ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2011. Том 18, № 6. С. 3–16

УДК 519.8

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ НА УЗКИЕ МЕСТА *)

В. А. Емеличев, В. В. Коротков

Аннотация. Рассматривается многокритериальная минимаксная (bottleneck) задача, в которой оптимизация квадратичных форм ведётся по множествам вершин двух единичных кубов различной размерности (задача с распадающимися переменными). Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости решения, оптимального по Парето, в случае, когда исходные данные задачи подвергаются независимым изменениям.

Ключевые слова: векторная квадратичная булева задача, минимаксные критерии с распадающимися переменными, эффективное решение, радиус устойчивости.

В [7] исследована квазиустойчивость минимаксной лексикографической комбинаторной задачи с распадающимися переменными в случае, когда оптимизация линейных форм велась по двум множествам переменных различной природы: по совокупности подстановок и множеству вершин единичного куба, и получена формула радиуса квазиустойчивости задачи. Ниже исследуется устойчивость эффективного (оптимального по Парето) решения векторной задачи с распадающимися переменными, в которой минимаксная оптимизация квадратичных форм ведётся по двум множествам булевых векторов различной размерности. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости такого решения. Показано, что эффективное решение устойчиво тогда и только тогда, когда оно оптимально по Смейлу (строго эффективно).

1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $A = [a_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$, $m,\, n \geqslant 2$, $s \in \mathbb{N}$, $x \in X \subseteq \mathbb{E}^n$, $y \in Y \subseteq \mathbb{E}^m$, где $\mathbb{E} = \{0,1\}$. Наряду с трёхиндексной матрицей A будем использовать и её двумерные сечения $A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $k \in N_s$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф11К–095).

На множестве булевых векторов (решений) X зададим вектор-функцию

$$f(x, A) = (f_1(x, A_1), f_2(x, A_2), \ldots, f_s(x, A_s)),$$

компонентами которой являются минимаксные критерии квадратичных форм с распадающимися переменными (x и y)

$$f_k(x, A_k) = \max_{y \in Y} \langle A_k x, y \rangle = \max_{y \in Y} \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} a_{ijk} x_j y_i \to \min_{x \in X}, \quad k \in N_s.$$

Отметим, что в теории оптимизации минимаксная концепция занимает видное место. Задачам на узкие места (bottleneck) и методам их решения посвящена обширная литература (см., например, [4, 14, 15, 17, 19]). Известно, что решение антагонистических игр часто сводится к поиску минимакса или максимина [13, 16]. К числу минимаксных задач с распадающимися переменными можно отнести и задачу П. Л. Чебышёва о наилучшем равномерном приближении функций полиномами.

Замечание 1. Очевидно, что в частном случае, когда множество Y состоит из всех столбцов единичной матрицы E порядка m, наши минимаксные критерии квадратичных форм $\min\limits_{x \in X} \max\limits_{y \in Y} \langle A_k x, y \rangle,\ k \in N_s$, превращаются в критерии минимаксного риска Сэвиджа [20] (MINMAX линейных форм)

$$\min_{x \in X} \max_{i \in N_m} A_{ik} x, \quad A_{ik} = (a_{i1k}, a_{i2k}, \ldots, a_{ink}),\ k \in N_s,$$

векторной задачи портфельной оптимизации, сформулированной в [8] на основе инвестиционной теории Марковица [18]. В этом контексте согласно [8] a_{ijk} — величина риска, которому подвергается инвестор, выбирая актив $j \in N_n$ по критерию (виду риска) $k \in N_s$ в том случае, когда финансовый рынок находится в состоянии $i \in N_m$.

В принятых обозначениях под *векторной* (s-критериальной) *квадратичной булевой задачей на узкие места* (bottleneck) будем понимать задачу

$$Z^s(A):\ \min\{f(x, A) \mid x \in X\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

нахождения множества *эффективных* (*оптимальных по Парето*) *решений* $P^s(A) = \{x \in X \mid P^s(x, A) = \varnothing\}$, где

$$P^s(x, A) = \{x' \in X \mid g(x, x', A) \geqslant 0_{(s)} \& g(x, x', A) \neq 0_{(s)}\},$$

$$g(x, x', A) = (g_1(x, x', A_1), g_2(x, x', A_2),\ \ldots, g_s(x, x', A_s)),$$

$$g_k(x, x', A_k) = f_k(x, A_k) - f_k(x', A_k) = \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y}(\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x', y'\rangle),$$

$$k \in N_s, \quad 0_{(s)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^s.$$

В пространстве $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности $d \in \mathbb{N}$ зададим чебышёвскую l_∞ и октаэдральную l_1 нормы: $\|z\|_\infty = \max\{|z_j| \mid j \in N_d\}$ и $\|z\|_1 = \sum\limits_{j \in N_d} |z_j|$. Под *нормой матрицы* с элементами из $\mathbb{R}$ будем понимать норму вектора, составленного из всех её элементов.

Для любых векторов $x \in X$ и $y \in Y$ квадратичная форма может быть оценена снизу следующим образом:

$$\langle A_k x, y\rangle \geqslant -\|A_k\|_\infty \cdot \|x\|_1 \cdot \|y\|_1, \quad k \in N_s. \tag{1}$$

Действительно,

$$\langle A_k x, y\rangle \geqslant -|\langle A_k x, y\rangle| \geqslant -\sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |a_{ijk} x_j y_i|$$
$$\geqslant -\|A_k\|_\infty \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} x_j y_i = -\|A_k\|_\infty \cdot \|x\|_1 \cdot \|y\|_1.$$

Отсюда легко получаем оценку снизу для разности двух квадратичных форм:

$$\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x', y'\rangle \geqslant -\|A_k\|_\infty \cdot \|x + x'\|_1 \max\{\|y\|_1, \|y'\|_1\}, \quad k \in N_s. \tag{2}$$

В дальнейшем будем использовать также очевидное равенство

$$\langle A_k x, y\rangle = \left\langle A_k^T y, x\right\rangle, \tag{3}$$

где $A_k^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица, полученная из сечения $A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ путём транспонирования.

Следуя [6, 8, 9], *радиусом устойчивости* решения $x^0 \in P^s(A)$ векторной задачи $Z^s(A)$ назовём число

$$\rho^s(x^0, A) = \begin{cases} \sup\ \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 \mid \forall B \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \in P^s(A + B))\},$$

$\Omega(\varepsilon) = \{B \in \mathbb{R}^{m \times n \times s} \mid \|B\|_\infty < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $P^s(A + B)$ — множество эффективных решений возмущённой задачи $Z^s(A + B)$.

Таким образом, радиус устойчивости задаёт предельный уровень независимых возмущений элементов матрицы A, сохраняющих эффективность решения.

Очевидна следующая

Лемма 1. *Пусть $x^0 \in P^s(A)$, $\gamma > 0$. Если при каждой возмущающей матрице $B \in \Omega(\gamma)$ и любом векторе $x \in X \setminus \{x^0\}$ найдётся такой индекс $h \in N_s$, что справедливо неравенство $g_h(x, x^0, A_h + B_h) > 0$, то $x^0 \in P^s(A + B)$ при $B \in \Omega(\gamma)$.*

2. Оценки радиуса устойчивости

Положим

$$\varphi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max_{k \in N_s} \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \frac{\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x^0, y'\rangle}{\|x + x^0\|_1},$$

$$\mu_{\max} = \max\{\|y\|_1 \mid y \in Y\}.$$

Теорема 1. *Для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, A)$, $s \in \mathbb{N}$, любого эффективного решения x^0 векторной задачи на узкие места $Z^s(A)$ справедлива нижняя оценка*

$$\rho^s(x^0, A) \geqslant \varphi/\mu_{\max}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(A)$. Тогда любой вектор $x \in X \setminus \{x^0\}$ не принадлежит множеству $P^s(x^0, A)$, поэтому $\varphi \geqslant 0$. При $\varphi = 0$ неравенство (4) очевидно. Далее будем полагать, что $\varphi > 0$.

Возьмём любой вектор $x \in X \setminus \{x^0\}$. Тогда согласно определению числа φ существует такой индекс $h = h(x) \in N_s$, что

$$\min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \left(\langle A_h x, y\rangle - \langle A_h x^0, y'\rangle\right) \geqslant \varphi \|x + x^0\|_1. \tag{5}$$

Учитывая (2), для любого сечения B_k, $k \in N_s$, произвольной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ имеем

$$\begin{aligned} g_k(x, x^0, A_k + B_k) &= \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} (\langle (A_k + B_k)x, y\rangle - \langle (A_k + B_k)x^0, y'\rangle) \\ &= \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} (\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x^0, y'\rangle + \langle B_k x, y\rangle - \langle B_k x^0, y'\rangle) \\ &\geqslant \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \left(\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x^0, y'\rangle\right) - \mu_{\max}\|B_k\|_\infty \cdot \|x + x^0\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5), полагая, что $B \in \Omega(\varphi/\mu_{\max})$, получаем

$$g_h(x, x^0, A_h + B_h) \geqslant (\varphi - \mu_{\max}\|B_h\|_\infty)\|x + x^0\|_1 \\ \geqslant (\varphi - \mu_{\max}\|B\|_\infty)\|x + x^0\|_1 > 0.$$

Поэтому согласно лемме включение $x^0 \in P^s(A+B)$ имеет место при любой возмущающей матрице $B \in \Omega(\varphi/\mu_{\max})$. Следовательно, $\rho^s(x^0, A) \geqslant \varphi/\mu_{\max}$. Теорема 1 доказана.

Положим

$$\psi = \min_{x \in X\setminus\{x^0\}} \max_{k \in N_s} \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \frac{\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x^0, y'\rangle}{\|x - x^0\|_1},$$

а для каждого индекса $\mu \in N_{m-1}$ зададим множество μ-однородных булевых векторов

$$\mathbb{E}^m(\mu) = \{y \in \mathbb{E}^m \mid \|y\|_1 = \mu\}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Для любого индекса $\mu \in N_{m-1}$ справедливо утверждение: если $Y \subseteq \mathbb{E}^m(\mu)$, то для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, A)$, $s \in \mathbb{N}$, эффективного решения x^0 векторной задачи на узкие места $Z^s(A)$ верна верхняя оценка*

$$\rho^s(x^0, A) \leqslant \psi/\mu. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(A)$, $\mu \in N_{m-1}$. С учётом (3) из определения числа ψ следует существование такого вектора $x^* \in X\setminus\{x^0\}$, что

$$g_k(x^*, x^0, A_k) = \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \left(\left\langle A_k^T y, x^*\right\rangle - \left\langle A_k^T y', x^0\right\rangle\right) \\ \leqslant \psi\|x^* - x^0\|_1, \quad k \in N_s. \tag{8}$$

Для доказательства неравенства (7) достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > \psi/\mu \; \exists B \in \Omega(\varepsilon) \; (x^0 \notin P^s(A + B)), \tag{9}$$

т. е. что x^0 не является эффективным решением возмущённой задачи $Z^s(A+B)$. Для этого построим при каждом индексе $k \in N_s$ такое сечение B_k возмущающей матрицы B, что выполнены условия

$$\psi/\mu < \|B_k\|_\infty < \varepsilon, \tag{10}$$

$$g_k(x^*, x^0, A_k + B_k) < 0. \tag{11}$$

Пусть $\varepsilon > \psi/\mu$. Элементы сечения $B_k = [b_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ зададим по правилу

$$b_{ijk} = \begin{cases} \delta, & \text{если } i \in N_m,\ x_j^0 \geqslant x_j^*, \\ -\delta, & \text{если } i \in N_m,\ x_j^0 < x_j^*, \end{cases}$$

где $\psi/\mu < \delta < \varepsilon$. Отсюда $\|B\|_\infty = \|B_k\|_\infty = \delta$, поэтому выполняются неравенства (10). Обозначим j-ю компоненту вектор-столбца $B_k^T y$ через $\left[B_k^T y\right]_j$, $j \in N_n$. Тогда, учитывая μ-однородность векторов множества Y (см. (6)), для любого вектора $y \in Y$ имеем

$$\left[B_k^T y\right]_j = \begin{cases} \mu\delta, & \text{если } x_j^0 \geqslant x_j^*, \\ -\mu\delta, & \text{если } x_j^0 < x_j^*, \end{cases}$$

т. е. вектор $B_k^T y$ не зависит от y и k. Обозначив этот вектор-столбец через C, заключаем, что справедливы равенства

$$\left\langle B_k^T y, x^* \right\rangle = \langle C, x^* \rangle, \quad \left\langle B_k^T y, x^0 \right\rangle = \langle C, x^0 \rangle.$$

В результате для любых векторов $y, y' \in Y$ получаем

$$\left\langle B_k^T y, x^* \right\rangle - \left\langle B_k^T y', x^0 \right\rangle = \langle C, x^* - x^0 \rangle = -\mu\delta \|x^* - x^0\|_1.$$

Отсюда ввиду неравенств (8) и того, что $\psi < \mu\delta$, имеем

$$\begin{aligned} g_k(x^*, x^0, A_k + B_k) &= \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \left(\left\langle \left(A_k^T + B_k^T\right) y, x^* \right\rangle - \left\langle \left(A_k^T + B_k^T\right) y', x^0 \right\rangle \right) \\ &= \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \left(\left\langle A_k^T y, x^* \right\rangle - \left\langle A_k^T y', x^0 \right\rangle + \left\langle B_k^T y, x^* \right\rangle - \left\langle B_k^T y', x^0 \right\rangle \right) \\ &= g_k(x^*, x^0, A_k) - \mu\delta \|x^* - x^0\|_1 \leqslant (\psi - \mu\delta)\ \|x^* - x^0\|_1 < 0, \end{aligned}$$

т. е. справедливо неравенство (11). Тем самым верна формула (9). Следовательно, выполняется неравенство (7). Теорема 2 доказана.

Задачу $Z^s(A)$ назовём *однородной*, если существует число $\mu \in N_{m-1}$ такое, что $Y \subseteq \mathbb{E}^m(\mu)$.

Следствие 1. *Для радиуса устойчивости решения $x^0 \in P^s(A)$ любой однородной задачи $Z^s(A)$ справедлива верхняя оценка $\rho^s(x^0, A) \leqslant \psi$.*

Замечание 2. Учитывая замечание 1, легко понять, что из теоремы 1 и следствия 1 вытекают следующие оценки для радиуса устойчивости эффективного решения x^0 векторной задачи портфельной оптимизации [8] (являющейся частным случаем нашей задачи $Z^s(A)$ при $Y = \mathbb{E}^m(1)$):

$$\varphi \leqslant \rho^s(x^0, A) \leqslant \psi, \tag{12}$$

где

$$\varphi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max_{k \in N_s} \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} \frac{A_{ik}x - A_{i^0k}x^0}{\|x + x^0\|_1},$$

$$\psi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max_{k \in N_s} \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} \frac{A_{ik}x - A_{i^0k}x^0}{\|x - x^0\|_1}.$$

3. Достижимость оценок

Очевидно, что частным случаем нашей задачи $Z^s(A)$ (так же, как и векторной задачи портфельной оптимизации [8]) является s-критериальная задача булева программирования с линейными критериями

$$A_k x \to \min_{x \in X}, \quad k \in N_s, \tag{13}$$

где $A_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $k \in N_s$, — k-е сечение матрицы $A \in \mathbb{R}^{1 \times n \times s}$, $X \subseteq \mathbb{E}^n$. В этом случае верхняя оценка ψ (см. (12)) радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, A)$ принимает вид

$$\psi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max_{k \in N_s} \frac{A_k(x - x^0)}{\|x - x^0\|_1}.$$

Как известно [9, 11], правая часть этого равенства является выражением для радиуса устойчивости эффективного решения x^0 векторной задачи (13). Таким образом, в этом частном случае имеем $\rho^s(x^0, A) = \psi$, что свидетельствует о достижимости верхней оценки.

Кроме того, из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть $Y \subseteq \mathbb{E}^m(\mu)$, $\mu \in N_{m-1}$, и для решения $x^0 \in P^s(A)$ выполняется условие*

$$\forall x \in X \setminus \{x^0\} \, (\|x + x^0\|_1 = \|x - x^0\|_1).$$

Тогда при любом индексе $\mu \in N_{m-1}$ справедливы равенства

$$\rho^s(x^0, A) = \varphi/\mu = \psi/\mu.$$

Следующее утверждение свидетельствует о том, что радиус устойчивости эффективного решения x^0 может равняться верхней оценке ψ/μ и не совпадать с нижней оценкой.

Следствие 3. *При любом индексе $\mu \in N_{m-1}$ существует такой класс векторных задач $Z^s(A)$, что для радиуса устойчивости эффективного решения x^0 всякой задачи этого класса справедливы соотношения*

$$0 < \varphi/\mu < \rho^s(x^0, A) = \psi/\mu. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\varphi > 0$, $Y = \{y^0\}$, $y^0 \in \mathbb{E}^m(\mu)$, $\mu \in N_{m-1}$, $x^0 \in P^s(A)$. Для выполнения неравенства $\varphi < \psi$ достаточно считать, что $\|x + x^0\|_1 > \|x - x^0\|_1$ для любого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$. Тогда согласно теоремам 1 и 2 имеем

$$0 < \varphi/\mu \leqslant \rho^s(x^0, A) \leqslant \psi/\mu. \tag{15}$$

Для доказательства достижимости верхней оценки достаточно показать, что $\rho^s(x^0, A) \geqslant \psi/\mu$. Дальнейшее изложение и посвящено этому.

Согласно определению числа ψ для всякого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$ существует такой индекс $h = h(x) \in N_s$, что

$$\langle A_h(x - x^0), y^0\rangle \geqslant \psi\|x - x^0\|_1.$$

Отсюда, учитывая (1) и полагая $B \in \Omega(\psi/\mu)$, для любого $x \neq x^0$ получаем

$$\begin{aligned} g_h(x, x^0, A_h + B_h) = \langle (A_h + B_h)(x - x^0), y^0\rangle \\ \geqslant \langle A_h(x - x^0), y^0\rangle - \mu\|B_h\|_\infty \cdot \|x - x^0\|_1 \\ \geqslant (\psi - \mu\|B\|_\infty)\|x - x^0\|_1 > 0. \end{aligned}$$

Поэтому в силу леммы 1 вектор x^0 является эффективным решением возмущённой задачи $Z^s(A + B)$ при любой матрице $B \in \Omega(\psi/\mu)$. Это значит, что $\rho^s(x^0, A) \geqslant \psi/\mu$. Отсюда и из (15) получаем (14). Следствие 3 доказано.

Из теорем 1 и 2 вытекает также следствие, свидетельствующее о том, что радиус устойчивости эффективного решения x^0 может равняться нижней положительной оценке и не совпадать с верхней.

Следствие 4. *Существует такой класс векторных задач $Z^s(A)$, что для радиуса устойчивости эффективного решения x^0 любой задачи этого класса справедливы соотношения*

$$0 < \rho^s(x^0, A) = \varphi/\mu < \psi/\mu, \quad \mu \in N_{[n/2]}, \tag{16}$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Доказательство. Пусть $X = \{x^0, x^*\} \subset \mathbb{E}^n$, $x^0 \in P^s(A)$, $Y = \{y', y''\}$, y', $y'' \in \mathbb{E}^m(\mu)$, $\varphi > 0$. Будем предполагать, что

$$\Delta = |N(x^0) \cap N(x^*)| \geqslant 1, \quad N(y') \cap N(y'') = \varnothing,$$

где $N(z) = \{j \in N_p \mid z_j = 1\}$, $z \in \mathbb{E}^p$. Тем самым $1 \leqslant \mu \leqslant [n/2]$, $\|x^* + x^0\|_1 > \|x^* - x^0\|_1 > 0$, и поэтому необходимое условие $\varphi < \psi$ будет выполняться. Для доказательства равенства $\rho^s(x^0, A) = \varphi/\mu$ согласно теореме 1 достаточно выделить класс задач таких, что $\rho^s(x^0, A) \leqslant \varphi/\mu$.

Непосредственно из определения числа φ выводим неравенства

$$g_k(x^*, x^0, A_k) \leqslant \varphi \|x^* + x^0\|_1, \quad k \in N_s. \tag{17}$$

Дальнейшее изложение проведём для произвольного индекса $k \in N_s$. Введём обозначения:

$$y^0 = y^0(k) = \arg\max_{y \in Y} \langle A_k x^0, y \rangle, \tag{18}$$

$$y^* = y^*(k) = \arg\max_{y \in Y} \langle A_k x^*, y \rangle. \tag{19}$$

Это значит, что

$$\langle A_k x^0, y^0 - y^* \rangle \geqslant 0, \quad \langle A_k x^*, y^* - y^0 \rangle \geqslant 0.$$

Более того, будем считать, что выполняется неравенство

$$\langle A_k x^*, y^* - y^0 \rangle > 2\varphi\Delta, \tag{20}$$

из которого следует, что $y^0 \neq y^*$, поскольку $\varphi\Delta > 0$.

Для любого числа $\varepsilon > \varphi/\mu$ элементы сечения $B_k = [b_{ijk}]$ возмущающей матрицы B зададим по правилу

$$b_{ijk} = \begin{cases} \delta, & \text{если } x_j^0 = y_i^0 = 1, \\ -\delta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\varphi/\mu < \delta < \min\left\{\varepsilon,\ \frac{1}{2\Delta\mu}\langle A_k x^*, y^* - y^0 \rangle\right\}. \tag{21}$$

Очевидно, что последнее неравенство корректно в силу (20). Учитывая строение матрицы B_k и равенство $N(y^0) \cap N(y^*) = \varnothing$, получаем

$$\langle B_k x^0, y^0 \rangle = \delta\mu \|x^0\|_1, \tag{22}$$

$$\langle B_k x^0, y^* \rangle = -\delta\mu \|x^0\|_1, \tag{23}$$

$$\langle B_k x^*, y^* \rangle = -\delta\mu \|x^*\|_1, \tag{24}$$

$$\|B_k\|_\infty = \|B\|_\infty = \delta.$$

Кроме того, воспользовавшись очевидными равенствами

$$|\{j \in N_n \mid x_j^0 = x_j^* = 1\}| = \Delta, \quad |\{j \in N_n \mid x_j^0 = 0,\ x_j^* = 1\}| = \|x^*\|_1 - \Delta,$$

легко убедиться, что

$$\langle B_k x^*, y^0 \rangle = \delta\mu(2\Delta - \|x^*\|_1). \tag{25}$$

Докажем неравенство $g_k(x^*, x^0, A_k + B_k) < 0$. Последовательно учитывая (22), (23) и (18), выводим

$$\begin{aligned} f_k(x^0, A_k + B_k) &= \max\{\langle (A_k + B_k)x^0, y^0 \rangle, \langle (A_k + B_k)x^0, y^* \rangle\} \\ &= \max\{\langle A_k x^0, y^0 \rangle + \delta\mu\|x^0\|_1, \langle A_k x^0, y^* \rangle - \delta\mu\|x^0\|_1\} \\ &= f_k(x^0, A_k) + \delta\mu\|x^0\|_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Покажем, что выполняется равенство

$$f_k(x^*, A_k + B_k) = f_k(x^*, A_k) - \delta\mu\|x^*\|_1. \tag{27}$$

Полагая $F^* = \langle (A_k + B_k)x^*, y^* \rangle$, $F^0 = \langle (A_k + B_k)x^*, y^0 \rangle$, имеем

$$f_k(x^*, A_k + B_k) = \max\{F^*, F^0\}.$$

Применяя (24), получаем

$$F^* = \langle A_k x^*, y^* \rangle - \delta\mu\|x^*\|_1, \tag{28}$$

а используя (25), находим

$$F^0 = \langle A_k x^*, y^0 \rangle + \delta\mu(2\Delta - \|x^*\|_1).$$

Поэтому ввиду (21)

$$F^* - F^0 = \langle A_k x^*, y^* - y^0 \rangle - 2\delta\Delta\mu > 0.$$

Отсюда, воспользовавшись (19) и (28), выводим равенство (27).

Наконец, последовательно применяя (26), (27), (17) и (21), получаем необходимое неравенство

$$\begin{aligned} g_k(x^*, x^0, A_k + B_k) &= g_k(x^*, x^0, A_k) - \delta\mu\|x^* + x^0\|_1 \\ &\leqslant (\varphi - \delta\mu)\|x^* + x^0\|_1 < 0, \end{aligned}$$

выполненное для любого индекса $k \in N_s$, поэтому $x^* \in P^s(x^0, A+B)$ и верна формула

$$\forall \varepsilon > \varphi/\mu\ \exists B \in \Omega(\varepsilon)\ (x^0 \notin P^s(A+B)),$$

которая ввиду $x^0 \in P^s(A)$ даёт оценку$\rho^s(x^0, A) \leqslant \varphi/\mu$.

Следовательно, в силу теорем 1 и 2 верны соотношения (16). Следствие 4 доказано.

Приведём числовой пример, иллюстрирующий утверждение следствия 4.

Пример. Пусть $m = 2$, $n = 3$, $s = 1$; $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (1,1,0)^T$, $x^* = (0,1,1)^T$; $Y = \{y', y''\}$, $y' = (0,1)^T$, $y'' = (1,0)^T$;

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|x^* + x^0\|_1 = 4$, $\|x^* - x^0\|_1 = 2$, $\mu = 1$,

$$f(x^0, A) = \max\{\langle Ax^0, y^1\rangle, \langle Ax^0, y^2\rangle\} = \max\{0, -3\} = 0,$$

$$f(x^*, A) = \max\{\langle Ax^*, y^1\rangle, \langle Ax^*, y^2\rangle\} = \max\{-1, 4\} = 4.$$

Таким образом, x^0 — оптимальное решение задачи $Z^1(A)$, $\varphi = 1$, $\psi = 2$,

$$\langle Ax^*, y^* - y^0\rangle = 5 > 2 = 2\varphi\Delta \quad (\text{см. } (20)).$$

При возмущающей матрице $B = \begin{pmatrix} -\delta & -\delta & -\delta \\ \delta & \delta & -\delta \end{pmatrix}$, где $1 < \delta < 2.5$, имеем $\|B\|_\infty = \delta$, $f(x^0, A+B) = 2\delta > 4 - 2\delta = f(x^*, A+B)$. Поэтому $x^0 \notin P^1(A+B)$, т. е. $\rho^1(x^0, A) \leqslant 1$. Следовательно, в силу теорем 1 и 2 получаем $\rho^1(x^0, A) = \varphi = 1 < \psi = 2$.

4. Условия устойчивости

Эффективное решение $x^0 \in P^s(A)$ такое, что $\rho^s(x^0, A) > 0$, назовём *устойчивым*. Кроме того, введём множество *строго эффективных* (*оптимальных по Смейлу* [21]) *решений* задачи $Z^s(A)$:

$$\mathrm{Sm}^s(A) = \{x \in X \mid \forall x' \in X \setminus \{x\} \exists h \in N_s (f_h(x',\ A_h) > f_h(x,\ A_h))\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Sm}^s(A) \subseteq P^s(A)$ при любой матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$. Кроме того, понятно, что множество $\mathrm{Sm}^s(A)$ может быть пустым.

Следствие 5. *Если $Y \subseteq \mathbb{E}^m(\mu)$, $\mu \in N_{m-1}$, то для эффективного решения x^0 векторной задачи $Z^s(A)$ следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *решение x^0 строго эффективно*;

(ii) *решение x^0 устойчиво*;

(iii) $\varphi > 0$.

Доказательство. (i)⇒(ii). Если решение x^0 задачи $Z^s(A)$ строго эффективно, то для любого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$ имеем

$$\xi(x) = \max_{k \in N_s} \min_{y' \in Y} \max_{y \in Y} \frac{\langle A_k x, y\rangle - \langle A_k x^0, y'\rangle}{\|x + x^0\|_1} \\ = \max_{k \in N_s} \frac{f_k(x, A_k) - f_k(x^0, A_k)}{\|x + x^0\|_1} > 0.$$

Поэтому в силу теоремы 1 для радиуса устойчивости верна оценка

$$\rho^s(x^0, A) \geqslant \varphi/\mu = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \xi(x)/\mu > 0,$$

т. е. решение x^0 устойчиво.

(ii)⇒(iii). Пусть решение $x^0 \in P^s(A)$ устойчиво. Тогда $\psi \geqslant \rho^s(x^0, A) > 0$ согласно теореме 2. Поэтому для любого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$ имеем

$$\max_{k \in N_s} \frac{f_k(x, A_k) - f_k(x^0, A_k)}{\|x - x^0\|_1} > 0.$$

Это означает, что для всякого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$ существует такой индекс $h \in N_s$, что $f_h(x, A_h) > f_h(x^0, A_h)$, т. е. $\varphi > 0$.

(iii)⇒(i). Эта импликация очевидна согласно теореме 1. Следствие 5 доказано.

Следствие 6. *Если $x^0 \in P^s(A)$, то $\rho^s(x^0, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$.*

Замечание 3. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерных линейных пространствах (см., например, [12]) результат разд. 4 справедлив при любых нормах в пространстве $\mathbb{R}^{m \times n \times s}$ параметров задачи $Z^s(A)$.

В заключение отметим, что среди задач на узкие места широко известны и задачи со связанными переменными [15], т. е. с критериями вида

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y(x)} f(x, y).$$

Получению количественных и качественных характеристик различных видов устойчивости как скалярных, так и векторных минимаксных дискретных задач с такими критериями посвящён ряд работ (см., например, [1–3, 5, 10] и указанную в них литературу).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гордеев Э. Н., Калиновский М. А.** Об устойчивости решений в задачах вычислительной геометрии // Кибернетика и систем. анализ. — 1999. — № 2. — С. 3–14.
2. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 66–72.
3. **Гуревский Е. Е., Емеличев В. А.** О пяти типах устойчивости лексикографического варианта комбинаторной задачи на узкие места // Дискрет. математика. — 2009. — Т. 21, вып. 3. — С. 3–13.
4. **Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.** Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
5. **Емеличев В. А., Гуревский Е. Е.** О ядре устойчивости многокритериальной комбинаторной минимаксной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 6–19.
6. **Емеличев В. А., Карелкина О. В.** Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гёльдера // Дискрет. математика. — 2009. — Т. 21, вып. 2. — С. 43–50.
7. **Емеличев В. А., Карпук А. В., Кузьмин К. Г.** О квазиустойчивости лексикографической минимаксной комбинаторной задачи с распадающимися переменными // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 32–45.
8. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** Оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 41–50.
9. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 79–83.
10. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач «на узкие места» в терминах бинарных отношений // Кибернетика и сист. анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.
11. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 47–69.

12. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2009. — 572 с.
13. **Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Сёмина Е. А.** Теория игр. — М.: Высш. шк., 1998. — 304 с.
14. **Сухарев А. Г.** Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. — М.: Либреком, 2009. — 304 с.
15. **Фёдоров В. В.** Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979. — 278 с.
16. **Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 707 с.
17. **Daskin M. S.** Network and discrete location: models, algorithms and applications. — New York: John Wiley & Sons, 1995. — 520 p.
18. **Markowitz H. M.** Portfolio selection: efficient diversification of investments. — Oxford: Blackwell Publ., 1991. — 384 p.
19. Minimax and applications. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. — 308 p.
20. **Savage L. J.** The foundations of statistics. — New York: Dover Publ., 1972. — 310 p.
21. **Smale S.** Global analysis and economics. V: Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — Vol. 1, N 3. — P. 213–221.

Емеличев Владимир Алексеевич
e-mail: emelichev@bsu.by, emelichev@tut.by
Коротков Владимир Владимирович
e-mail: wladko@tut.by

Статья поступила
16 мая 2011 г.