рассмотрена проблема полноты.

Элемент c из множества E будем называть *слабо-центральным* для m-местного предиката p из Π_E, если замена любых компонент в любом удовлетворяющем предикату p наборе значением c приводит к набору, удовлетворяющему предикату p. Иными словами, всякий раз, когда предикату p удовлетворяет набор $(a_1, \dots, a_m)$ из множества E^m, этому предикату удовлетворяют и наборы

$$(c, a_2, \dots, a_m), (a_1, c, a_3 \dots, a_m), \dots, (a_1, \dots, a_{m-1}, c). \tag{2}$$

В частности, слабо-центральным элементом предиката p является любой его *центральный элемент* — так называют элемент c из множества E, если предикату p удовлетворяют все наборы, имеющие компоненту, равную c.

Предикат, для которого элемент c является слабо-центральным (центральным), назовём *c-слабо-центральным* (соответственно *c-центральным*) предикатом. Предикат, для которого некоторый элемент является слабо-центральным (центральным), будем называть *слабо-центральным* (соответственно *центральным*) предикатом.

Центральные и слабо-центральные предикаты так же, как и описываемые ими клоны, имеют разнообразные приложения. Так, центральными предикатами описываются в теореме Розенберга о полноте из [14] некоторые предполные подклоны клона P_E. Слабо-центральными предикатами описываются клоны квазимонотонных полурешёточных функций [1, 8], используемых для задания дискретных управляющих систем с изменяющимися состояниями. В связи со сказанным слабо-центральные предикаты представляют интерес, как и определяемые ими клоны. Отметим далее в теореме 1 некоторые свойства тех и других, сделав предварительно необходимые определения.

Для функций f и g, зависящих от одинакового числа, пусть n, переменных будем писать $g \geqslant_c f$, если функция g получается из функции f заменой некоторых её значений значением c, т. е. если

$$g(x) = f(x) \quad \text{или} \quad g(x) = c$$

для любого набора x из множества E^n.

Через P_E^* обозначим множество всех функций $f : E^n \to E \cup \{*\}$, где n — произвольное натуральное число и $*$ — фиксированный элемент, не принадлежащий множеству E. Интерпретируя этот элемент как неопределённое значение, функции из P_E^* будем называть *частичными*. *Доопределением частичной n-местной функции g* будем называть всякую частичную n-местную функцию f, обладающую свойством

$$g(x) = f(x) \quad \text{или} \quad g(x) = *$$

для любого набора x из множества E^n.

Предикат p из Π_E, зависящий от m переменных, называется *приведённым*, если для любых чисел i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$, равенство $a_i = a_j$ выполняется не для любого удовлетворяющего предикату p набора $(a_1, \ldots, a_m)$. Имеет место

Теорема 1. *Для произвольного клона K функций из P_E следующие условия равносильны*:

(i) *всякую частичную функцию из P_E^*, имеющую доопределение в клоне K, можно доопределить до функции из K значением c*;

(ii) *клон K вместе с любой своей функцией f содержит и всякую функцию $g \geqslant_c f$*;

(iii) *клон K описывается посредством некоторого множества Y c-слабо-центральных предикатов из Π_E такого, что $K = \mathrm{pol}_E(Y)$.*

Доказательство. Покажем, что из условия (i) следует (ii). Пусть выполняется условие (i), а также неравенство $g \geqslant_c f$ для некоторых функций f из K и g из P_E. Рассмотрим частичную функцию g', полученную из g заменой значения c неопределённым значением. Функция g' доопределяется до функции f из K. По условию (i) g' доопределяется значением c до функции из клона K. Но в результате такого доопределения получается g. Следовательно, функция g принадлежит клону K, и из (i) вытекает (ii).

Покажем, что из условия (ii) следует (iii). Предположим, что выполняется (ii). Рассмотрим множество Y предикатов из Π_E такое, что выполняется равенство $K = \mathrm{pol}_E(Y)$. Это множество всегда существует: например, записанное равенство выполняется для множества $Y = \mathrm{inv}_E(K)$. Без ограничения общности будем считать, что предикаты в Y приведённые. Рассмотрим произвольный m-местный предикат p из Y. Пусть ему удовлетворяют наборы $X_1, \ldots, X_n$ из E^m и только они. Поскольку p сохраняется всеми функциями из K, всякий удовлетворяющий p набор $(a_1, \ldots, a_m)$ совпадает с набором $f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$ для некоторой функции из K (здесь в качестве f можно выбрать селектор). Это свойство выполняется также и для наборов вида (2) в силу условия (ii) и в силу приведённости предиката p. Таким образом, p — c-слабо-центральный предикат, и имеет место (iii).

Покажем, что из условия (iii) следует (i). Предположим, что клон K описывается посредством некоторого множества Y c-слабо-центральных предикатов. Пополним Y всевозможными проекциями его предикатов. Пусть частичная функция g' из P_E^* имеет доопределение f в клоне K и функция g из P_E получена заменой неопределённых значений g' значением c. Функция g сохраняет все предикаты из Y вслед за функцией f. Действительно, предположив противное, рассмотрим предикат p из Y, не сохраняемый функцией g и зависящий от минимально возможного числа m переменных. Тогда найдутся наборы $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющие предикату p, а также не удовлетворяющий ему набор $X_0 = g^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$. Последнее равенство сохраняется с уменьшением m на единицу, если из всех наборов $X_0, \ldots, X_n$ удалить i-ю компоненту, принимающую значение c в X_0. В результате такого удаления из $X_1, \ldots, X_n$ получаются наборы, удовлетворяющие i-й проекции $\exists\, x_i p(x_1, \ldots, x_m)$ предиката p, а набор, получающийся из X_0, не удовлетворяет ей; функция g не сохраняет предикат из Y (именно, не сохраняет i-ю проекцию предиката p) вопреки минимальности m. Следовательно, никакая компонента набора X_0 не равна c. Тогда f также не сохраняет предикат p; противоречие. Итак, функция g сохраняет все предикаты из Y, а потому принадлежит клону K. Тем самым доказано, что из условия (iii) следует (i). Теорема 1 доказана.

Клон K, для которого выполняются условия (i)–(iii) теоремы 1, назовём *c-слабо-центральным.*

Замечание 1. Слабо-центральные клоны и предикаты обладают рядом интересных свойств. Перечислим некоторые. Так, среди c-слабо-центральных клонов имеется наименьший по включению, описываемый множеством всех c-слабо-центральных предикатов; обозначим это множество через W_E^c. Более того, в соответствии с доказанной теоремой и в дополнение к ней *произвольный клон тогда и только тогда является c-слабо-центральным, когда он включает наименьший c-слабо-центральный клон* $\mathrm{pol}_E\big(W_E^c\big)$.

С использованием интерполяционной теоремы из [12] можно показать, что любой предикатно-описуемый слабо-центральный клон, описываемый некоторым конечным (равносильно одноэлементным) множеством предикатов, содержит мажоритарную функцию и в силу [7] конечно порождён. При этом клон $\mathrm{pol}_E\big(W_E^c\big)$ не является предикатно-описуемым в силу теоремы С. В. Яблонского из [10], так как совпадает с пересечением бесконечной строго убывающей последовательности клонов

$$\mathrm{pol}_E\big(W_E^{c\,(1)}\big) \supset \mathrm{pol}_E\big(W_E^{c\,(2)}\big) \supset \mathrm{pol}_E\big(W_E^{c\,(3)}\big) \supset \ldots,$$

где $W_E^{c\,(d)}$ — множество всех c-слабо-центральных предикатов, зависящих не более чем от d переменных. Вместе с тем можно показать, что клон $\mathrm{pol}_E\big(W_E^c\big)$ конечно порождён.

Множество W_E^c всех c-слабо-центральных предикатов замкнуто операциями проектирования, отождествления и перестановки переменных, конъюнкцией и дизъюнкцией, но не содержит диагоналей, кроме тождественно истинных или ложных.

2. Проблема полноты в слабо-центральном клоне

Обратимся к проблеме полноты в клоне B при A-суперпозиции. Далее эта проблема рассматривается в случае, когда оба клона A и B — слабо-центральные. Сделаем необходимые определения.

Пусть предикат p из множества Π_E зависит от m переменных. Предикат

$$\exists x_i p(x_1, \ldots, x_m),$$

где $1 \leqslant i \leqslant m$, будем называть *проекцией* или, точнее, *i-й проекцией* предиката p.

Для любого $n \leqslant m$ и любой сюръективной функции

$$\alpha : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$$

определим n-местный предикат p_α следующим образом:

$$p_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \equiv p(x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(m)}).$$

При $n < m$ будем говорить, что предикат p_α получен из p *отождествлением* (переменных).

При совпадающих m и n, когда α является подстановкой на множестве чисел $1, \ldots, m$, определим m-местный предикат

$$p_{\alpha,\wedge}(x_1, \ldots, x_m) \equiv p(x_1, \ldots, x_m) \wedge p_\alpha(x_1, \ldots, x_m).$$

Будем говорить, что предикат $p_{\alpha,\wedge}$ получен из p *конъюнкцией с перестановкой* (переменных).

Будем называть m-местный предикат q *B-сужением* p, если выполняются «включения» $q \subseteq p$ и $Bq \setminus q \subseteq Bp \setminus p$. При этом под Bp понимается предикат, которому удовлетворяют наборы $f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$, где n — произвольное натуральное число, $X_1, \ldots, X_n$ — произвольные наборы, удовлетворяющие предикату p, и f — произвольная n-местная функция из B. Помимо этого, множество наборов, удовлетворяющих предикату, отождествляется с ним, что позволяет использовать знаки теоретико-множественных операций и отношений, как выше.

Несложно понять, что включение $B \cap \mathrm{pol}_E(p) \subseteq B \cap \mathrm{pol}_E(q)$ выполняется всякий раз, когда предикат q является проекцией или B-сужением предиката p, а также когда q получен из p отождествлением или конъюнкцией с перестановкой.

Предикат p назовём (A,B)-*минимальным*, если он принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(A)\setminus\mathrm{inv}_E(B)$ и в этом множестве нет отличного от p предиката, являющегося его B-сужением или полученного из него проектированием, отождествлением или конъюнкцией с перестановкой.

Обозначим через $\Lambda(A,B)$ множество всех (A,B)-минимальных предикатов и через $\mathcal{S}_\Lambda(A,B)$ — множество клонов $B\cap\mathrm{pol}_E(p)$, где $p\in\Lambda(A,B)$. Ясно, что система $\mathcal{S}_\Lambda(A,B)$ является (A,B)-критериальной для любых клонов A и B таких, что $A\subseteq B$. Менее очевидно, что эта система безызбыточная для слабо-центральных клонов A и B. Об этом говорит следующая

Теорема 2. *Для любых c-слабо-центральных клонов A и B таких, что $A\subseteq B$, система $\mathcal{S}_\Lambda(A,B)$ является безызбыточной (A,B)-критериальной системой.*

Эта теорема является непосредственным следствием леммы 1.

Лемма 1. *Для любых m-местного предиката p из $\Lambda(A,B)$ и r-местного предиката q из $\Lambda(A,B)$ включение $B\cap\mathrm{pol}_E(q)\subset B\cap\mathrm{pol}_E(p)$ невозможно, а равенство $B\cap\mathrm{pol}_E(q)=B\cap\mathrm{pol}_E(p)$ выполняется в том и только том случае, когда $m=r$ и $p_\alpha=q$ для некоторой подстановки α на множестве $\{1,\ldots,m\}$.*

Доказательство. Пусть выполняется включение

$$B\cap\mathrm{pol}_E(q)\subseteq B\cap\mathrm{pol}_E(p).$$

Пусть также предикату p удовлетворяют наборы $X_1,\ldots,X_n$ и только они. Выберем произвольно набор X_0, удовлетворяющий предикату $Bp\backslash p$, и рассмотрим n-местную функцию f такую, что $f^{[m]}(X_1,\ldots,X_n)=X_0$, равную c на остальных наборах, не являющихся строками матрицы $X=\left(X_1^T,\ldots,X_n^T\right)$. Функция f принадлежит клону B в силу условия (i) теоремы 1.

Функция f не сохраняет предикат p, а вслед за ним и q. Это означает, что найдутся наборы $Y_1,\ldots,Y_n$, удовлетворяющие q, и набор $Y_0=f^{[r]}(Y_1,\ldots,Y_n)$, удовлетворяющий предикату $Bq\setminus q$. Заметим, что наборы X_0 и Y_0 не содержат компоненты, равной c, так как в противном случае некоторый из этих предикатов можно спроектировать по соответствующей координате и получить предикат, не сохраняемый функцией f, а значит, принадлежащий множеству $\mathrm{inv}_E(A)\setminus\mathrm{inv}_E(B)$, что не согласуется с (A,B)-минимальностью p и q. В силу этого компоненты набора Y_0

встречаются в наборе X_0, а строки матрицы Y являются одновременно строками матрицы X. Пусть i-я строка Y является $\alpha(i)$-й строкой матрицы X.

Определённая так функция $\alpha : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, m\}$ сюръективна, поскольку в противном случае она не принимает некоторого значения j из множества чисел $1, \ldots, m$, и тогда предикат $\exists x_j p(x_1, \ldots, x_m)$ не сохраняется функцией f, а значит, принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(A) \setminus \mathrm{inv}_E(B)$; противоречие.

Функция α также и инъективна, иначе $\alpha(i) = \alpha(j)$ для некоторых i, j, $i < j$, и функция f не сохраняет предикат $q(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_r)$, и он принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(A) \setminus \mathrm{inv}_E(B)$, что невозможно.

Таким образом, $m = r$ и функция α является подстановкой на множестве чисел $1, \ldots, m$. Для произвольного набора $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ положим $Z_\alpha = (Z_{\alpha(1)}, \ldots, Z_{\alpha(m)})$. Было показано, что наборы $X_{1\alpha}, \ldots, X_{n\alpha}$ (совпадающие с соответствующими наборами $Y_1, \ldots, Y_n$) удовлетворяют предикату q в отличие от набора $X_{0\alpha}$ (совпадающего с Y_0), не удовлетворяющего q и тогда удовлетворяющего предикату $Bq \setminus q$. В частности, установлено «включение» $p_\alpha \subseteq q$.

Покажем далее, что предикаты p_α и q совпадают.

С этой целью вместо X_0 выберем другой набор X'_0, удовлетворяющий предикату $Bp \setminus p$, и рассмотрим n-местную функцию f' такую, что $f'^{[m]}(X_1, \ldots, X_n) = X'_0$, и принимающую значение c на остальных наборах, не являющихся строками матрицы $X = \left(X_1^T, \ldots, X_n^T\right)$. Повторив для набора X'_0 и функции f рассуждения, предпринятые выше для X_0, получим, что для некоторой подстановки β наборы $X_{1\beta}, \ldots, X_{m\beta}$ удовлетворяют предикату q в отличие от набора $X'_{0\beta}$.

Последнее свойство должно выполняться и при $\beta = \alpha$. В противном случае набор $X'_{0\alpha}$ удовлетворяет q. Рассмотрим предикат $q_{\gamma,\wedge}$, где $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ (договоримся, что в композиции подстановок первой действует левая, и тогда, например, $(X'_{0\alpha})_\gamma = X'_{0\beta}$). Этот предикат не совпадает с q (набор $X'_{0\alpha}$ удовлетворяет q, но не $q_{\gamma,\wedge}$). Вместе с тем, $X_{1\alpha}, \ldots, X_{n\alpha}$ удовлетворяют предикату $q_{\gamma,\wedge}$ в отличие от набора $X'_{0\alpha} = f'^{[m]}(X_{1\alpha}, \ldots, X_{n\alpha})$. Следовательно, функция f' не сохраняет предикат $q_{\gamma,\wedge}$, и он принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(A) \setminus \mathrm{inv}_E(B)$ вопреки (A, B)-минимальности q. Полученное противоречие означает, что набор $X'_{0\alpha}$ не удовлетворяет предикату q и тогда удовлетворяет $Bq \setminus q$.

Это можно интерпретировать следующим образом. Для любого набора X'_0, удовлетворяющего предикату $Bp \setminus p$ или, что равносильно, для любого $X'_{0\alpha}$, удовлетворяющего предикату $Bp_\alpha \setminus p_\alpha$, набор $X'_{0\alpha}$ удовлетворяет $Bq \setminus q$. Таким образом, наряду с включением $p_\alpha \subseteq q$ выполняется $Bp_\alpha \setminus p_\alpha \subseteq Bq \setminus q$. Строгих включений быть не может из-за (A, B)-минимальности предиката p_α (он (A, B)-минимален одновременно с p). Лемма 1 доказана.

Из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Для любых c-слабо-центральных клонов A и B таких, что $A \subseteq B$, существует безызбыточная A-критериальная система в B.*

Замечание 2. В частности, в условиях этого следствия можно взять клон A, совпадающий с наименьшим c-слабо-центральным клоном $\mathrm{pol}_E\big(W_E^c\big)$. Учитывая, что он конечно порождён (оставим этот факт без доказательства), получаем более сильное утверждение: *всякий слабо-центральный клон обладает безызбыточной критериальной системой.*

3. Клоны, определяемые системами множеств

Введём в рассмотрение слабо-центральные клоны, задаваемые посредством наследственных систем множеств. К их числу относятся предполные в P_E клоны, описываемые центральными вполне рефлексивными и симметричными предикатами, а также клоны квазимонотонных функций на верхней полурешётке, описывающие дискретные управляющие системы с изменяющимися состояниями.

Пусть $\widetilde{\varepsilon}$ — некоторая система подмножеств множества E. Будем говорить, что функция f из P_E сохраняет систему $\widetilde{\varepsilon}$, если для любых натурального m и наборов $X_0, \ldots, X_n$ из E^m таких, что $X_0 = f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$, множество $\widetilde{X}_0$ принадлежит системе $\widetilde{\varepsilon}$, если $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n$ принадлежат ей. При этом для произвольного набора $X = (X_1, \ldots, X_n)$ через $\widetilde{X}$ обозначается множество $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Функции из P_E, сохраняющие систему $\widetilde{\varepsilon}$, составляют, очевидно, клон, который будем обозначать через $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$. Обратимся к проблеме полноты в клоне $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$, считая с этого места, что система $\widetilde{\varepsilon}$ обладает следующими свойствами:

(i) *наследственности*: если некоторое множество принадлежит системе $\widetilde{\varepsilon}$, то и всякая его часть принадлежит $\widetilde{\varepsilon}$;

(ii) *слабой центральности*: если множество H принадлежит $\widetilde{\varepsilon}$, то множество $H \cup \{c\}$ также принадлежит $\widetilde{\varepsilon}$.

Клон $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$ c-слабо-центральный в силу второго свойства. Для любого натурального m определим m-местный предикат $\varepsilon^{(m)}$ такой, что

$$\varepsilon^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \equiv \{x_1, \ldots, x_m\} \in \widetilde{\varepsilon}.$$

Несложно понять, что этот предикат получается из $\varepsilon^{(m+1)}$ отождествлением переменных и проектированием:

$$\varepsilon^{(m)}(x_1,\ldots,x_m)\equiv\varepsilon^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_m,x_m)\equiv\exists x_{m+1}\varepsilon^{(m+1)}(x_1,\ldots,x_{m+1}),$$

причём первая равносильность выполняется исключительно в силу определения предиката $\varepsilon^{(m)}$, а вторая проверяется с использованием свойства слабой центральности системы $\widetilde{\varepsilon}$. В силу указанных равносильностей (достаточно любой из них) клоны функций, сохраняющих предикаты $\varepsilon^{(m)}$ образуют убывающую последовательность: $\mathrm{pol}_E(\varepsilon^{(1)})\supseteq\mathrm{pol}_E(\varepsilon^{(2)})\supseteq\ldots$. Эта последовательность стабилизируется при некотором $m=q(\widetilde{\varepsilon})$ так, что клоны $\mathrm{pol}_E(\varepsilon^{(m+i)})$ при всех натуральных i совпадают между собой и с клоном $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$. При этом $q(\widetilde{\varepsilon})$ — максимальная мощность минимального по включению подмножества в E, не принадлежащего системе $\widetilde{\varepsilon}$.

Функцию f из $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$, зависящую от n переменных, назовём *слабо существенной*, если для некоторых i, $1\leqslant i\leqslant n$, натурального m и наборов $X_0,\ldots,X_n$ из E^m таких, что $X_0=f^{[m]}(X_1,\ldots,X_n)$ множество $\widetilde{X}_0$ принадлежит системе $\widetilde{\varepsilon}$ всякий раз, когда множество $\widetilde{X}_i$ принадлежит ей. Слабо существенные функции из $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$ составляют клон, который обозначим через $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})$. Равносильным образом $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})$ можно определить как клон функций, сохраняющих предикаты

$$\varepsilon^{[m,r]}(x_1,\ldots,x_{mr})\equiv\bigvee_{i=0}^{r-1}\varepsilon^{(m)}(x_{mi+1},\ldots,x_{m(i+1)})$$

при всевозможных натуральных m и r и при фиксированном $m=q(\widetilde{\varepsilon})$ и всевозможных натуральных r (отметим это без доказательства). Далее будем интересоваться проблемой $\Phi(\widetilde{\varepsilon})$-полноты в клоне $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$.

В двоичном случае при $E=\{0,1\}$ имеется лишь два нетривиальных клона $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$ и два нетривиальных клона $\Phi(\widetilde{\varepsilon})$. Речь идёт о клонах сохранения констант и о клонах функций, удовлетворяющих условиям 1^∞ и 0^∞. Основное значение имеет случай $|E|>2$.

Напомним в связи с этим, что предикат называют *симметричным*, если он не изменяется при любой перестановке переменных. Предикат называется *вполне рефлексивным*, если ему удовлетворяют все наборы нужной длины, имеющие совпадающие компоненты. В соответствии с теоремой Розенберга из [14] часть предполных клонов в P_E описывается симметричными, вполне рефлексивными и одновременно c-центральными предикатами; обозначим через $Z_E(c)$ множество таких предикатов. Произвольный m-местный предикат α из множества $Z(c)$ совпадает с некоторым предикатом $\varepsilon^{(m)}$ при надлежащем выборе системы $\widetilde{\varepsilon}$

и $m = q(\widetilde{\varepsilon})$. Для такого совпадения достаточно, чтобы минимальными по включению подмножествами в E, не принадлежащими $\widetilde{\varepsilon}$, были всевозможные множества $\widetilde{X}$ для наборов X из E^m, не удовлетворяющих предикату α. Таким образом, каждый предполный клон, описываемый предикатом из $Z(c)$, определяется также и при помощи некоторой системы $\widetilde{\varepsilon}$, обладающей свойствами наследственности и слабой центральности.

При помощи подобной системы определяются также клоны квазимонотонных функций на полурешётке, используемые для описания дискретных управляющих систем с изменяющимися состояниями [1]. В этом случае на множестве E должна быть определена структура верхней полурешётки, и система $\widetilde{\varepsilon}$ состоит тогда из всевозможных подмножеств этой полурешётки, имеющих нижнюю грань.

4. Теорема о полноте

В этом разделе получена явная характеризация $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальных предикатов, т. е. предикатов, описывающих $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$-предполные $\Phi(\widetilde{\varepsilon})$-замкнутые клоны. Тем самым получено решение проблемы $\Phi(\widetilde{\varepsilon})$-полноты в клоне $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$. В [9] рассмотрен частный случай, когда $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$ — клон квазимонотонных функций на полурешётке. Понадобятся некоторые определения и обозначения.

Рассмотрим набор $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из E^m. Обозначим через $U(Y)$ систему всех таких подмножеств u в $\{1, \dots, m\}$, что множество $\{Y_i \mid i \in u\}$ не принадлежит системе $\widetilde{\varepsilon}$. Через $U_0(Y)$ обозначим систему минимальных по включению подмножеств из $U(Y)$. Определим m-местный предикат $\rho_Y(X) \equiv U(X) \subset U(Y)$.

Будем называть j-ю компоненту Y_i набора Y *несущественной*, если выполняется соотношение $u \cup \{j\} \in U(Y) \Leftrightarrow u \in U(Y)$ для любого подмножества $u \subseteq \{1, \dots, m\}$. Другими словами, это означает, что число j не принадлежит ни одному множеству системы $U_0(Y)$. В этом случае непосредственно проверяется соотношение

$$\exists x_j \rho_Y(x_1, \dots, x_n) \equiv \rho_{Y'}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \qquad (3)$$

для набора $Y' = (Y'_1, \dots, Y'_{j-1}, Y'_{j+1}, \dots, Y'_m)$, полученного удалением несущественной j-й компоненты.

Будем называть *подобными* i-ю и j-ю компоненты Y_i и Y_j набора Y, если при $i \neq j$ выполняется соотношение

$$u \cup \{i\} \in U(Y) \Leftrightarrow u \cup \{j\} \in U(Y)$$

для любого подмножества $u \subseteq \{1, \ldots, m\}$. В этом случае непосредственно проверяется соотношение

$$\rho_Y(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv \rho_{Y'}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \qquad (4)$$

для набора $Y' = (Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_n)$, полученного удалением j-й компоненты.

Обозначим через $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$ множество всех таких наборов Y из E^m при всевозможных натуральных m, что

(i) $|U_0(Y)| > 1$;

(ii) Y не содержит несущественной компоненты;

(iii) если в Y имеются подобные компоненты и набор Y' получен из Y удалением подобной компоненты, то $|U_0(Y')| = 1$. Отметим, что множество $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$ конечное.

$(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальные предикаты характеризует

Теорема 3. *Предикаты ρ_Y, где $Y \in \Upsilon(\widetilde{\varepsilon})$, и только они являются $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальными. Иными словами, имеет место равенство*

$$\Lambda(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon})) = \{\rho_Y \mid Y \in \Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})\}.$$

Доказательству теоремы предпошлём пару вспомогательных утверждений — лемму 2 и её следствие 2.

Лемма 2. *Пусть приведённому предикату p из Π_E, зависящему от m переменных, удовлетворяют наборы $X_1, \ldots, X_n$ из E^m и только они. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(i) *набор X из E^m тогда и только тогда удовлетворяет предикату $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})p$, когда для некоторого числа i из множества $\{1, \ldots, n\}$ выполняется включение $U(X) \subseteq U(X_i)$;*

(ii) *набор X из E^m тогда и только тогда удовлетворяет предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})p$, когда выполняется включение*

$$U(X) \subseteq U(X_1) \cup \ldots \cup U(X_n);$$

(iii) *если предикат p принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}))$, то для любого набора Y из E^m, удовлетворяющего предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})p \setminus p$, верно $|U_0(Y)| > 1$.*

Доказательство. Необходимость утверждений (i) и (ii) следует из определений клонов $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})$ и $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$.

Достаточность. Для произвольного набора X из E^m рассмотрим n-местную функцию f такую, что $f(X_1, \ldots, X_n) = X$, равную c на наборах, не являющихся строками матрицы $\left(X_1^T, \ldots, X_n^T\right)$. Несложно заметить, что функция f принадлежит $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})$, если $U(X) \subseteq U(X_i)$ для некоторого i из $\{1, \ldots, n\}$, и $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$, если $U(X) \subseteq U(X_1) \cup \ldots \cup U(X_n)$. Этого достаточно для доказательства утверждений (i) и (ii). Докажем (iii). Равенство $|U_0(Y)| = 0$ означает, что система $U(Y)$ пустая, и тогда выполняются включения $U(Y) \subseteq U(X_i)$ для всех i из множества $\{1, \ldots, n\}$, откуда в силу (i) набор Y удовлетворяет предикату $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})p$, совпадающему в условиях доказываемого утверждения с p. Равенство $|U_0(Y)| = 1$ означает, что система $U_0(Y)$ содержит в качестве своего единственного элемента некоторое подмножество $u \subseteq \{1, \ldots, n\}$, принадлежащее в силу (ii) некоторой из систем $U(X_i)$. Тогда выполняется включение $U(Y) \subseteq U(X_i)$ и в силу (i) набор Y удовлетворяет предикату $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})p$, в условиях доказываемого утверждения совпадающему с p. Таким образом, $|U_0(Y)| > 1$ в силу (iii). Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Для любого набора Y из E^m справедливы следующие утверждения*:

(i) *предикат ρ_Y принадлежит множеству* $\mathrm{inv}_E(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}))$;

(ii) *при $|U_0(Y)| > 1$ предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})\rho_Y$ удовлетворяют наборы X из E^m такие, что $U(X) \subseteq U(Y)$, и только они. В частности, предикат ρ_Y принадлежит множеству* $\mathrm{inv}_E(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})) \setminus \mathrm{inv}_E(Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$.

Доказательство. Утверждение (i) выполняется в силу леммы 2(i). Докажем (ii). Заметим, что в силу леммы 2 $U(X) \subseteq U(Y)$ для любого набора X из E^m, удовлетворяющего предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})\rho_Y$. В силу этой же леммы достаточно показать, что набор Y удовлетворяет предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})\rho_Y$. Предположим, что систему $U_0(Y)$ составляют множества $u_1, \ldots, u_s$ для некоторого $s > 1$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, s$ предикату ρ_Y удовлетворяет набор Y_i, совпадающий с набором Y по компонентам с номерами из множества u_i и с остальными компонентами, равными c. Вместе с тем выполняется включение $U(Y) \subseteq U(Y_1) \cup \ldots \cup U(Y_s)$. Так как предикат ρ_Y приведённый (поскольку он не тождественно ложный и слабо-центральный), в силу леммы 2 набор Y удовлетворяет предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})\rho_Y$. Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 3. Докажем включение

$$\Lambda(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon})) \subseteq \{\rho_Y | Y \in \Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})\}.$$

Для этого рассмотрим произвольный $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальный предикат p из множества $\Lambda(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$, зависящий от m переменных.

Пусть предикату p удовлетворяют наборы $X_1, \ldots, X_n$ и только они. Выберем набор Y, удовлетворяющий предикату $Q_E(\widetilde{\varepsilon})p \setminus p$, так, что любой набор Z из E^m со свойством $U(Z) \subset U(Y)$ уже не удовлетворяет этому предикату и удовлетворяет предикату p в силу леммы 2. Отметим, что $|U_0(Y)| > 1$ в силу той же леммы.

Рассмотрим предикат $\rho_Y \in \mathrm{inv}_E(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})) \setminus \mathrm{inv}_E(Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$ (по следствию 2). Он является $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$-сужением p (это проверяется с использованием леммы 2 и следствия 2) и совпадает с p в силу $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальности последнего. Таким образом, необходимо показать, что набор Y принадлежит множеству $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$, т. е. обладает свойствами (i)–(iii) из определения этого множества.

Справедливость свойства (i) $|U_0(Y)| > 1$ отмечалась выше.

Далее, если j-я компонента набора Y несущественна, то для набора $Y' = (Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_n)$, полученного удалением этой компоненты, выполняется соотношение (3) (т. е. $\rho_{Y'}$ — j-я проекция предиката ρ_Y) и $|U_0(Y')| = |U_0(Y)|$. Из этого равенства по следствию 2 $\rho_{Y'}$ принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})) \setminus \mathrm{inv}_E(Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$ вслед за предикатом ρ_Y вопреки $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальности последнего. Таким образом, для набора Y выполняется свойство (ii) из определения множества $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$.

Далее, предположим, что i-я и j-я компоненты набора Y подобны при некоторых $i \neq j$. Тогда для набора $Y' = (Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \ldots, Y_n)$, полученного из Y удалением j-й компоненты, выполняется соотношение (4), откуда в силу $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальности ρ_Y предикат $\rho_{Y'}$ принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$. По следствию 2 выполняется неравенство $|U_0(Y')| \leqslant 1$. Равенство $|U_0(Y')| = 0$ невозможно, так как тогда система $U(Y)$ пустая вслед за системой $U(Y')$. Таким образом, в этом случае $|U_0(Y')| = 1$ и для набора Y выполняется свойство (iii) из определения множества $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$.

Из сказанного выше следует, что набор Y принадлежит множеству $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$. Тем самым требуемое включение доказано.

Теперь в силу теоремы 2 для доказательства обратного включения достаточно показать невозможность строгого включения

$$Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Z_0}) \subset Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Y_0})$$

для произвольных наборов Y_0 и Z_0 из множества $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$. Обозначим буквами m и r длины этих наборов.

Пусть предикату ρ_{Y_0} удовлетворяют наборы $Y_1, \ldots, Y_n$ и только они. Пусть также функция f из P_E зависит от n переменных, удовлетворяет соотношению $f^{[m]}(Y_1, \ldots, Y_n) = Y_0$ и принимает значение c на всех наборах, не являющихся строками матрицы $Y = \left(Y_1^T, \ldots, Y_n^T\right)$. Функция f

определена корректно в силу приведённости предиката ρ_{Y_0}, установленной в следствии 2, и принадлежит клону $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$ в силу того же следствия. Она не сохраняет предикат ρ_{Y_0}, а при выполнившемся включении $Q_E(\widetilde{\varepsilon})\cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Z_0}) \subseteq Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Y_0})$ не сохраняет и ρ_{Z_0}. Последнее означает в силу следствия 2, что выполняются соотношения $U(f^{[m]}(Z_1,\dots,Z_n)) = U(Z_0)$ и $U(Z_1) \subset U(Z_0),\dots,U(Z_n) \subset U(Z_0)$ для некоторых наборов $Z_1,\dots,Z_n$. Далее из соображений удобства будем считать, что набор Z_0 совпадает с $f^{[m]}(Z_1,\dots,Z_n)$. Подобная договорённость не ограничивает общности рассуждений, поскольку множество $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$ вместе с любым своим набором Z' содержит всякий набор Z'' такой, что $U(Z') = U(Z'')$, а клоны $Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Z'})$ и $Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Z''})$ в этом случае совпадают.

Так как набор Z_0 не содержит несущественной компоненты и, в частности, компоненты, равной c, то компоненты Z_0 являются одновременно компонентами Y_0, а строки матрицы $Z = \left(Z_1^T,\dots,Z_n^T\right)$ являются одновременно строками матрицы Y, определённой выше. Пусть j-я строка матрицы Z совпадает с $\alpha(j)$-й строкой матрицы Y. Покажем, что $m = r$ и определённая таким образом функция $\alpha : \{1,\dots,r\} \to \{1,\dots,m\}$ является подстановкой.

Рассуждая от противного, предположим, что функция α не сюръективна и выпускает некоторое значение i из множества $\{1,\dots,m\}$. Отметим, что среди $Y_1,\dots,Y_n$ присутствует набор

$$Y_0' = (Y_{0,1},\dots,Y_{0,i-1},c,Y_{0,i+1},\dots,Y_{0,m}),$$

полученный из $Y_0 = (Y_{0,1},\dots,Y_{0,m})$ заменой i-й компоненты $Y_{0,i}$ значением c. Это происходит в силу отсутствия несущественных компонент в наборе Y_0, обеспечивающего включение $U(Y_0') \subset U(Y_0)$. Но тогда некоторый из наборов $Z_1,\dots,Z_n$ совпадает с Z_0; противоречие. Таким образом, $r \geqslant m$, и функция α сюръективна.

Предположим теперь, что эта функция неинъективна и некоторое значение принимает дважды, так что $\alpha(i) = \alpha(j)$ для некоторых различных $i,j \in \{1,\dots,r\}$. Тогда i-я и j-я компоненты совпадают в наборе Z_0. В частности, эти компоненты подобны, и удаление любой из них приводит к набору Z_0' такому, что $|U_0(Z_0')| = 1$. Заметим, что каждая компонента Y_0 содержится в Z_0' (в силу доказанной ранее сюръективности функции α), причём не более одного раза (так как набор Z_0 из $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$ не может содержать более одной пары подобных компонент). Это приводит к равенству $|U_0(Y_0)| = |U_0(Z_0')| = 1$, невозможному для набора Y_0 из множества $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$. Так что $r \leqslant m$, и функция α инъективна.

Таким образом, α — подстановка. Следовательно, клоны $Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Z_0})$ и $Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_{Y_0})$ совпадают. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Доказательство теоремы позволяет отметить ещё одно свойство: *произвольные наборы X и Y из множества $\Upsilon_E(\widetilde{\varepsilon})$ тогда и только тогда определяют один и тот же клон функций из $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$ так, что выполняется равенство*

$$Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_Z) = Q_E(\widetilde{\varepsilon}) \cap \mathrm{pol}_E(\rho_Y),$$

когда эти наборы имеют одинаковую длину, скажем m, и для некоторой подстановки π на множестве чисел $1, \ldots, m$ выполняется равенство

$$U(Z) = U(Y_\pi).$$

Это свойство следует также из леммы 1.

Замечание 4. Клон $\Phi_E(\widetilde{\varepsilon})$ содержит все одноместные функции из $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$. Это относится и к найденным выше $(\Phi_E(\widetilde{\varepsilon}), Q_E(\widetilde{\varepsilon}))$-минимальным клонам, которые, таким образом, являются классами Слупецкого в $Q_E(\widetilde{\varepsilon})$. Как видно, число классов Слупецкого в слабо-центральном клоне может быть значительным. В отличие от этого в клоне P_E (также слабо-центральном) имеется ровно один класс Слупецкого [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агибалов Г. П.** Конечные автоматы на полурешётке. — Томск: Изд-во ТГУ, 1993. — 227 с.
2. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; № 5. — С. 1–9.
3. **Дистель Р.** Теория графов. — Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2002. — 336 с.
4. **Курош А. Г.** Лекции по общей алгебре. — СПб.: Лань, 2005. — 560 с.
5. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: НГУ, 1976. — 100 с.
6. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 2. — С. 5–24.
7. **Марченков С. С.** К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, №1. — С. 88–99.
8. **Парватов Н. Г.** Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикл. дискрет. математика. — 2009. — № 4. — С. 21–28.
9. **Парватов Н. Г.** Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 3. — С. 62–82.

10. **Яблонский С. В.** О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 218, № 2. — С. 302–307.
11. **Яблонский С. В.** Функциональные построения в k-значной логике // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
12. **Baker K. A., Pixley A. F.** Polynomial interpolation and chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z. — 1975. — Bd 143, Heft 2. — S. 165–174.
13. **Geiger D.** Closed systems of functions and predicates // Pacif. J. Math. — 1968. — Vol. 27. — P. 95–100.
14. **Rosenberg J.** Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. Česk. Akad. Věd. Řada Math. Přir. Věd. — 1970. — Vol. 80, N 4. — P. 3–93.

Парватов Николай Георгиевич,
e-mail: parvatov@mail.tsu.ru

Статья поступила
14 июня 2011 г.