

УДК 519.174

## ЦИКЛЫ ДЛИНЫ ДЕВЯТЬ В РАНСАКЕ ГРАФЕ \*)

Е. В. Константинова, А. Н. Медведев

**Аннотация.** В Рансаке графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , являющемся графом Кэли на симметрической группе перестановок с порождающим множеством всех префикс-реверсалов, существуют все циклы длины  $l$ , где  $6 \leq l \leq n!$ . Полная характеристика циклов длины шесть и семь, представленных в виде произведения порождающих элементов, получена недавно. В настоящей статье продолжены исследования циклов нечётной длины в данном графе. Для циклов длины девять получено их полное описание в виде 10 канонических форм и показано, что через любую вершину графа  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , проходит  $\frac{8n^3 - 45n^2 + 61n - 12}{2}$  различных циклов длины девять. В целом, в графе имеется  $O(n!n^3)$  циклов длины девять.

**Ключевые слова:** граф Кэли, симметрическая группа, Рансаке граф, вложение циклов.

### Введение

Граф Кэли  $P_n = (\text{Sym}_n, \text{PR})$ ,  $n \geq 2$ , определённый на симметрической группе  $\text{Sym}_n$  перестановок  $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n]$ , где  $\pi_i = \pi(i)$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ , с порождающим множеством  $\text{PR} = \{r_i \in \text{Sym}_n, 2 \leq i \leq n\}$  всех префикс-реверсалов  $r_i$ , меняющих порядок элементов внутри интервала  $[1, i]$ ,  $2 \leq i \leq n$ , перестановки  $\pi$  при умножении на неё справа:  $[\pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_n] r_i = [\pi_i \dots \pi_1 \pi_{i+1} \dots \pi_n]$ , называют *Pancake графом*. Данный граф получил своё название благодаря Рансаке проблеме [4], состоящей в определении диаметра графа  $P_n$ ,  $n \geq 2$ . Данная проблема является открытой, известны верхние и нижние оценки на диаметр графа [5, 6], а также его точные значения для  $2 \leq n \leq 19$  [2, 3]. Трудности, возникающие при решении Рансаке проблемы, связаны, в первую очередь, со сложной циклической структурой данного графа, которая исследовалась в [7, 9] и может быть представлена следующей теоремой.

**Теорема 1.** Все циклы длины  $l$ , где  $6 \leq l \leq n!$ , вкладываются в граф  $P_n$ ,  $n \geq 3$ .

---

\*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00244).

В частности, как следует из теоремы 1, Рамсаке граф является гамильтоновым [10], без треугольников и без циклов длины четыре и пять.

Естественным описанием циклов в Рамсаке графе является их представление в виде произведения порождающих элементов. В [1] *формой цикла  $C_l$  длины  $l$*  в графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , называется последовательность префикс-реверсалов

$$C_l = r_{i_1} \dots r_{i_l},$$

где  $2 \leq i_j \leq n$  и  $i_j \neq i_{j+1} ((j+1) \bmod l)$  для любого  $j \in \{1, \dots, l\}$ , таких, что  $\pi r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$ , где  $\pi \in \text{Sym}_n$ . Цикл  $C_l$  длины  $l$  также называют  *$l$ -циклом*, а под вершиной графа  $P_n$  понимается перестановка, которая этой вершине соответствует. Очевидно, что в зависимости от выбора вершины  $\pi$  и направления обхода любой  $l$ -цикл может быть представлен  $2l$  его формами. *Канонической формой цикла  $C_l$  длины  $l$*  называется форма с лексикографически максимальной (минимальной) последовательностью индексов  $i_1 \dots i_l$ . В формах со сложной системой индексации выбрать каноническую форму не всегда бывает возможно, поэтому в таких случаях под канонической понимается форма, которая «почти всегда» является канонической.

На основе данного описания получена характеристика циклов длины шесть и семь [1].

**Теорема 2.** В графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , имеется  $n!/6$  независимых циклов длины шесть канонической формы  $C_6 = r_3 r_2 r_3 r_2 r_3 r_2$ .

**Теорема 3.** В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , через каждую его вершину проходит  $7(n-3)$  различных циклов длины семь канонической формы

$$C_7 = r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-2} r_k r_2,$$

где  $4 \leq k \leq n$ . В целом, в графе имеется  $n!(n-3)$  различных циклов длины семь.

В настоящей статье продолжены исследования циклов нечётной длины. Для 9-циклов получена

**Теорема 4.** В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , через каждую его вершину проходит  $N = (8n^3 - 45n^2 + 61n - 12)/2$  различных циклов длины девять следующих канонических форм:

$$C_9^1 = r_k r_{k-1} r_i r_{k-1} r_k r_i r_{i-1} r_{i+1} r_2, \quad 3 \leq i \leq k-2, \quad 5 \leq k \leq n, \quad (1)$$

$$C_9^2 = r_2 r_{k-i+2} r_k r_{i-2} r_{i-1} r_i r_{i-1} r_k r_{k-i+2}, \quad 4 \leq i \leq k-1, \quad 5 \leq k \leq n, \quad (2)$$

$$C_9^3 = r_k r_{k-i} r_{k-1} r_{k-j+i-1} r_{k-j} r_k r_{j-i+1} r_j r_i, \quad 2 \leq i < j \leq k-2, \\ 5 \leq k \leq n, \quad (3)$$

$$C_9^4 = r_k r_{k-1} r_i r_{i-1} r_{k-1} r_k r_i r_{i+1} r_2, \quad 3 \leq i \leq k-2, \quad 5 \leq k \leq n, \quad (4)$$

$$C_9^5 = r_k r_{k-1} r_{k-2} r_{k-1} r_{k-2} r_k r_3 r_k r_{k-2}, \quad 4 \leq k \leq n, \quad (5)$$

$$C_9^6 = r_k r_{k-1} r_{k-2} r_i r_k r_2 r_k r_i r_{k-1}, \quad 2 \leq i \leq k-3, \quad 5 \leq k \leq n, \quad (6)$$

$$C_9^7 = r_k r_{k-j+i} r_k r_j r_i r_k r_{k-j} r_{k-i} r_{j-i}, \quad 2 \leq i \leq j-2, \\ i+2 \leq j \leq k-2, \quad 6 \leq k \leq n, \quad (7)$$

$$C_9^8 = r_k r_{k-j+i} r_{k-j} r_k r_j r_i r_k r_{k-i} r_{j-i}, \quad 2 \leq i \leq j-2, \\ i+2 \leq j \leq k-2, \quad 6 \leq k \leq n, \quad (8)$$

$$C_9^9 = r_k r_{k-j+i} r_{k-j+1} r_k r_j r_i r_k r_{k-i+1} r_{j-i+1}, \quad 2 \leq i < j \leq k-1, \\ 4 \leq k \leq n, \quad (9)$$

$$C_9^{10} = r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-3} r_k r_3, \quad 5 \leq k \leq n. \quad (10)$$

Из теоремы 4 вытекает

**Следствие 1.** В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , имеется  $\frac{n!N}{9}$  различных циклов длины девять.

В доказательстве теоремы 4 используется иерархическое строение графа, состоящее в том, что  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , содержит  $n$  копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , в каждой из которых множество вершин представлено как

$$V_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], \text{ где } \pi_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, 1 \leq k \leq n-1\},$$

$|V_i| = (n-1)!$ , а множество рёбер представлено в виде

$$E_i = \{ \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], [\pi_1 \dots \pi_{n-1} i] r_j\}, 2 \leq j \leq n-1\},$$

$|E_i| = \frac{(n-1)!(n-2)}{2}$ . Любые две копии  $P_{n-1}(i)$ ,  $P_{n-1}(j)$ ,  $i \neq j$ , соединяются  $(n-2)!$  рёбрами вида  $\{[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j], [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i]\}$ , где

$$[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j] r_n = [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i].$$

Префикс-реверсалы  $r_j$ ,  $2 \leq j \leq n-1$ , определяют *внутренние рёбра* в каждой из  $n$  копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , а префикс-реверсал  $r_n$  определяет

внешние рёбра между копиями. Копии  $P_{n-1}(i)$  ещё называют  $(n-1)$ -копиями. Циклы длины девять формируются из путей длины  $l$ ,  $2 \leq l \leq 7$ , принадлежащих различным  $(n-1)$ -копиям графа.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приводится доказательство технических лемм, описывающих все пути длины три и четыре между вершинами заданного вида. При этом рассматриваются только случаи, которые возникают в доказательстве теоремы 4, приводимом в разд. 2. Некоторые общие случаи характеристики циклов нечётной длины в графе даются в разд. 3.

### 1. Вспомогательные утверждения

Введём дополнительные определения и обозначения.

*Сегментом*  $[\pi_i \dots \pi_j]$  перестановки  $\pi = [\pi_1 \dots \pi_i \dots \pi_j \dots \pi_n]$  называют все элементы, заключённые между  $\pi_i$  и  $\pi_j$  включительно. Любая перестановка может быть представлена в виде одноэлементных и многоэлементных сегментов, для обозначения которых используются символы  $\{i, j, p, q, k\}$  и  $\{\alpha, \beta, \gamma, A, B, C\}$  соответственно. Если  $\pi = [\alpha \beta]$ , где  $\alpha = [\pi_1 \dots \pi_i]$ ,  $\beta = [\pi_{i+1} \dots \pi_n]$ , то в записи  $\pi r_{|\alpha|} = [\bar{\alpha} \beta]$  под  $|\alpha|$  понимается число элементов в сегменте  $\alpha$ , где  $|\alpha| \geq 2$ , а под  $\bar{\alpha}$  понимается сегмент, получающийся инверсией элементов  $\alpha$ . Очевидно, что  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ .

*Расстояние*  $d = d(\pi, \tau)$  между вершинами  $\pi, \tau \in P_n$  определяется как наименьшее число префикс-реверсалов, переводящих  $\pi$  в  $\tau$ , т. е.  $\pi r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_d} = \tau$ .

Рассмотрим пути длины три в графе, при этом будем различать пути между произвольными вершинами графа и пути между вершинами одного и того же эффективного доминирующего множества графа. Напомним, что *эффективным доминирующим множеством графа* называется независимое множество  $D$  такое, что каждая вершина не из  $D$  смежна ровно с одной вершиной в  $D$ . В [8] показано, что множества вида  $D_p = \{[p \pi_2 \dots \pi_n], \pi_j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}, 2 \leq j \leq n\}$ ,  $|D_p| = (n-1)!$ ,  $p = 1, \dots, n$ , являются эффективными доминирующими множествами в графе  $P_n$ . Отметим также, что внешние рёбра графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , инцидентны вершинам, принадлежащим различным эффективным доминирующим множествам в графе  $P_n$ .

Следующая лемма даёт полное описание всех путей длины три между вершинами одного и того же эффективного доминирующего множества графа.

**Лемма 1.** *Две перестановки  $\pi, \tau \in D_p$ ,  $p \in \{1, \dots, n\}$ , находятся на расстоянии три друг от друга в графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , тогда и только тогда,*

когда

(i) либо  $\tau = \pi r_j r_i r_j$ , где  $2 \leq i < j \leq n$ , при этом  $\pi$  и  $\tau$  имеют вид

$$\pi = [A B \gamma], \quad \tau = [A \bar{B} \gamma]; \quad (11)$$

(ii) либо  $\tau = \pi r_j r_i r_{i-j+1}$ , где  $2 \leq j < i \leq n$ , при этом  $\pi$  и  $\tau$  имеют вид

$$\pi = [p A B \gamma], \quad \tau = [p B A \gamma]. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вершину  $\pi = [p \alpha q \beta k]$ ,  $\pi_j = q$ , из множества  $D_p$  и найдём все другие вершины из  $D_p$ , лежащие от данной на расстоянии три. Пусть  $\pi^1 = \pi r_j = [q \bar{\alpha} p \beta k]$ , где  $\pi_j^1 = p$ ,  $2 \leq j \leq n$ . Применение префикс-реверсала  $r_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ ,  $i \neq j$ , к перестановке  $\pi^1$  даёт следующие два случая.

СЛУЧАЙ 1. Если  $i < j$ , то  $\pi^2 = \pi^1 r_i = [\alpha_2 q \bar{\alpha}_1 p \beta k]$ , где  $\pi_j^2 = p$ ,  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$  и  $|\alpha_2| = i - 1$ , и применение префикс-реверсала  $r_j$  к  $\pi^2$  даёт перестановку  $\tau = \pi^2 r_j = [p \alpha_1 q \bar{\alpha}_2 \beta k]$ . Следовательно,  $\tau = \pi r_j r_i r_j$  при  $2 \leq i < j \leq n$  и искомый вид перестановок (11) получается, если положить  $A = [p \alpha_1]$ ,  $B = [\alpha_2 q]$ ,  $\gamma = [\beta k]$  в  $\pi$  и  $\tau$ .

СЛУЧАЙ 2. Если  $i > j$ , то  $\pi^2 = \pi^1 r_i = [\bar{\beta}_1 p \alpha q \beta_2 k]$ ,  $\pi_{i-j+1}^2 = p$ ,  $\beta = \beta_1 \beta_2$  и  $|\beta_1| = i - j$ , и применение префикс-реверсала  $r_{i-j+1}$  к  $\pi^2$  даёт перестановку  $\tau = \pi^2 r_{i-j+1} = [p \beta_1 \alpha q \beta_2 k]$ . Следовательно,  $\tau = \pi r_j r_i r_{i-j+1}$  при  $2 \leq j < i \leq n$  и искомый вид перестановок (12) получается, если положить  $A = [\alpha q]$ ,  $B = [\beta_1]$ ,  $\gamma = [\beta_2 k]$  в  $\pi$  и  $\tau$ .

Таким образом, все пути длины три между вершинами эффективного доминирующего множества найдены, их описание соответствует (11) и (12). Обратное утверждение леммы очевидно. Лемма 1 доказана.

Теперь рассмотрим пути длины три и четыре между произвольными вершинами графа заданного вида. В доказательстве этих результатов используется, в частности, тот факт, что если между двумя вершинами имеется хотя бы один путь длины три или четыре, не принадлежащий циклу длины семь, то путей длины четыре или три соответственно между этими двумя вершинами не существует. Этот факт является следствием следующей леммы.

**Лемма 2.** Если между вершинами  $\pi$ ,  $\tau$  графа  $P_n$  имеется путь  $P$  длины три (четыре) и не существует 7-цикла, содержащего этот путь  $P$ , то между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  не может возникнуть 7-цикл, содержащий любой другой путь  $P'$  длины три (четыре).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  существует два различных пути  $P$  и  $P'$  длины три (четыре), причём не существует 7-цикла, содержащего путь  $P$ , но существует 7-цикл, содержащий путь  $P'$ . По теореме 1 в графе  $P_n$  нет циклов длины три и пять, следовательно, между  $\pi$  и  $\tau$  существует путь длины четыре (три), не проходящий через другие вершины пути  $P$  длины три (четыре). Следовательно, должен возникнуть 7-цикл, содержащий путь  $P$ , что противоречит условию леммы. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма даёт описание путей длины три на внутренних рёбрах графа между вершинами некоторого заданного вида.

**Лемма 3.** Пусть вершины  $\pi$  и  $\tau$  графа  $P_n$  находятся на расстоянии три друг от друга. Тогда

(i) если  $\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $\tau = [\gamma_1 \bar{A} B \gamma_2]$ , где  $|\gamma_1| \geq 2$  и  $|A| \geq 2$ , либо  $|\gamma_1| = 1$  и  $|A| \geq 3$ , то между ними существует единственный путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|} r_{|A|} r_{|\gamma_1|+|A|}; \quad (13)$$

(ii) если  $\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $\tau = [\gamma_1 B A \gamma_2]$ , где  $|\gamma_1| \geq 0$ ,  $|A| \geq 1$ ,  $|B| \geq 1$ , то между ними существуют

(а) единственный путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|} r_{|\gamma_1|+|A|+|B|} r_{|\gamma_1|+|B|} \quad (14)$$

при условии, что  $|\gamma_1| = 1$ , а  $|A|, |B| \neq 1$ ;

(б) два пути длины три вида

$$\tau = \pi r_2 r_3 r_2 = \pi r_3 r_2 r_3 \quad (15)$$

при условии, что  $|\gamma_1| = |A| = |B| = 1$ ;

(с) единственный путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{|A|} r_{|A|+|B|} r_{|B|} \quad (16)$$

при условии, что  $|\gamma_1| = 0$  и  $|A| \geq 2$ ,  $|B| \geq 2$ ;

(iii) если  $\pi = [\gamma_1 A B k]$  и  $\tau = [\bar{A} B \gamma_1 k]$ , где  $|\gamma_1| \geq 1$ ,  $|A| \geq 2$ ,  $|B| \geq 0$ , то между ними существует путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{n-1} r_{n-2} r_{|A|} \quad (17)$$

при условии, что  $|\gamma_1| = 1$  и  $|B| \geq 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть  $\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $\tau = [\gamma_1 \bar{A} B \gamma_2]$ , тогда достоверность (13) показывается прямой проверкой:

$$\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|A|}} [\bar{A} \bar{\gamma}_1 B \gamma_2] \xrightarrow{r_{|A|}} [A \bar{\gamma}_1 B \gamma_2] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|A|}} [\gamma_1 \bar{A} B \gamma_2] = \tau.$$

Докажем, что найденный путь является единственным путём длины три между вершинами данного вида. Допустим, что существует ещё один путь длины три между вершинами  $\pi$  и  $\tau$ . Тогда эти два пути должны образовывать 6-цикл. Но по условию  $|\gamma_1| \geq 2$  и  $|A| \geq 2$ , либо  $|\gamma_1| = 1$  и  $|A| \geq 3$ , следовательно, по теореме 2 появление цикла на этих вершинах невозможно, т. е. найденный путь является единственным.

(ii) Пусть  $\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $\tau = [\gamma_1 B A \gamma_2]$ , тогда если  $|\gamma_1| \geq 2$ ,  $|A| \geq 1$ ,  $|B| \geq 1$ , то между этими вершинами существует путь длины четыре следующего вида:

$$[\gamma_1 A B \gamma_2] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|A|}} [\bar{A} \bar{\gamma}_1 B \gamma_2] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|A|+|B|}} [\bar{B} \gamma_1 A \gamma_2] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|B|}} [\bar{\gamma}_1 B A \gamma_2] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|}} [\gamma_1 B A \gamma_2]. \quad (18)$$

Предположим, что между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  также существует путь длины три, следовательно, эти два пути образуют 7-цикл. Однако, как следует из теоремы 3, при заданных условиях  $|\gamma_1| \geq 2$ ,  $|A| \geq 1$  и  $|B| \geq 1$  в графе  $P_n$  не могут возникнуть 7-циклы, содержащие последовательность префикс-реверсалов  $r_{|\gamma_1|+|A|} r_{|\gamma_1|+|A|+|B|} r_{|\gamma_1|+|B|} r_{|\gamma_1|}$ . Следовательно, по лемме 2 пути длины три между  $\pi$  и  $\tau$  в данном случае не существует.

Однако, если положить  $|\gamma_1| = 1$  в (18), то между  $\pi$  и  $\tau$  существует путь длины три вида (14). Предположим, что между этими вершинами существует ещё один путь длины три, а значит, должен существовать 6-цикл, состоящий из этих двух путей. По теореме 2 это возможно лишь в случае, когда  $|\gamma_1| = |A| = |B| = 1$ , и этот путь имеет вид

$$\tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|+|B|} r_{|A|+|B|} r_{|\gamma_1|+|A|+|B|} = \pi r_3 r_2 r_3,$$

а первый путь соответственно примет вид

$$\tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|} r_{|\gamma_1|+|A|+|B|} r_{|\gamma_1|+|B|} = \pi r_2 r_3 r_2,$$

что соответствует (15).

Если положить  $|\gamma_1| = 0$  в (18) при условии, что  $|A| \geq 2$ ,  $|B| \geq 2$ , то между  $\pi$  и  $\tau$  существует путь длины три вида (16). Предположим,

что между  $\pi$  и  $\tau$  существует ещё один путь длины три, а значит, должен существовать 6-цикл, состоящий из этих двух путей, но в силу теоремы 2 это невозможно, поскольку  $|A| + |B| \geq 4$ . Заметим, что если  $|A| = 1$  или  $|B| = 1$ , то указанный выше путь вырождается в ребро.

(iii) Пусть  $\pi = [\gamma_1 A B k]$  и  $\tau = [\bar{A} B \gamma_1 k]$ , где  $|\gamma_1| \geq 2$ ,  $|A| \geq 2$ ,  $|B| \geq 1$ . Тогда между этими вершинами существует путь длины четыре следующего вида:

$$[\gamma_1 A B k] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|}} [\bar{\gamma}_1 A B k] \xrightarrow{r_{n-1}} [\bar{B} \bar{A} \gamma_1 k] \xrightarrow{r_{|A|+|B|}} [A B \gamma_1 k] \xrightarrow{r_{|A|}} [\bar{A} B \gamma_1 k]. \quad (19)$$

Предположим, что между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  существует путь длины три, следовательно, эти два пути образуют 7-цикл, но при заданных условиях на  $|\gamma_1|$ ,  $|A|$ ,  $|B|$  в силу теоремы 2 это невозможно. Следовательно, по лемме 2 пути длины три в данных условиях не возникает.

Однако если положить  $|\gamma_1| = 1$  и  $|B| \geq 1$  в (19), то между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  существует единственный путь длины три, а именно, путь вида (17). В самом деле,

$$\pi = [\gamma_1 A B k] \xrightarrow{r_{n-1}} [\bar{B} \bar{A} \gamma_1 k] \xrightarrow{r_{n-2}} [A B \gamma_1 k] \xrightarrow{r_{|A|}} [\bar{A} B \gamma_1 k] = \tau,$$

и если предположить, что между  $\pi$  и  $\tau$  существует ещё один путь длины три, то должен существовать 6-цикл на этих путях, что невозможно в силу теоремы 2, поскольку в перестановке  $n = |\gamma_1| + |A| + |B| + 1 \geq 5$  элементов. Следовательно, найденный путь длины три является единственным.

Если положить  $|B| = 0$  и  $|\gamma_1| \geq 2$  в (19), то между  $\pi$  и  $\tau$  существует путь длины два вида  $\tau = \pi r_{|\gamma_1|} r_{n-1}$ , а поскольку по теореме 1 в графе нет циклов длины пять, пути длины три между этими вершинами не существует.

Если положить  $|B| = 0$  и  $|\gamma_1| = 1$  в (19), то между  $\pi$  и  $\tau$  существует ребро, соответствующее префикс-реверсалу  $r_{n-1}$ , а поскольку по теореме 1 в графе нет циклов длины четыре, пути длины три при этих условиях также не возникает. Лемма 3 доказана.

Следующая лемма даёт описание путей длины четыре графа между вершинами некоторого заданного вида.

**Лемма 4.** Для вершин  $\pi$  и  $\tau$  графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , справедливы утверждения:



(i) если  $\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $\tau = [\gamma_1 \bar{A} B \gamma_2]$ , где  $|\gamma_1| \geq 1$ , то между ними существуют пути длины четыре следующего вида:

(а) если  $|A| = k - 1$ ,  $|\gamma_1| = 1$ , где  $4 \leq k \leq n$ , то

$$\tau = \pi r_2 r_k r_{k-2} r_{k-1}, \quad \tau = \pi r_{k-1} r_{k-2} r_k r_2; \quad (20)$$

(b) если  $|A| = 2$ ,  $|\gamma_1| = k - 2$ , где  $4 \leq k \leq n$ , то

$$\tau = \pi r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-2}, \quad \tau = \pi r_{k-2} r_{k-1} r_k r_{k-1}; \quad (21)$$

(ii) если  $\pi = [\gamma_1 A B q]$  и  $\tau = [\gamma_1 B A q]$ , где  $|\gamma_1| \geq 1$ ,  $|A| \geq 1$ ,  $|B| \geq 1$ , то между ними существуют пути длины четыре следующего вида:

(а) если  $|\gamma_1| \geq 2$ ,  $|A| \geq 1$ ,  $|B| \geq 1$ , то

$$\tau = \pi r_{|\gamma_1|} r_{|\gamma_1|+|A|} r_{n-1} r_{|\gamma_1|+|B|}, \quad \tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|} r_{n-1} r_{|\gamma_1|+|B|} r_{|\gamma_1|}, \quad (22)$$

кроме этого, если  $|A| = 1$ ,  $|B| \geq 2$ , то

$$\tau = \pi r_{n-1} r_{|B|} r_{|B|+1} r_{n-1}, \quad (23)$$

а если  $|B| = 1$  и  $|A| \geq 2$ , то

$$\tau = \pi r_{n-1} r_{|A|+1} r_{|A|} r_{n-1}; \quad (24)$$

(b) если  $|\gamma_1| = 1$  и  $n \geq 5$ , то при  $|A| = 1$ ,  $|B| = n - 3$  имеем

$$\tau = \pi r_{n-1} r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1}, \quad (25)$$

а при  $|A| = n - 3$ ,  $|B| = 1$  имеем

$$\tau = \pi r_{n-1} r_{n-2} r_{n-3} r_{n-1}; \quad (26)$$

(с) если  $|\gamma_1| = 0$  и  $n \geq 4$ , то при  $|A| = 2$ ,  $|B| = n - 3$ , либо при  $|A| = n - 3$ ,  $|B| = 2$  имеем

$$\tau = \pi r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1} r_{n-2}, \quad \tau = \pi r_{n-2} r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть  $\pi = [\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $\tau = [\gamma_1 \bar{A} B \gamma_2]$ , где  $|\gamma_1| \geq 1$ . В силу леммы 3(i) между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  существует единственный путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|} r_{|A|} r_{|\gamma_1|+|A|}.$$

Предположим, что между  $\pi$  и  $\tau$  имеется путь длины четыре. Тогда в графе должен быть 7-цикл, содержащий указанный выше путь длины три.

По теореме 3 это возможно лишь в случаях, когда либо  $|A| = k - 1$ ,  $|\gamma_1| + |A| = k$ , где  $4 \leq k \leq n$ , при этом пути имеют вид (20), либо  $|A| = 2$ ,  $|\gamma_1| + |A| = k$ , где  $4 \leq k \leq n$ , при этом пути имеют вид (21).

(ii) Рассмотрим перестановки вида  $\pi = [\gamma_1 A B q]$  и  $\tau = [\gamma_1 B A q]$ , где  $|\gamma_1| \geq 1$ ,  $|A| \geq 1$ ,  $|B| \geq 1$ . Убедимся, что при  $|\gamma_1| \geq 2$  имеют место пути длины четыре вида (22). В самом деле,

$$\begin{aligned} \pi = [\gamma_1 A B q] &\xrightarrow{r_{|\gamma_1|}} [\bar{\gamma}_1 A B q] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|A|}} [\bar{A} \gamma_1 B q] \\ &\xrightarrow{r_{n-1}} [\bar{B} \bar{\gamma}_1 A q] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|B|}} [\gamma_1 B A q] = \tau \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \pi = [\gamma_1 A B q] &\xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|A|}} [\bar{A} \bar{\gamma}_1 B q] \xrightarrow{r_{n-1}} [\bar{B} \gamma_1 A q] \\ &\xrightarrow{r_{|\gamma_1|+|B|}} [\bar{\gamma}_1 B A q] \xrightarrow{r_{|\gamma_1|}} [\gamma_1 B A q] = \tau. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что при  $|A| = 1$ ,  $|B| \geq 2$  существует путь длины четыре вида (23):

$$\begin{aligned} \pi = [\gamma_1 A B q] &\xrightarrow{r_{n-1}} [\bar{B} A \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{|B|}} [B A \bar{\gamma}_1 q] \\ &\xrightarrow{r_{|B|+1}} [A \bar{B} \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{n-1}} [\gamma_1 B A q] = \tau, \end{aligned}$$

а при  $|B| = 1$ ,  $|A| \geq 2$  существует путь длины четыре вида (24):

$$\begin{aligned} \pi = [\gamma_1 A B q] &\xrightarrow{r_{n-1}} [B \bar{A} \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{|A|+1}} [A B \bar{\gamma}_1 q] \\ &\xrightarrow{r_{|A|}} [\bar{A} B \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{n-1}} [\gamma_1 B A q] = \tau. \end{aligned}$$

Докажем, что при  $|\gamma_1| \geq 2$  других путей длины четыре кроме (22), (23) и (24) нет. Обозначим пути длины четыре из (22) через  $P^1$  и  $P^2$ :

$$P^1 : \tau = \pi r_{|\gamma_1|} r_{|\gamma_1|+|A|} r_{n-1} r_{|\gamma_1|+|B|}, \quad P^2 : \tau = \pi r_{|\gamma_1|+|A|} r_{n-1} r_{|\gamma_1|+|B|} r_{|\gamma_1|}.$$

Пусть  $|A| \geq 2$ ,  $|B| \geq 2$ , тогда между вершинами  $\pi = [\gamma_1 A B q]$  и  $\tau = [\gamma_1 B A q]$  существует путь  $P^*$  длины пять следующего вида:

$$P^* : \tau = \pi r_{n-1} r_{|B|} r_{|A|+|B|} r_{|A|} r_{n-1},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \pi = [\gamma_1 A B q] &\xrightarrow{r_{n-1}} [\bar{B} \bar{A} \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{|B|}} [B \bar{A} \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{|A|+|B|}} [A \bar{B} \bar{\gamma}_1 q] \\ &\xrightarrow{r_{|A|}} [\bar{A} \bar{B} \bar{\gamma}_1 q] \xrightarrow{r_{n-1}} [\gamma_1 B A q] = \tau. \end{aligned}$$

Заметим, что если рассмотреть этот путь в копии  $P_{n-1}$ , то префикс-реверсалы  $r_{n-1}$  определяют внешние рёбра, при этом в перестановках  $\pi r_{n-1}$  и  $\tau r_{n-1}$  переставляются местами только два начальных сегмента, следовательно, в силу леммы 3(ii c) последовательность трёх внутренних рёбер в  $P^*$  является единственной.

Таким образом, в копии  $P_{n-1}$  возникнут два цикла длины девять следующего вида:

$$C_9^1 = \pi r_{|\gamma_1|} r_{|\gamma_1|+|A|} r_{n-1} r_{|\gamma_1|+|B|} r_{n-1} r_{|A|} r_{|A|+|B|} r_{|B|} r_{n-1},$$

$$C_9^2 = \tau r_{|\gamma_1|} r_{|\gamma_1|+|B|} r_{n-1} r_{|\gamma_1|+|A|} r_{n-1} r_{|B|} r_{|A|+|B|} r_{|B|} r_{n-1},$$

где  $C_9^1$  включает в себя пути  $P^1$  и  $P^*$ , а  $C_9^2$  —  $P^2$  и  $P^*$ .

Тогда если в перестановке  $\pi = [\gamma_1 A B q]$ ,  $|\pi| = n$ ,  $|\gamma_1| = i$ ,  $|A| = j - i$  и  $|B| = n - 1 - j$ , то путь  $P^*$  примет вид

$$P^* = r_{n-1} r_{n-1-j} r_{n-1-i} r_{j-i} r_{n-1},$$

а  $C_9^1$ , в свою очередь, примет вид

$$C_9^1 = r_i r_j r_{n-1} r_{n-1-j+i} r_{n-1} r_{j-i} r_{n-1-i} r_{n-1-j} r_{n-1},$$

где  $2 \leq i \leq j - 2$ ,  $i + 2 \leq j \leq n - 3$ . Если в  $\tau = [\gamma_1 B A q]$ , где  $|\tau| = n$ , положить  $|\gamma_1| = i$ ,  $|B| = j - i$ ,  $|A| = n - 1 - j$ , то путь  $P^*$  примет вид

$$P^* = r_{n-1} r_{j-i} r_{n-1-i} r_{n-1-j} r_{n-1},$$

а  $C_9^2$ , в свою очередь, примет вид

$$C_9^2 = r_i r_j r_{n-1} r_{n-1-j+i} r_{n-1} r_{j-i} r_{n-1-i} r_{n-1-j} r_{n-1},$$

где  $2 \leq i \leq j - 2$ ,  $i + 2 \leq j \leq n - 3$ . Заметим, что если предположить существование ещё одного пути длины четыре между  $\pi$  и  $\tau$ , то он должен образовывать 9-цикл, включающий путь  $P^*$ . Но такой цикл описывается только канонической формой (7) теоремы 4. Следовательно, других путей длины четыре между  $\pi$  и  $\tau$  не существует.

При  $|A| = 1$ ,  $|B| \geq 2$  путь  $P^*$  вырождается в путь длины четыре вида

$$P^* : \tau = \pi r_{n-1} r_{|B|} r_{|B|+1} r_{n-1}.$$

На основе  $P^*$  с учётом путей  $P^1$  и  $P^2$  в копии  $P_{n-1}$  возникнут два цикла длины восемь с тремя префикс-реверсалами  $r_{n-1}$ , определяющими внешние рёбра, а поскольку по теореме 1 в графе нет циклов длины четыре,

последовательность двух внутренних рёбер в  $P^*$  единственна. Нетрудно убедиться, что других путей длины четыре не существует. Действительно, мы перечислили все такие пути с одним внешним ребром и двумя внешними рёбрами. Если предположить, что существует ещё один путь длины четыре с двумя внешними рёбрами, то сразу получим противоречие, поскольку тогда должен возникнуть либо 4-цикл, а по теореме 1 в графе нет таких циклов, либо 6-цикл, которого не существует, так как  $n \geq 5$ . Путей длины четыре с тремя внешними рёбрами быть не может, поскольку любой вершине графа инцидентно только одно внешнее ребро. Следовательно, в этом случае, возможны лишь три пути длины четыре вида (22) и (23).

Аналогичные рассуждения применяются в случае, когда  $|B| = 1$ ,  $|A| \geq 2$ , поскольку  $P^*$  вырождается в путь длины четыре вида

$$P^* : \tau = \pi r_{n-1} r_{|A|+1} r_{|A|} r_{n-1}.$$

Следовательно, в этом случае, возможны лишь три пути длины четыре вида (22) и (24).

В случае, когда  $|A| = 1$  и  $|B| = 1$ , путь  $P^*$  вырождается в путь длины три и тогда между вершинами имеются только пути вида (22).

Таким образом, если  $|\gamma_1| \geq 2$ , то для вершин  $\pi = [\gamma_1 A B q]$  и  $\tau = [\gamma_1 B A q]$  доказано, что других путей длины четыре кроме (22), (23) и (24) между этими вершинами нет.

Теперь пусть  $|\gamma_1| = 1$ . Тогда по лемме 3(ii a) между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  есть путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{|A|+1} r_{n-1} r_{|B|+1}.$$

Поскольку  $|A| + |B| = n - 2$ ,  $n \geq 5$ , и в этом случае по теореме 3 путь длины четыре между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  возникнет лишь в случаях, когда либо  $|A| = 1$ ,  $|B| = n - 3$ , при этом искомый путь имеет вид (25), либо  $|A| = n - 3$ ,  $|B| = 1$ , при этом искомый путь имеет вид (26).

Теперь пусть  $|\gamma_1| = 0$ . Тогда по лемме 3(ii c) между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  есть путь длины три вида

$$\tau = \pi r_{|A|} r_{n-1} r_{|B|}.$$

По теореме 3 пути длины четыре возникают при  $|A| = 2$ ,  $|B| = n - 3$  и  $|A| = n - 3$ ,  $|B| = 2$  и имеют вид (27). Напомним, что  $|A| \geq 2$  и  $|B| \geq 2$ , следовательно, эти пути имеют место при  $n \geq 5$ . Покажем, что (27) выполняется также при  $n = 4$ . В самом деле, при  $|A| = 1$  между перестановками  $\pi$  и  $\tau$  есть путь длины два вида  $\tau = \pi r_{n-2} r_{n-1}$ , а по теореме 2 путь

длины четыре существует лишь при  $n = 4$  и имеет вид  $\tau = \pi r_3 r_2 r_3 r_2$ . Аналогично, при  $|B| = 1$  между перестановками  $\pi$  и  $\tau$  есть путь длины два вида  $\tau = \pi r_{n-1} r_{n-2}$ , а по теореме 2 путь длины четыре существует лишь при  $n = 4$  и имеет вид  $\tau = \pi r_2 r_3 r_2 r_3$ . Таким образом, виды этих путей соответствуют (27) при  $n = 4$ . В остальных случаях по лемме 2 путей длины четыре между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  нет. Лемма 4 доказана.

## 2. Доказательство теоремы 4

В силу иерархического строения графа  $P_n$  при переходе от  $P_{n-1}$  к  $P_n$  число циклов, проходящих через некоторую выделенную вершину, будет увеличиваться за счёт появления новых циклов с вершинами, распределёнными по копиям  $P_{n-1}$ , а именно, цикл длины девять может возникнуть на вершинах двух, трёх и четырёх  $(n-1)$ -копий графа.

Рассмотрим все возможные распределения вершин по копиям при таком переходе и на основе этого построим общий вид циклов длины девять, а также найдём их общее число.

Случай 1. Цикл длины девять на вершинах двух  $(n-1)$ -копий. Предположим, что цикл длины девять появляется на вершинах двух копий  $P_{n-1}(i)$  и  $P_{n-1}(j)$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$ . В [1] показано, что если две вершины, принадлежащие одной и той же  $(n-1)$ -копии, находятся на расстоянии не более двух, то инцидентные им внешние рёбра идут в разные  $(n-1)$ -копии. Следовательно, 9-цикл не может возникнуть, когда две (три) вершины искомого 9-цикла лежат в одной копии, а остальные семь (шесть) принадлежат другой копии. Рассмотрим ситуацию, в которой 9-цикл возникает.

(4+5)-СИТУАЦИЯ. Четыре вершины  $\pi^{k_1}, \pi^{k_2}, \pi^{k_3}, \pi^{k_4}$  искомого 9-цикла лежат в копии  $P_{n-1}(k)$ , а остальные пять вершин  $\pi^{p_1}, \pi^{p_2}, \pi^{p_3}, \pi^{p_4}, \pi^{p_5}$  принадлежат копии  $P_{n-1}(p)$ . Заметим, что вершины  $\pi^{k_l}, l = 1, 2, 3, 4$ , лежащие в  $P_{n-1}(k)$ , должны образовывать простую цепь длины три, а крайние вершины  $\pi^{k_1}$  и  $\pi^{k_4}$  этой цепи должны быть смежными с вершинами из  $P_{n-1}(p)$ , т. е. для них должно выполняться  $\pi_1^{k_1} = \pi_1^{k_4} = p$ . Следовательно, обе вершины должны принадлежать эффективному доминирующему множеству  $D_p$ .

Пусть  $\pi^{k_1} = [p \alpha q \beta k]$ , где  $\pi_1^{k_1} = p$ ,  $\pi_j^{k_1} = q$ ,  $|\alpha| = j - 2$ ,  $|\beta| = n - j - 1$ . Тогда по лемме 1 простая цепь длины три между этими вершинами описывается двумя способами: 1)  $\pi^{k_4} = \pi^{k_1} r_j r_i r_j$ , где  $2 \leq i < j \leq n - 1$ , и 2)  $\pi^{k_4} = \pi^{k_1} r_j r_i r_{i-j+1}$ , где  $2 \leq j < i \leq n - 1$ .

Рассмотрим оба способа.

1) В данном случае простая цепь длины три имеет вид

$$\begin{aligned} \pi^{k_1} = [p \alpha q \beta k] &\xrightarrow{r_j} \pi^{k_2} = [q \bar{\alpha} p \beta k] \xrightarrow{r_i} \pi^{k_3} = [\alpha_2 q \bar{\alpha}_1 p \beta k] \\ &\xrightarrow{r_j} \pi^{k_4} = [p \alpha_1 q \bar{\alpha}_2 \beta k], \end{aligned}$$

где  $\pi_j^{k_2} = p$ ;  $\pi_i^{k_3} = q$ ,  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$  и  $|\alpha_2| = i - 1 \geq 1$ ;  $\pi_{n-j+i}^{k_4} = q$ . Для крайних вершин  $\pi^{k_1}$ ,  $\pi^{k_4}$  простой цепи длины три в копии  $P_{n-1}(k)$  смежные им вершины из копии  $P_{n-1}(p)$  имеют вид (рис. 1, случай 1)

$$\pi^{p_1} = \pi^{k_1} r_n = [k \bar{\beta} q \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 p], \quad \text{где } \pi_{n-j+1}^{p_1} = q,$$

$$\pi^{p_5} = \pi^{k_4} r_n = [k \bar{\beta} \alpha_2 q \bar{\alpha}_1 p], \quad \text{где } \pi_{n-i+j}^{p_5} = q.$$

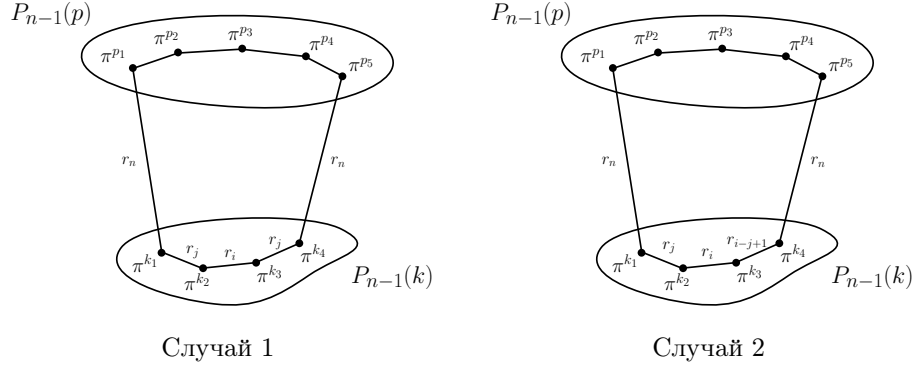


Рис. 1. Иллюстрация к  $(4+5)$ -ситуации

Теперь нужно описать путь длины четыре между вершинами  $\pi^{p_1}$  и  $\pi^{p_5}$  внутри копии  $P_{n-1}(p)$ . Если положить  $\gamma_1 = [k \bar{\beta}]$ ,  $A = [q \bar{\alpha}_2]$ ,  $B = [\alpha_1]$ ,  $\gamma_2 = [p]$  и  $|\gamma_1| = |\beta| + 1 \geq 1$ ,  $|A| \geq 2$ ,  $|B| \geq 0$ , то перестановки  $\pi^{p_1}$ ,  $\pi^{p_5}$  примут вид  $[\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $[\gamma_1 \bar{A} B \gamma_2]$ , и по лемме 4(i) между ними существует четыре пути длины четыре при следующих условиях:

(а)  $|A| = |\alpha_2| + 1 = i = k - 1$ ,  $|\gamma_1| = |\beta| + 1 = n - j = 1$ , откуда  $j = n - 1$ , и искомый цикл длины девять описывается либо как  $r_{n-1} r_i r_{n-1} r_n r_2 r_{i+1} r_{i-1} r_i r_n$ , либо как  $r_{n-1} r_i r_{n-1} r_n r_i r_{i-1} r_{i+1} r_2 r_n$ , где  $3 \leq i \leq n - 2$ . Канонический вид определяется одной и той же формой

$$C_9^1 = r_n r_{n-1} r_i r_{n-1} r_n r_i r_{i-1} r_{i+1} r_2, \quad 3 \leq i \leq n - 2,$$

соответствующей (1).

(b)  $|A| = i = 2$ ,  $|\gamma_1| = n - j = k - 2$ , откуда  $j = n - k + 2$ . Из условия  $3 \leq j$  следует  $4 \leq k \leq n - 1$ , и искомый цикл длины девять описывается либо как  $r_{n-k+2} r_2 r_{n-k+2} r_n r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-2} r_n$ , либо как  $r_{n-k+2} r_2 r_{n-k+2} r_n r_{k-2} r_{k-1} r_k r_{k-1} r_n$ , где  $4 \leq k \leq n - 1$ . Канонический вид определяется одной и той же формой

$$C_9^2 = r_{n-k+2} r_2 r_{n-k+2} r_n r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-2} r_n, \quad \text{где } 4 \leq k \leq n - 1,$$

соответствующей (2).

2) Во втором случае простая цепь длины три описывается так:

$$\begin{aligned} \pi^{k_1} = [p \alpha q \beta k] &\xrightarrow{r_j} \pi^{k_2} = [q \bar{\alpha} p \beta k] \xrightarrow{r_i} \pi^{k_3} = [\bar{\beta}_1 p \alpha q \beta_2 k] \\ &\xrightarrow{r_{i-j+1}} \pi^{k_4} = [p \beta_1 \alpha q \beta_2 k], \end{aligned}$$

где  $\pi_j^{k_2} = p$ ;  $\pi_i^{k_3} = q$ ,  $\beta = \beta_1 \beta_2$ ,  $|\beta_1| = i - j \geq 1$  и  $|\beta_2| = n - i - 1$ ;  $\pi_i^{k_4} = q$ , а смежные для  $\pi^{k_1}$ ,  $\pi^{k_4}$  вершины из копии  $P_{n-1}(p)$  имеют вид (см. рис. 1, случай 2)

$$\pi^{p_1} = \pi^{k_1} r_n = [k \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_1 q \bar{\alpha} p], \quad \text{где } \pi_{n-j+1}^{p_1} = q,$$

$$\pi^{p_5} = \pi^{k_4} r_n = [k \bar{\beta}_2 q \bar{\alpha} \bar{\beta}_1 p], \quad \text{где } \pi_{n-i+1}^{p_5} = q.$$

Опишем путь длины четыре между вершинами  $\pi^{p_1}$  и  $\pi^{p_5}$  внутри копии  $P_{n-1}(p)$ . Если положить  $\gamma_1 = [k \bar{\beta}_2]$ ,  $A = [\beta_1]$ ,  $B = [q \bar{\alpha}]$ ,  $[k] = [p]$  и  $|\gamma_1| = |\beta_2| + 1 \geq 1$ ,  $|A| = |\beta_1| \geq 1$ ,  $|B| = |\alpha| + 1 \geq 1$ , то перестановки  $\pi^{p_1}$ ,  $\pi^{p_5}$  примут вид  $[\gamma_1 A B k]$  и  $[\gamma_1 B A k]$ , и по лемме 4(ii) между ними существуют пути длины четыре при следующих условиях:

(a)  $|\gamma_1| = n - i \geq 2$ ,  $|A| = |\beta_1| = i - j \geq 1$ ,  $|B| = |\alpha| + 1 = j - 1 \geq 1$  (см. (22)), при этом циклы длины девять примут следующий вид:

$$C_9^3 = r_j r_i r_{i-j+1} r_n r_{n-i+j-1} r_{n-1} r_{n-j} r_{n-i} r_n, \quad 2 \leq j < i \leq n - 2,$$

$$C_9^3 = r_j r_i r_{i-j+1} r_n r_{n-i} r_{n-i+j-1} r_{n-1} r_{n-j} r_n, \quad 2 \leq j < i \leq n - 2,$$

совпадающий для всех  $i = j - i + 1$ . Их канонические формы соответствуют (3) при  $n = k$ , где  $5 \leq k \leq n$ , и при замене  $i \leftrightarrow j$ ,  $2 \leq i < j \leq k - 2$ .

(b)  $|\gamma_1| = n - i \geq 2$ ,  $|A| = i - j = 1$  и  $|B| = |\alpha| + 1 = j - 1 \geq 2$  (см. (23)), а соответствующий цикл длины девять примет вид

$$C_9^4 = r_j r_{j+1} r_2 r_n r_{n-1} r_j r_{j-1} r_{n-1} r_n, \quad 3 \leq j \leq n - 3,$$

каноническая форма которого соответствует (4), если положить  $n = k$ , где  $6 \leq k \leq n$ , а  $j = i$ ,  $3 \leq i \leq k - 3$ .

(с)  $|\gamma_1| = n - i \geq 2$ ,  $|A| = i - j \geq 2$  и  $|B| = |\alpha| + 1 = j - 1 = 1$  (см. (24)), а соответствующий цикл длины девять примет вид

$$C_9^4 = r_2 r_i r_{i-1} r_n r_{n-1} r_{i-2} r_{i-1} r_{n-1} r_n, \quad 4 \leq i \leq n - 2,$$

каноническая форма которого соответствует (4), если положить  $i = i + 1$ ,  $n = k$ , где  $3 \leq i \leq n - 3$  и  $5 \leq k \leq n$ .

(д)  $|\gamma_1| = 1$ , а это значит, что  $i = n - 1$ . Тогда если  $|A| = i - j = 1$ ,  $|B| = j - 1 = n - 3$  (см. (25)), то  $j = n - 2$  и  $i = n - 1$  и искомый 9-цикл имеет вид  $r_{n-2} r_{n-1} r_2 r_n r_{n-1} r_{n-2} r_{n-3} r_{n-1} r_n$ , где  $n \geq 5$ ; если же  $|A| = i - j = n - 3$ ,  $|B| = j - 1 = 1$  (см. (26)), то  $j = 2$  и  $i = n - 1$  и искомый 9-цикл имеет аналогичный вид  $r_{n-2} r_{n-1} r_2 r_n r_{n-1} r_{n-2} r_{n-3} r_{n-1} r_n$ , где  $n \geq 5$ . Заметим, что найденные формы 9-циклов совпадают с формой (4) при  $i = k - 2$ , где  $k \geq 5$ .

Таким образом, второй способ, а также случай двух копий полностью рассмотрены, и все циклы длины девять, возникающие на вершинах двух копий, описаны.

Случай 2. Цикл длины девять на вершинах трёх  $(n - 1)$ -копий. Предположим, что цикл длины девять возникает на вершинах копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $P_{n-1}(j)$ ,  $P_{n-1}(k)$ , где  $1 \leq i \neq j \neq k \leq n$ . В этом случае возможны три способа распределения вершин искомого 9-цикла по трём копиям, а именно: а)  $2 + 2 + 5$ ; б)  $2 + 3 + 4$ ; в)  $3 + 3 + 3$ . Рассмотрим каждую из ситуаций.

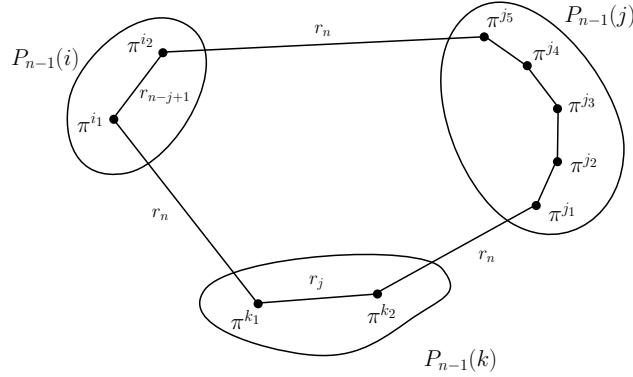


Рис. 2. Иллюстрация к  $(2 + 2 + 5)$ -ситуации

$(2 + 2 + 5)$ -СИТУАЦИЯ. Пусть вершины искомого 9-цикла распределены так, что  $\pi^{k1}$ ,  $\pi^{k2}$  лежат в копии  $P_{n-1}(k)$ ,  $\pi^{i1}$ ,  $\pi^{i2}$  — в  $P_{n-1}(i)$ , а  $\pi^{j1}$ ,  $\pi^{j2}$ ,  $\pi^{j3}$ ,  $\pi^{j4}$ ,  $\pi^{j5}$  — в  $P_{n-1}(j)$ .



$s = 1, \dots, 5$ , — в  $P_{n-1}(j)$ , где  $1 \leq i \neq j \neq k \leq n$  (рис. 2). Пусть  $\pi^{k_1} = [i \alpha j \beta k]$ , где  $\alpha = [\pi_2 \dots \pi_{j-1}]$ ,  $\beta = [\pi_{j+1} \dots \pi_{n-1}]$ . Заметим, что  $|\alpha| = j - 2$  и  $|\beta| = n - j - 1$ . Поскольку  $\pi^{k_2}$  должна быть соединена с вершиной из копии  $P_{n-1}(j)$ , имеем  $\pi_1^{k_2} = j$ . Отсюда

$$\pi^{k_2} = \pi^{k_1} r_j = [j \bar{\alpha} i \beta k], \quad \pi_j^{k_2} = i.$$

Вершина  $\pi^{k_2}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$ , поэтому

$$\pi^{j_1} = \pi^{k_2} r_n = [k \bar{\beta} i \alpha j], \quad \pi_{n-j+1}^{j_1} = i.$$

Вершина  $\pi^{k_1}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{i_1} \in P_{n-1}(i)$ , поэтому

$$\pi^{i_1} = \pi^{k_1} r_n = [k \bar{\beta} j \bar{\alpha} i], \quad \pi_{n-j+1}^{i_1} = j.$$

Поскольку  $\pi^{i_2}$  должна быть соединена с вершиной из копии  $P_{n-1}(j)$ , получаем  $\pi_1^{i_2} = j$ , откуда

$$\pi^{i_2} = \pi^{i_1} r_{n-j+1} = [j \beta k \bar{\alpha} i], \quad \pi_{n-j+1}^{i_2} = k.$$

Вершина  $\pi^{i_2}$  должна быть соединена с вершиной  $\pi^{j_5} \in P_{n-1}(j)$  внешним ребром, поэтому  $\pi^{j_5} = \pi^{i_2} r_n = [i \alpha k \bar{\beta} j]$ ,  $\pi_j^{j_5} = k$ .

Опишем пути длины четыре между вершинами  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_5}$ . Заметим, что они различаются порядком сегментов  $[k \bar{\beta}]$  и  $[i \alpha]$ , т.е. имеют вид  $[\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $[\gamma_1 B A \gamma_2]$ , где  $\gamma_1$  является пустым сегментом, т.е.  $|\gamma_1| = 0$ . Кроме этого,  $A = [k \bar{\beta}]$ ,  $B = [i \alpha]$ ,  $\gamma_2 = [j]$  и  $|A| = |\beta| + 1 \geq 1$ ,  $|B| = |\alpha| + 1 \geq 1$ . Тогда по лемме 4 между  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_5}$  существуют пути длины четыре при  $|A| = 2$ ,  $|B| = n - 3$ , либо при  $|A| = n - 3$ ,  $|B| = 2$  и  $n \geq 4$  (см. (27)), а искомые циклы длины девять имеют вид  $r_3 r_n r_{n-2} r_n r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1} r_{n-2} r_n$  либо  $r_{n-2} r_n r_3 r_n r_{n-2} r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1} r_n$  соответственно, канонический вид которых определяется одной и той же формой

$$C_9^5 = r_n r_{n-1} r_{n-2} r_{n-1} r_{n-2} r_n r_3 r_n r_{n-2},$$

соответствующей (5) при  $n = k$ , где  $4 \leq k \leq n$ .

(2+3+4)-ситуация. Поскольку граф является вершинно-транзитивным, не нарушая общности, предположим, что вершины искомого 9-цикла распределены так, что  $\pi^{i_1}$ ,  $\pi^{i_2}$  лежат в копии  $P_{n-1}(i)$ ,  $\pi^{n_1}$ ,  $\pi^{n_2}$ ,  $\pi^{n_3}$  — в  $P_{n-1}(n)$ ,  $\pi^{j_1}$ ,  $\pi^{j_2}$ ,  $\pi^{j_3}$ ,  $\pi^{j_4}$  — в  $P_{n-1}(j)$ , где  $1 \leq i \neq j \leq n$ . Возможны два случая.

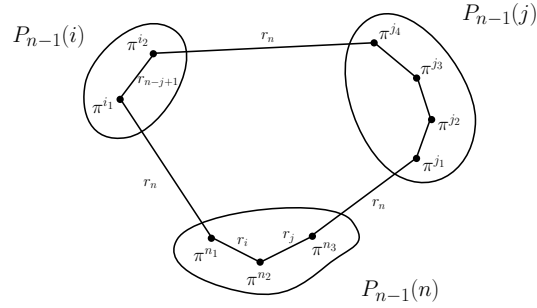
СЛУЧАЙ 1. Пусть  $i < j$ . Так как граф является вершинно-транзитивным, не нарушая общности, можно положить  $\pi^{n_2} = I_n = [\alpha i \beta j \gamma n]$ , где

$\alpha = [1 \dots i - 1]$ ,  $\beta = [i + 1 \dots j - 1]$ ,  $\gamma = [j + 1 \dots n - 1]$  и  $|\alpha| = i - 1 \geq 1$ ,  $|\beta| = j - i - 1$ ,  $|\gamma| = n - j - 1$  (рис. 3, случай 1). Вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  должны быть смежными с вершинами из разных  $(n - 1)$ -копий, поэтому имеют следующий вид:

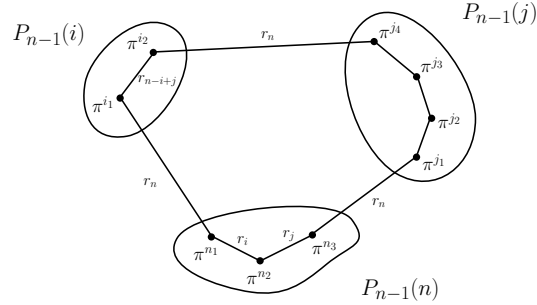
$$\pi^{n_1} = \pi^{n_2} r_i = [i \bar{\alpha} \beta j \gamma n], \quad \pi_j^{n_1} = j,$$

$$\pi^{n_3} = \pi^{n_2} r_j = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \gamma n], \quad \pi_{j-i+1}^{n_3} = i.$$

Вершина  $\pi^{n_3}$  должна быть соединена с  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$  внешним ребром, поэтому  $\pi^{j_1} = \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\gamma} \alpha i \beta j]$ , где  $\pi_{n-j+i}^{j_1} = i$ . Вершина  $\pi^{n_1}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{i_1} \in P_{n-1}(i)$ , поэтому  $\pi^{i_1} = \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i]$ , где  $\pi_{n-j+1}^{i_1} = j$ . Поскольку  $\pi^{i_2}$  должна быть соединена внешним ребром с вершиной копии  $P_{n-1}(j)$ , имеем  $\pi_1^{i_2} = j$  и  $\pi^{i_2} = \pi^{i_1} r_{n-j+1} = [j \gamma n \bar{\beta} \alpha i]$ , где  $\pi_{n-j+1}^{i_2} = n$ . Вершина  $\pi^{i_2}$  должна быть соединена с вершиной  $\pi^{j_4} \in P_{n-1}(j)$  внешним ребром, поэтому  $\pi^{j_4} = \pi^{i_2} r_n = [i \bar{\alpha} \beta n \bar{\gamma} j]$ , где  $\pi_j^{j_4} = n$ .



Случай 1



Случай 2

Рис. 3. Иллюстрация к  $(2 + 3 + 4)$ -ситуации

Опишем путь длины три между вершинами  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_4}$ . Заметим, что они имеют вид  $[\gamma_1 A B k]$  и  $[\bar{A} B \gamma_1 k]$ , где  $\gamma_1 = [n \bar{\gamma}]$ ,  $A = [\alpha i]$ ,  $B = [\beta]$ ,  $k = j$ . По лемме 3 путь длины три для таких перестановок существует при  $|\gamma_1| = 1$  и  $|B| \geq 1$ . В этом случае  $|A| = |\alpha| + 1 = i - 1 + 1 = i \geq 2$ , а так как  $|\gamma_1| = n - j = 1$  и  $|B| = j - i - 1 \geq 1$ , то  $j = n - 1$  и  $i \leq n - 3$  и цикл длины девять имеет вид

$$C_9^6 = r_i r_n r_2 r_n r_i r_{n-2} r_{n-1} r_n r_{n-1}, \quad 2 \leq i \leq n - 3,$$

каноническая форма которого соответствует (6) при  $n = k$ , где  $4 \leq k \leq n$ .

СЛУЧАЙ 2. Пусть  $i > j$ . Положим  $\pi^{n_2} = I_n = [\alpha j \beta i \gamma n]$ , где  $\alpha = [1 \dots j - 1]$ ,  $\beta = [j + 1 \dots i - 1]$ ,  $\gamma = [i + 1 \dots n - 1]$  и  $|\alpha| = j - 1 \geq 1$ ,  $|\beta| = i - j - 1$ ,  $|\gamma| = n - i - 1$  (см. рис. 3, случай 2). Вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  должны быть смежными с вершинами из разных  $(n - 1)$ -копий, следовательно, они имеют вид

$$\pi^{n_1} = \pi^{n_2} r_i = [i \bar{\beta} j \bar{\alpha} \gamma n], \quad \pi_{i-j+1}^{n_1} = j,$$

$$\pi^{n_3} = \pi^{n_2} r_j = [j \bar{\alpha} \beta i \gamma n], \quad \pi_i^{n_3} = i.$$

По аналогичным соображениям получаем

$$\pi^{j_1} = \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\gamma} i \bar{\beta} \alpha j], \quad \pi_{n-i+1}^{j_1} = i,$$

$$\pi^{i_1} = \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\gamma} \alpha j \beta i], \quad \pi_{n-i+j}^{i_1} = j,$$

$$\pi^{i_2} = \pi^{i_1} r_{n-i+j} = [j \bar{\alpha} \gamma n \beta i], \quad \pi_{n-i+j}^{i_2} = n,$$

$$\pi^{j_4} = \pi^{i_2} r_n = [i \bar{\beta} n \bar{\gamma} \alpha j], \quad \pi_{i-j+1}^{j_4} = n.$$

Опишем путь длины три между вершинами  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_4}$ . Заметим, что эти вершины различаются порядком сегментов  $[n \bar{\gamma}]$  и  $[i \bar{\beta}]$ , следовательно, если обозначить через  $\gamma_1$  пустой сегмент,  $A = [n \bar{\gamma}]$ ,  $B = [i \bar{\beta}]$  и  $\gamma_2 = [\alpha j]$ , то перестановки  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_4}$  примут вид  $[\gamma_1 A B \gamma_2]$  и  $[\gamma_1 B A \gamma_2]$  соответственно. Так как  $|\gamma_1| = 0$ , по лемме 3 путь длины три между вершинами существует при условии  $|A| = n - i \geq 2$ ,  $|B| = i - j \geq 2$ , т. е.  $2 \leq j \leq i - 2$ ,  $j + 2 \leq i \leq n - 2$ ,  $n \geq 6$ , и искомый 9-цикл примет вид

$$C_9^7 = r_j r_i r_n r_{n-i+j} r_n r_{i-j} r_{n-j} r_{n-i} r_n,$$

каноническая форма которого соответствует (7) при  $n = k$ , где  $6 \leq k \leq n$ , а также при замене  $i \leftrightarrow j$ ,  $2 \leq i \leq j - 2$ ,  $i + 2 \leq j \leq k - 2$ .

(3+3+3)-ситуация. Поскольку граф является вершинно-транзитивным, не нарушая общности, предположим, что вершины искомого 9-цикла распределены так, что  $\pi^{i_1}, \pi^{i_2}, \pi^{i_3}$  лежат в копии  $P_{n-1}(i)$ ,  $\pi^{n_1}, \pi^{n_2}, \pi^{n_3}$  — в  $P_{n-1}(n)$ ,  $\pi^{j_1}, \pi^{j_2}, \pi^{j_3}$  — в  $P_{n-1}(j)$ . Распределение вершин симметричное, поэтому можно положить  $1 \leq i < j \leq n$ . Пусть  $\pi^{n_2} = I_n = [\alpha i \beta j \gamma n]$ , где  $\alpha = [1 \dots i-1]$ ,  $\beta = [i+1 \dots j-1]$ ,  $\gamma = [j+1 \dots n-1]$  и  $|\alpha| = i-1 \neq 0$ ,  $|\beta| = j-i-1 \neq 0$ ,  $|\gamma| = n-j-1 \neq 0$  (рис. 4). Вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  должны быть смежными с вершинами из разных  $(n-1)$ -копий, следовательно, они имеют вид

$$\pi^{n_1} = \pi^{n_2} r_i = [i \bar{\alpha} \beta j \gamma n], \quad \pi^{n_1} = j,$$

$$\pi^{n_3} = \pi^{n_2} r_j = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \gamma n], \quad \pi^{n_3}_{j-i+1} = i.$$

Вершина  $\pi^{n_3}$  должна быть соединена с вершиной  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$  внешним ребром, поэтому  $\pi^{j_1} = \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\gamma} \alpha i \beta j]$ , где  $\pi^{j_1}_{n-j+i} = i$ .

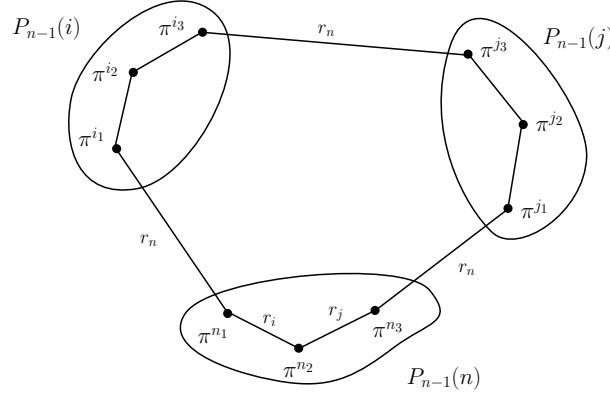


Рис. 4. Иллюстрация к (3+3+3)-ситуации

Вершина  $\pi^{n_1}$  должна быть соединена с  $\pi^{i_1} \in P_{n-1}(i)$  внешним ребром, поэтому  $\pi^{i_1} = \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i]$ , где  $\pi^{i_1}_{n-j+1} = j$ . Вершина  $\pi^{i_3}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{j_3} \in P_{n-1}(j)$ , поэтому  $\pi^{j_3} = j$ . Таким образом, вершины  $\pi^{i_1}$  и  $\pi^{i_3}$  должны быть соединены путём длины два с найденным выше условием. Это можно осуществить следующими тремя способами:

$$\pi^{i_1} = [n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i] \rightarrow [\gamma_2 n \bar{\gamma}_1 j \bar{\beta} \alpha i] \rightarrow [j \gamma_1 n \bar{\gamma}_2 \bar{\beta} \alpha i] = \pi^{i_3}_1, \text{ где } |\gamma_2| \neq 0,$$

$$\pi^{i_1} = [n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i] \rightarrow [\beta_2 j \gamma n \bar{\beta}_1 \alpha i] \rightarrow [j \bar{\beta}_2 \gamma n \bar{\beta}_1 \alpha i] = \pi^{i_3}_2, \text{ где } |\beta_2| \neq 0,$$

$$\pi^{i_1} = [n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i] \rightarrow [\bar{\alpha}_1 \beta j \gamma n \alpha_2 i] \rightarrow [j \bar{\beta} \alpha_1 \gamma n \alpha_2 i] = \pi^{i_3^3}, \text{ где } |\alpha_1| \neq 0.$$

Вершина  $\pi^{j_3}$ , в свою очередь, должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{i_3} \in P_{n-1}(i)$ , поэтому должно выполняться  $\pi_1^{j_3} = i$ . Таким образом, вершины  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_3}$  должны быть соединены путём длины два с этим условием. Это можно осуществить следующими тремя способами:

$$\pi^{j_1} = [n \bar{\gamma} \alpha i \beta j] \rightarrow [\gamma_2 n \bar{\gamma}_1 \alpha i \beta j] \rightarrow [i \bar{\alpha} \gamma_1 n \bar{\gamma}_2 \beta j] = \pi^{j_3^1}, \text{ где } |\gamma_2| \neq 0,$$

$$\pi^{j_1} = [n \bar{\gamma} \alpha i \beta j] \rightarrow [\bar{\alpha}_1 \gamma n \alpha_2 i \beta j] \rightarrow [i \bar{\alpha}_2 n \bar{\gamma} \alpha_1 \beta j] = \pi^{j_3^2}, \text{ где } |\alpha_1| \neq 0,$$

$$\pi^{j_1} = [n \bar{\gamma} \alpha i \beta j] \rightarrow [\bar{\beta}_1 i \bar{\alpha} \gamma n \beta_2 j] \rightarrow [i \beta_1 \bar{\alpha} \gamma n \beta_2 j] = \pi^{j_3^3}, \text{ где } |\beta_1| \neq 0.$$

Заметим, что вершины  $\pi^{i_3}$  и  $\pi^{j_3}$  должны быть соединены внешним ребром  $r_n$ , следовательно, порядок элементов в перестановках взаимно обратный. Исследование отличий в порядке непустых сегментов в этих перестановках позволяет сделать следующие выводы. Внешнее ребро имеется между вершинами  $\pi^{i_3^2}$  и  $\pi^{j_3^1}$  при  $|\beta_1| = 0$  и  $\gamma = \gamma_2$ ,  $\pi^{i_3^3}$  и  $\pi^{j_3^2}$  при  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ , что эквивалентно  $|\alpha_1| = 1$ . Во всех остальных случаях внешнего ребра не возникает, поскольку в перестановках имеются отличия, а именно,  $\pi^{i_3^1}$  и  $\pi^{j_3^1}$  — в сегменте  $[n\gamma_2]$ ;  $\pi^{i_3^1}$  и  $\pi^{j_3^2}$  — в порядке элементов  $j$ ,  $n$ ,  $i$  и в сегментах  $\alpha$  и  $\alpha_1$ ;  $\pi^{i_3^1}$  и  $\pi^{j_3^3}$  — в порядке элементов  $j$ ,  $n$ ,  $i$  и в сегменте  $\beta_1$ ;  $\pi^{i_3^2}$  и  $\pi^{j_3^2}$  — в порядке элементов  $j$ ,  $n$ ,  $i$  и в сегменте  $\alpha_1$ ;  $\pi^{i_3^2}$  и  $\pi^{j_3^3}$  — в сегментах  $\alpha$  и  $\beta_1$ ;  $\pi^{i_3^3}$  и  $\pi^{j_3^1}$  — в сегментах  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $\pi^{i_3^3}$  и  $\pi^{j_3^3}$  — в порядке элементов  $j$ ,  $n$ ,  $i$  и в сегменте  $\beta_1$ .

Таким образом, в двух случаях имеется внешнее ребро между вершинами. Поскольку  $|\alpha| = i - 1$ ,  $|\beta| = j - i - 1$ ,  $|\gamma| = n - j - 1$ , с учётом внешнего ребра между  $\pi^{i_3^2}$  и  $\pi^{j_3^1}$  при условии  $|\beta_1| = 0$  и  $\gamma = \gamma_2$ , т.е.  $|\gamma| \geq 1$ ,  $|\beta| \geq 1$ , искомым 9-цикл примет вид

$$C_9^8 = r_i r_n r_{n-i} r_{j-i} r_n r_{n-j+i} r_{n-j} r_n r_j, \quad 2 \leq i \leq j - 2, \\ i + 2 \leq j \leq n - 2, n \geq 6,$$

каноническая форма которого соответствует (8) при  $n = k$ ,  $6 \leq k \leq n$ . Кроме этого, с учётом внешнего ребра между вершинами  $\pi^{i_3^3}$  и  $\pi^{j_3^2}$  при условии  $|\alpha_1| = 1$ , т.е.  $|\alpha_2| = i - 2$ , получим ещё один 9-цикл вида

$$C_9^9 = r_i r_n r_{n-i+1} r_{j-i+1} r_n r_{n-j+i} r_{n-j+1} r_n r_j, \quad 2 \leq i < j \leq n - 1, n \geq 4,$$

каноническая форма которого соответствует (9) при  $n = k$ , где  $4 \leq k \leq n$ .

Таким образом, все ситуации, возникающие при построении циклов длины девять на вершинах, распределённых между тремя  $(n - 1)$ -копиями, рассмотрены, и все полученные 9-циклы описаны.

СЛУЧАЙ 3. ЦИКЛ ДЛИНЫ 9 НА ВЕРШИНАХ ЧЕТЫРЁХ  $(n-1)$ -КОПИЙ. Пусть вершины искомого 9-цикла распределены так, что  $\pi^{i_1}, \pi^{i_2}$  лежат в копии  $P_{n-1}(i)$ ,  $\pi^{j_1}, \pi^{j_2}$  — в  $P_{n-1}(j)$ ,  $\pi^{k_1}, \pi^{k_2}$  — в  $P_{n-1}(k)$  и  $\pi^{n_1}, \pi^{n_2}, \pi^{n_3}$  — в  $P_{n-1}(n)$ , где  $1 \leq i < j < k \leq n$ , и пусть  $\pi^{n_2} = I_n = [\alpha i \beta j \gamma k \mu n]$ , где  $\alpha = [1 \dots i-1]$ ,  $\beta = [i+1 \dots j-1]$ ,  $\gamma = [j+1 \dots k-1]$ ,  $\mu = [k+1 \dots n-1]$  и  $|\alpha| = i-1 \neq 0$ ,  $|\beta| = j-i-1$ ,  $|\gamma| = k-j-1$ ,  $|\mu| = n-k-1$ . Возможны три способа описания вершин искомого 9-цикла.

СПОСОБ 1. Предположим, что вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  смежны с вершинами  $\pi^{i_1} \in P_{n-1}(i)$  и  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$  соответственно. Тогда  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  имеют вид

$$\pi^{n_1} = \pi^{n_2} r_i = [i \bar{\alpha} \beta j \gamma k \mu n], \quad \pi^{n_3} = \pi^{n_2} r_j = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \gamma k \mu n],$$

а смежные с ними вершины  $\pi^{i_1}$  и  $\pi^{j_1}$  имеют следующий вид:

$$\pi^{i_1} = \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\mu} k \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i], \quad \pi^{j_1} = \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\mu} k \bar{\gamma} \alpha i \beta j].$$

Вершина  $\pi^{i_2}$  должна быть соединена с  $\pi^{k_1} \in P_{n-1}(k)$  внешним ребром, т. е.  $\pi^{i_2}_1 = k$ , а значит,  $\pi^{i_2} = \pi^{i_1} r_{|\mu|+2} = [k \mu n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i]$ , а вершина  $\pi^{j_2}$  должна быть соединена с  $\pi^{k_2} \in P_{n-1}(k)$  внешним ребром, т. е.  $\pi^{j_2}_1 = k$ , откуда  $\pi^{j_2} = \pi^{j_1} r_{|\mu|+2} = [k \mu n \bar{\gamma} \alpha i \beta j]$ . Вершины  $\pi^{i_2}$  и  $\pi^{j_2}$  должны быть соединены с  $\pi^{k_1}$  и  $\pi^{k_2}$  соответственно, т. е.  $\pi^{k_1} = \pi^{i_2} r_n = [i \bar{\alpha} \beta j \gamma n \bar{\mu} k]$  и  $\pi^{k_2} = \pi^{j_2} r_n = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \gamma n \bar{\mu} k]$ .

Если 9-цикл существует, то вершины  $\pi^{k_1}$  и  $\pi^{k_2}$  должны быть инцидентны одному и тому же внутреннему ребру, следовательно, должен существовать префикс-реверсал, переводящий  $\pi^{k_1}$  в  $\pi^{k_2}$ . Однако, поскольку  $|\alpha| \neq 0$ , такого префикс-реверсала не существует, а значит, цикла длины девять в данной ситуации не возникает.

СПОСОБ 2. Предположим, что вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  смежны с вершинами  $\pi^{i_1} \in P_{n-1}(i)$  и  $\pi^{k_1} \in P_{n-1}(k)$  соответственно (рис. 5). Тогда вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  должны иметь вид  $\pi^{n_1} = \pi^{n_2} r_i = [i \bar{\alpha} \beta j \gamma k \mu n]$ ,  $\pi^{n_3} = \pi^{n_2} r_k = [k \bar{\gamma} j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \mu n]$ , а смежные с ними вершины  $\pi^{i_1}$  и  $\pi^{k_1}$  — вид  $\pi^{i_1} = \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\mu} k \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i]$ ,  $\pi^{k_1} = \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\mu} \alpha i \beta j \gamma k]$ . Вершина  $\pi^{i_2}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$ , т. е.  $\pi^{i_2} = \pi^{i_1} r_{|\gamma|+|\mu|+3} = [j \gamma k \mu n \bar{\beta} \alpha i]$ , а вершина  $\pi^{k_2}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$ , т. е.

$$\pi^{k_2} = \pi^{k_1} r_{|\beta|+|\alpha|+|\mu|+3} = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \mu n \gamma k].$$

Вершины  $\pi^{i_2}$  и  $\pi^{k_2}$  должны быть соединены с  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_2}$  соответственно, т. е.  $\pi^{j_1} = \pi^{i_2} r_n = [i \bar{\alpha} \beta n \bar{\mu} k \bar{\gamma} j]$  и  $\pi^{j_2} = \pi^{k_2} r_n = [k \bar{\gamma} n \bar{\mu} \alpha i \beta j]$ . В данном

случае между вершинами  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{j_2}$  существует внутреннее ребро, когда  $|\gamma| = |\beta| = |\mu| = 0$ , откуда  $|\alpha| = i - 1 = n - 4$ , т. е.  $i = n - 3 \geq 2$ . Таким образом, искомый 9-цикл примет вид

$$C_9^{10} = r_n r_{n-1} r_n r_{n-1} r_n r_{n-1} r_{n-3} r_n r_3, \quad n \geq 5,$$

соответствующий канонической форме (10) при  $k = n$ , где  $5 \leq k \leq n$ .

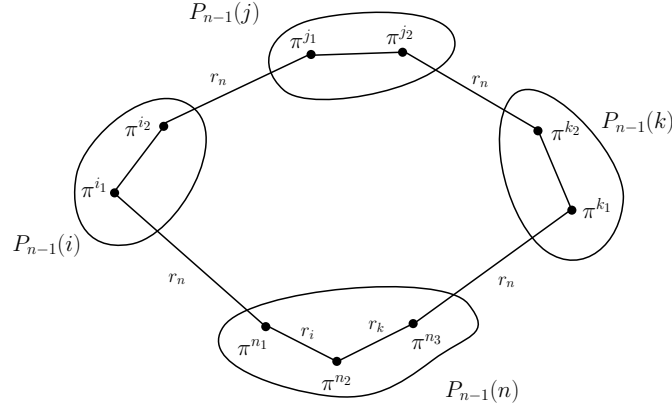


Рис. 5. Иллюстрация к  $(2 + 2 + 2 + 3)$ -ситуации, способ 2

СПОСОБ 3. Предположим, что вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  смежны с вершинами  $\pi^{j_1} \in P_{n-1}(j)$  и  $\pi^{k_1} \in P_{n-1}(k)$  соответственно. Тогда вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  должны иметь вид

$$\pi^{n_1} = \pi^{n_2} r_j = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \gamma k \mu n], \quad \pi^{n_3} = \pi^{n_2} r_k = [k \bar{\gamma} j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \mu n],$$

а смежные с ними вершины  $\pi^{j_1}$  и  $\pi^{k_1}$  — вид

$$\pi^{j_1} = \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\mu} k \bar{\gamma} \alpha i \beta j], \quad \pi^{k_1} = \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\mu} \alpha i \beta j \gamma k].$$

Вершина  $\pi^{j_2}$  должна быть соединена с  $\pi^{i_1} \in P_{n-1}(i)$  внешним ребром, т. е.  $\pi^{j_2} = \pi^{j_1} r_{|\mu|+|\gamma|+|\alpha|+3} = [i \bar{\alpha} \gamma k \mu n \beta j]$ , а вершина  $\pi^{k_2}$  должна быть соединена внешним ребром с  $\pi^{i_2} \in P_{n-1}(i)$ , т. е.

$$\pi^{k_2} = \pi^{k_1} r_{|\alpha|+|\mu|+2} = [i \bar{\alpha} \mu n \beta j \gamma k].$$

Вершины  $\pi^{j_2}$  и  $\pi^{k_2}$  должны быть соединены с  $\pi^{i_1}$  и  $\pi^{i_2}$  соответственно, а значит,  $\pi^{i_1} = \pi^{j_2} r_n = [j \bar{\beta} n \bar{\mu} k \bar{\gamma} \alpha i]$ ,  $\pi^{i_2} = \pi^{k_2} r_n = [k \bar{\gamma} j \bar{\beta} n \bar{\mu} \alpha i]$ .

В данном случае между вершинами  $\pi^{i_1}$  и  $\pi^{i_2}$  не существует внутреннего ребра, поскольку нет префикс-реверсала, переводящего  $\pi^{i_1}$  в  $\pi^{i_2}$ , а значит, и цикла длины девять в данной ситуации не возникает.

Таким образом, все канонические формы циклов длины девять в графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , получены. Найдём общее число  $N$  различных циклов длины девять, проходящих через одну и ту же вершину в графе, представленное как  $N = \sum_{i=1}^{10} N_{C_9^i}$ , где  $N_{C_9^i}$ ,  $1 \leq i \leq 10$ , соответствует числу различных циклов длины девять канонической формы  $C_9^i$ , проходящих через одну и ту же вершину в графе. Заметим, что любая каноническая форма  $l$ -цикла описывает  $l$  циклов, не обязательно различных, для фиксированной вершины. Среди канонических форм (1)–(10), формы (8) и (9) имеют симметрии при некоторых значениях индексов, а значит, среди них есть одинаковые. Остальные формы дают описание только различных циклов. В частности, для канонических форм  $C_9^1$ ,  $C_9^4$ ,  $C_9^5$  границы индексов могут быть записаны в виде  $1 \leq i - 2 \leq k - 4 \leq n - 4$ , а для  $C_9^2$  — в виде  $1 \leq i - 3 \leq k - 4 \leq n - 4$ , следовательно, поскольку все другие их формы различны, то

$$N_{C_9^1} = N_{C_9^2} = N_{C_9^4} = N_{C_9^6} = 9 \sum_{s=1}^{n-4} s = \frac{9(n-4)(n-3)}{2}.$$

Используя аналогичные рассуждения, для канонических форм  $C_9^3$  и  $C_9^7$  имеем

$$N_{C_9^3} = 9 \sum_{k=1}^{n-4} \sum_{s=1}^k s = \frac{9(n-4)(n-3)(n-2)}{6},$$

$$N_{C_9^7} = 9 \sum_{k=1}^{n-5} \sum_{s=1}^k s = \frac{9(n-5)(n-4)(n-3)}{6}.$$

Для канонических форм  $C_9^5$  и  $C_9^{10}$  с учётом имеющихся границ на индекс  $k$ , а также поскольку все другие их формы различны, получаем

$$N_{C_9^5} = 9(n-3), \quad N_{C_9^{10}} = 9(n-4).$$

На канонической форме

$$C_9^8 = r_k r_{k-j+i} r_{k-j} r_k r_j r_i r_k r_{k-i} r_{j-i}, \quad \begin{aligned} 2 \leq i \leq j-2, \\ i+2 \leq j \leq k-2, \quad 6 \leq k \leq n, \end{aligned}$$

возникают симметрии следующих двух типов:

(i) при одновременном выполнении равенств  $k - j + i = j = k - i$  и  $k - j = i = j - i$ , что возможно только, когда  $j = 2i$ ,  $k = 3i$ , где  $k \geq 6$ ,



а  $i = 2, 3, \dots$ . Тогда общее число  $n_1$  различных форм  $C_9^8$ , возникающих с учётом симметрий этого типа, равно  $3(\lfloor n/3 \rfloor - 1)$ ;

(ii) при одновременном выполнении равенств  $(k - j + i = j, k - j = i)$ ,  $(k - j + i = k - i, k - j = j - i)$  и  $(j = k - i, i = j - i)$ , всегда совместных для заданных интервалов индексов. Таким образом, каждые три формы  $C_9^8$  с учётом этого типа симметрий совпадают. Следовательно, поскольку общее число форм  $C_9^8$  без учёта симметрий равно

$$\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6},$$

число форм, на которых возникают симметрии этого типа, будет равно

$$\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} - (\lfloor n/3 \rfloor - 1).$$

Так как каждая третья из этих форм является различной, общее число  $n_2$  различных форм  $C_9^8$ , возникающих с учётом симметрий этого типа, вычисляется как

$$\begin{aligned} n_2 &= 9 \cdot \frac{(n-5)(n-4)(n-3) - 6(\lfloor n/3 \rfloor - 1)}{6 \cdot 3} \\ &= \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{2} - 3(\lfloor n/3 \rfloor - 1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$N_{C_9^8} = n_1 + n_2 = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{2}.$$

Подобным образом вычисляется  $N_{C_9^9}$ , поскольку на канонической форме  $C_9^9$  возникают аналогичные симметрии, а именно,

(i) при одновременном выполнении равенств  $k - j + i = j = k - i + 1$  и  $k - j + 1 = i = j - i + 1$ , т. е. при  $j = 2i - 1, k = 3i - 2$ , где  $k \geq 4$ , а  $i = 2, 3, \dots$ . Тогда общее число  $m_1$  различных форм  $C_9^9$ , возникающих с учётом симметрий этого типа, равно  $3(\lfloor (n+2)/3 \rfloor - 1)$ .

(ii) при одновременном выполнении равенств  $(k - i + 1 = k - j + i, j - i + 1 = k - j + 1)$ ,  $(k - j + i = j, k - j + 1 = i)$  и  $(j = k - i + 1, i = j - i + 1)$ , всегда совместных для заданных интервалов индексов. Таким образом, каждые три формы  $C_9^9$  с учётом этого типа симметрий совпадают. Следовательно, поскольку общее число форм  $C_9^9$  без учёта симметрий равно

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6},$$

число форм, на которых возникают симметрии этого типа, равно

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} - (\lfloor (n+2)/3 \rfloor - 1).$$

Так как каждая третья из этих форм является различной, общее число  $m_2$  различных форм  $C_9^9$ , возникающих с учётом симметрий этого типа, вычисляется как

$$\begin{aligned} m_2 &= 9 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1) - 6(\lfloor (n+2)/3 \rfloor - 1)}{6 \cdot 3} \\ &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2} - 3(\lfloor (n+2)/3 \rfloor - 1), \end{aligned}$$

а значит,

$$N_{C_9^9} = m_1 + m_2 = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2}.$$

Таким образом, суммируя все полученные выше значения для  $N_{C_9^i}$ ,  $1 \leq i \leq 10$ , общее число различных циклов длины девять, проходящих через любую вершину в графе, равно

$$N = \frac{8n^3 - 45n^2 + 61n - 12}{2}.$$

Теорема 4 доказана.

Общее число различных 9-циклов в  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , получается с учётом следующих замечаний. В графе  $n!$  вершин, через каждую из которых проходит  $N$  различных 9-циклов, тогда всего в графе  $\frac{n!N}{9}$  различных 9-циклов. В частности, в графе  $P_4$  через каждую вершину проходит ровно 12 циклов длины девять, а всего в графе имеется 32 цикла длины девять. В табл. 1 представлены все 9-циклы, проходящие через вершину [1234]. При  $n = 5$  и  $n = 6$  через каждую вершину проходит  $N = 84$  и  $N = 231$  циклов длины девять, что подтверждается вычислительными данными, полученными бакалавром ММФ НГУ М. Орловым.

### 3. Обсуждение

Полученные результаты наглядно демонстрируют сложность циклической системы Рапсак графа. Кроме этого, представленные в разд. 1 технические леммы позволяют оценить число циклов длины восемь, проходящих через одну и ту же вершину, поскольку 8-циклы также формируются из путей длины два, три и четыре. Эта оценка имеет порядок  $O(n^3)$ . Интересным остаётся общий вопрос о порядке числа циклов  $C_l$

длины  $l$ ,  $6 \leq l \leq n!$ , в графе, в частности, о порядке числа гамильтоновых циклов. С другой стороны, полученные результаты позволяют обобщить некоторые канонические формы для циклов нечётной длины. Например, если под записью  $(r_{i_1} \dots r_{i_j})^s$  понимать  $s$  последовательных применений префикс-реверсалов  $r_{i_1} \dots r_{i_j}$ , то в графе  $P_n$  через каждую его вершину проходят циклы нечётной длины следующего канонического вида:

$$C_{2s+3}^1 = (r_k r_{k-1})^s r_{k-s} r_k r_s, \quad 2 \leq s \leq k-2,$$

$$C_{2s+5}^2 = r_k (r_{k-1} r_{k-2})^s r_k r_{s+1} r_k r_{k-s}, \quad 1 \leq s \leq k-2,$$

где  $4 \leq k \leq n$ .

Т а б л и ц а 1

9-циклы вида (5) и (9) в графе  $P_4$ , проходящие через вершину [1234]

№	вершины цикла $C_9$	представление
1	1234-4321-2341-3241-4231-2431-1342-4312-2134	$r_4 r_3 r_2 r_3 r_2 r_4 r_3 r_4 r_2$
2	1234-3214-2314-1324-3124-4213-1243-3421-4321	$r_3 r_2 r_3 r_2 r_4 r_3 r_4 r_2 r_4$
3	1234-2134-3124-1324-4231-3241-1423-4123-3214	$r_2 r_3 r_2 r_4 r_3 r_4 r_2 r_4 r_3$
4	1234-3214-2314-4132-3142-2413-4213-3124-2134	$r_3 r_2 r_4 r_3 r_4 r_2 r_4 r_3 r_2$
5	1234-2134-4312-1342-2431-4231-1324-2314-3214	$r_2 r_4 r_3 r_4 r_2 r_4 r_3 r_2 r_3$
6	1234-4321-2341-1432-4132-2314-1324-3124-2134	$r_4 r_3 r_4 r_2 r_4 r_3 r_2 r_3 r_2$
7	1234-3214-4123-1423-3241-4231-2431-3421-4321	$r_3 r_4 r_2 r_4 r_3 r_2 r_3 r_2 r_4$
8	1234-4321-3421-1243-4213-2413-1423-4123-3214	$r_4 r_2 r_4 r_3 r_2 r_3 r_2 r_4 r_3$
9	1234-2134-4312-1342-3142-4132-1432-2341-4321	$r_2 r_4 r_3 r_2 r_3 r_2 r_4 r_3 r_4$
10	1234-4321-2341-3241-1423-2413-4213-3124-2134	$r_4 r_3 r_2 r_4 r_3 r_2 r_4 r_3 r_2$
11	1234-3214-2314-4132-3142-1342-2431-3421-4321	$r_3 r_2 r_4 r_3 r_2 r_4 r_3 r_2 r_4$
12	1234-2134-4312-1342-3142-2413-1423-4123-3214	$r_2 r_4 r_3 r_2 r_4 r_3 r_2 r_4 r_3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Константинова Е. В., Медведев А. Н. Циклы длины семь в Pancake графе // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 5. — С. 46–55.
2. Asai S., Kounoike Y., Shinano Y., Kaneko K. Computing the diameter of 17-pancake graph using a PC cluster // Euro-Par 2006 Parallel Processing. Proc. 12th Int. Euro-Par Conf. (Dresden, Germany, August 28–September 1, 2006). — Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2006. — P. 1114–1124. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 4128.)
3. Cibulka J. On average and highest number of flips in pancake sorting // Theor. Comput. Sci. — 2011. — Vol. 412. — P. 822–834.
4. Dweighth H. E 2569 in elementary problems and solutions // Amer. Math. Monthly. — 1975. — Vol. 82, N 1. — P. 1010.

5. **Gates W. H., Papadimitriou C. H.** Bounds for sorting by prefix-reversal // Discrete Math. — 1979. — Vol. 27. — P. 47–57.
6. **Hyedari M. H., Sudborough I. H.** On the diameter of the pancake network // J. Algorithms. — 1997. — Vol. 25, N. 1. — P. 67–94.
7. **Kanevsky A., Feng C.** On the embedding of cycles in pancake graphs // Parall. Comput. — 1995. — Vol. 21. — P. 923–936.
8. **Ke Qiu.** Optimal broadcasting algorithms for multiple messages on the star and pancake graphs using minimum dominating sets // Congr. Numerantium. — 2006. — Vol. 181. — P. 33–39.
9. **Sheu J. J., Tan J. J. M., Chu K. T.** Cycle embedding in pancake interconnection networks // Proc. 23rd Workshop Comb. Math. Comput. Theory (Taiwan, 2006). — Changhua, Taiwan: Da-Yeh Univ. Press, 2006. — P. 85–92.
10. **Zaks S.** A new algorithm for generation of permutations// BIT. — 1984. — Vol. 24. — P. 196–204.

*Константинова Елена Валентиновна,*  
e-mail: e\_konsta@math.nsc.ru  
*Медведев Алексей Николаевич,*  
e-mail: an\_medvedev@yahoo.com

Статья поступила  
25 апреля 2011 г.  
Переработанный вариант —  
13 июля 2011 г.