ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2011. Том 18, № 6. С. 61–70

УДК 519.178

ГРАНИЧНЫЕ КЛАССЫ ДЛЯ ЗАДАЧ О СПИСКОВОМ РАНЖИРОВАНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛЕСОВ *)

Д. С. Малышев, В. Е. Алексеев

Аннотация. Найдены все граничные классы для задач о списковом ранжировании графов (в вершинном и рёберном вариантах) относительно класса лесов. Это позволяет определить сложностной статус этих задач для любого наследственного класса, определяемого конечным множеством запрещённых подграфов относительно класса лесов.

Ключевые слова: вычислительная сложность, задача о списковом ранжировании, граничный класс, относительный граничный класс, лес.

Введение

В статье рассматриваются *наследственные* классы графов, т. е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$ и обозначается через $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. Класс $\mathcal{X}$ называется *конечно определённым относительно класса* $\mathcal{Y}$, если $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cap \mathrm{Free}(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ — конечное множество.

Пусть Π — какая-нибудь NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. На протяжении всей статьи предполагается, что P$\neq$NP, и это условие не включается явно в формулировки теорем и других утверждений. Например, такого: *если задача* Π *остаётся NP-полной для графов из наследственного класса* $\mathcal{X}$*, то* $\mathcal{X}$ *является* Π-*сложным.*

Одним из инструментов классификации наследственных классов на простые и сложные является понятие граничного класса, введённое в [5].

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–01–00357–а и 11–01–00107–а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракт № 16.740.11.0310).

Пусть $\mathcal{Y}$ — П-сложный класс. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ называется П-*предельным для* $\mathcal{Y}$, если существует такая последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных наследственных подклассов класса $\mathcal{Y}$, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению П-предельный класс для $\mathcal{Y}$ называется П-*граничным для* $\mathcal{Y}$ (или *относительно* $\mathcal{Y}$). П-граничный класс для класса всех графов называется просто П-*граничным.* Множество всех П-граничных классов для $\mathcal{Y}$ будем называть П-*граничной системой для* $\mathcal{Y}$.

Теорема 1 [6]. *Класс графов, конечно определённый относительно класса* $\mathcal{Y}$*, является* П*-сложным тогда и только тогда, когда в нём содержится какой-нибудь* П*-граничный для* $\mathcal{Y}$ *класс.*

К сожалению, до настоящего времени полного описания граничной системы для класса всех графов не удалось получить ни для одной задачи на графах. Однако для некоторых задач и классов такие описания найдены. В [9] полностью описана граничная система для задачи о доминирующем множестве относительно класса планарных графов, состоящая из двух классов. Другие примеры такого рода содержатся в [4].

В настоящей работе рассматривается задача о вершинном списковом ранжировании (ВСР), формулируемая следующим образом [8].

Пусть заданы граф G с множествами вершин V и натуральных чисел $\mathcal{L} = \{L(v) \mid v \in V\}$ (цветов, в которые разрешается покрасить вершину v). $\mathcal{L}$-*ранжированием вершин* графа G называется такая раскраска c его вершин, что

(i) $c(v) \in L(v)$ для каждой вершины v;

(ii) если $c(v_1) = c(v_2)$, $v_1 \neq v_2$, то каждый путь, соединяющий v_1 и v_2, содержит такую вершину v_3, что $c(v_3) > c(v_1)$.

Задача ВСР состоит в том, чтобы по данным G и $\mathcal{L}$ определить, существует ли $\mathcal{L}$-ранжирование вершин графа G. Под ВСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача ВСР решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любом назначении $\mathcal{L}$.

Класс всех лесов Forest ВСР-сложный. В [7] доказано, что такими же являются некоторые его подмножества. Одно из них — класс Comet. *Кометой* называется граф, получающийся отождествлением концевой вершины пути с центральной вершиной звезды. Класс Comet состоит из всех комет и их порождённых подграфов. В [2] доказано, что этот класс является ВСР-граничным. В [3] доказана ВСР-граничность класса Star2, состоящего из всех графов, получающихся из звёзд однократным подразбиением каждого ребра, и их порождённых подграфов. Мы покажем, что ВСР-граничная система для лесов состоит из трёх классов: Comet, Star2 и класса T1, состоящего из графов, каждая компонента связности которых есть путь или путь с добавленной вершиной, смежной с единственной вершиной пути. Будет также доказано, что при любом $d \geqslant 3$ для класса Forest(d) всех лесов со степенями не более d (из результатов [7] следует, что этот класс ВСР-сложный) ВСР-граничная система состоит из единственного класса T1.

В статье используются стандартные обозначения: P_n и C_n — путь и цикл с n вершинами соответственно, $K_{p,q}$ — полный двудольный граф. Применяются также обозначения: B_k — граф, получаемый соединением вершин степени 2 в двух экземплярах графа P_3 простым путём длины k; $T(i,j,k)$ — дерево, имеющее ровно три вершины степени 1, находящиеся на расстояниях i, j, k от единственной вершины степени 3; $S(i)$ — граф, получающийся однократным подразбиением каждого ребра в звезде $K_{1,i}$. Через pG обозначается граф, являющийся объединением p графов с непересекающимися множествами вершин, каждый из которых изоморфен графу G.

1. Графы с малым числом связных порождённых подграфов

Если существует $\mathcal{L}$-ранжирование графа G, то можно определить величину $\chi_r(G,\mathcal{L})$ — наименьшее k, при котором существует такое ранжирование с цветом каждой вершины, не превосходящим k. В [7] показано, что вычисление параметра $\chi_r(G,\mathcal{L})$ может быть рекурсивно сведено к вычислению $\chi_r(H,\mathcal{L})$ для порождённых подграфов H графа G.

Лемма 1. *Если для заданного связного графа G и множества $\mathcal{L}$ существует число $\chi_r(G,\mathcal{L})$, то*

$$\chi_r(G,\mathcal{L}) = \begin{cases} \min\limits_{x\in L(v)} x \quad \text{при } |V(G)| = 1, \\ \min\limits_{v\in V(G)} \{\min i \in L(v)\{i > \chi_r(G\setminus v)\}\} \quad \text{при } |V(G)| > 1. \end{cases}$$

Существование $\mathcal{L}$-ранжирования графа G равносильно существованию числа $\chi_r(G,\mathcal{L})$ и влечёт существование $\chi_r(H,\mathcal{L})$ для всех порождённых подграфов этого графа.

Заметим, что $\chi_r(G,\mathcal{L}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \chi_r(G_i,\mathcal{L})$ для графа G, допускающего $\mathcal{L}$-ранжирование и состоящего из компонент связности $G_1,\ldots,G_k$.

Теорема 2. *Если в графах из класса $\mathcal{X}$ число связных порождённых подграфов ограничено сверху полиномом от числа вершин, то этот класс ВСР-простой.*

Доказательство. Пусть $(G, \mathcal{L})$ — входные данные задачи ВСР, где G — связный граф из $\mathcal{X}$. Все связные порождённые подграфы графа G можно перечислить в порядке неубывания числа вершин, применяя, например, процедуру типа поиска в ширину. Вначале помещаем в очередь все одновершинные подграфы. При этом подграфу, порождаемому вершиной v, присваивается значение χ_r, равное наименьшему элементу списка $L(v)$. Далее повторяются следующие действия. Берём из очереди первый подграф и рассматриваем все подграфы, получающиеся добавлением к нему одной вершины. Для каждого из них проверяем связность и отличие от всех уже найденных подграфов. Если оба условия выполняются, то новый подграф добавляем к очереди и вычисляем для него значение χ_r, используя соотношение леммы 2 и сделанное выше замечание о несвязных графах. Если для какого-либо подграфа такого числа не существует (не существует соответствующего i в соотношении из леммы 2), то граф G не допускает $\mathcal{L}$-ранжирования. В противном случае будет найдено число $\chi_r(G, \mathcal{L})$ и доказано существование $\mathcal{L}$-ранжирования. Время работы такого алгоритма, очевидно, оценивается полиномом от числа вершин и связных порождённых подграфов графа G. Теорема 2 доказана.

Полиномиальная ограниченность числа связных порождённых подграфов имеет место, в частности, для деревьев с ограниченным числом листьев.

Лемма 2. *У дерева с n вершинами и k листьями имеется не более kn^k поддеревьев.*

Доказательство. В дереве с k листьями каждое поддерево имеет не более k листьев. Каждое поддерево, содержащее более одной вершины, однозначно определяется множеством своих листьев. Поэтому число поддеревьев не превосходит $\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \leqslant kn^k$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если дерево не содержит порождённого подграфа $qT(1, q, q)$, а степени вершин в нём не превосходят Δ, то оно имеет не более $\Delta^{2q(q+1)}$ листьев.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть T — дерево с $l > \Delta^{2q(q+1)}$ листьями и степенями вершин, не превосходящими Δ. Стянув все рёбра, инцидентные вершинам степени 2, получим дерево T' с тем же числом листьев, в котором все внутренние (не являющиеся листьями) вершины имеют степени не меньше 3 и не больше Δ. Выберем произвольно корень в этом дереве, и пусть p — максимальная длина пути от листа до корня. Тогда $l \leqslant \Delta(\Delta-1)^{p-1} \leqslant \Delta^p$. Следовательно, $p > 2q(q+1)$. Из этого пути можно удалить некоторое количество вершин так, что оставшиеся будут порождать подграф qP_{2q+1}. Добавим к каждой компоненте этого подграфа вершину дерева, смежную с центральной вершиной этой компоненты (вместе с соединяющим ребром). Получим порождённый подграф $qT(1,q,q)$ в дереве T'. Тогда такой же подграф будет и в дереве T. Лемма 3 доказана.

2. Класс T1

В этом разделе показано, что класс T1 является BCP-граничным для Forest и единственным BCP-граничным для Forest(d) при любом $d \geqslant 3$. Нетрудно проверить, что T1 = Forest $\cap$ Free$(T(2,2,2), K_{1,4}, B_1, B_2, \ldots)$.

Комета $C(i,j)$ $(i > 0, j > 0)$ определяется как граф с множествами вершин $\{a_1, a_2, \ldots, a_j\} \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_i\}$ и рёбер

$$\{(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{j-1},a_j)\} \cup \{(a_j,b_1),(a_j,b_2),\ldots,(a_j,b_i)\}.$$

В [7] показано, что задача BCP в классе всех комет NP-полна. Более того, из доказательства этого утверждения видно, что оно справедливо при дополнительном ограничении на назначение цветов: $L(a_j) = \{1\}$. Используя этот факт, докажем BCP-предельность класса T1.

Лемма 4. *Класс* T1 *является BCP-предельным для* Forest(3).

Доказательство. Пусть для графа $C(i,j)$ задано назначение допустимых цветов вершин $\mathcal{L}$, причём $L(a_j) = \{1\}$. Выберем некоторое $k > 0$ и рассмотрим граф $G_{i,j,k}$, состоящий из пути $P_{j+(i-1)k}$ с вершинами $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{j+(i-1)k}$ (занумерованными вдоль пути) и добавленных к нему вершин $b'_1, b'_2, \ldots, b'_i$ и рёбер $(a'_j, b'_1), (a'_{j+k}, b'_2), \ldots, (a'_{j+(i-1)k}, b'_i)$. Зададим для этого графа назначение цветов $\mathcal{L}'$: $L'(a'_\mu)$, $\mu = 1, \ldots, j$, и $L'(b'_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, i$, получаются соответственно из $L(a_\mu)$ и $L(b_\nu)$ умножением всех элементов на $ik+1$, а остальным $(i-1)k$ вершинам назначаются различные одноэлементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, (i-1)k\}$.

Легко видеть, что $\mathcal{L}$-ранжирование графа $C(i,j)$ существует тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{L}'$-ранжирование графа $G_{i,j,k}$. Ясно также, что при фиксированном k длина входа задачи BCP для пары $(G_{i,j,k}, \mathcal{L}')$ ограничена сверху полиномом от длины входа задачи BCP для пары $(C(i,j), \mathcal{L})$. Из упомянутого результата из [7] следует NP-полнота задачи BCP для множества графов $\mathcal{X}_k = \{G_{i,j,k} \mid i > 0, j > 0\}$. Следовательно, при любом k класс $\mathcal{Y}_k$, состоящий из графов, принадлежащих множеству $\bigcup\limits_{s \geqslant k} \mathcal{X}_s$, и их порождённых подграфов, является BCP-сложным. Поскольку Forest(3) $\supseteq \mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i = \mathrm{T1}$, класс T1 — BCP-предельный для Forest(3). Лемма 4 доказана.

Очевидно, что T1 является BCP-предельным и для каждого из классов Forest, Forest(d), $d > 3$. Покажем, что он BCP-граничный для каждого из этих классов. Для этого достаточно доказать, что он BCP-граничный. В доказательстве используется следующий критерий граничности из [1].

Теорема 3. П-*предельный класс* $\mathcal{A} = \mathit{Free}(\mathcal{M})$ *является* П-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathcal{A}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}$, *что класс* $\mathit{Free}(\mathcal{X} \cup \{G\})$ *является* П-*простым.*

Теорема 4. *Класс* T1 *является* BCP-*граничным.*

Доказательство. Любой граф $G \in \mathrm{T1}$ является порождённым подграфом графа $pT(1, q, q)$ при некоторых p и q. Поэтому при применении теоремы 3 для доказательства теоремы 4 достаточно в качестве графа G рассматривать только графы такого вида. Положим $\mathcal{A}_q = \{T(2, 2, 2), K_{1,4}, C_3, C_4, C_5, C_6, B_1, B_2, \ldots, B_{2q+1}\}$ и покажем, что при любых фиксированных p и q в графах из класса $\mathrm{Free}(\mathcal{A}_q \cup \{pT(1, q, q)\})$ число связных подграфов ограничено полиномом от числа вершин. Отсюда и из теорем 2 и 3 будет следовать утверждение теоремы 4.

Пусть H — связный граф из класса $\mathrm{Free}(\mathcal{A}_q \cup \{pT(1, q, q)\})$. Так как в H нет порождённых подграфов C_3 и $K_{1,4}$, степени вершин в нём не превосходят 3.

Допустим, в графе H есть циклы. Выберем в нём какой-нибудь простой цикл C. Этот цикл порождённый, так как любое ребро, соединяющее две вершины цикла C и не принадлежащее циклу, привело бы к образованию порождённого подграфа B_1 или цикла длины не более 4. Пусть X — множество вершин графа H, не принадлежащих циклу C. Каждая такая вершина смежна с какой-нибудь вершиной на C, иначе образовался бы порождённый подграф $T(2, 2, 2)$ или цикл длины не более 5. Вершина из X не может быть смежна более чем с одной вершиной на C — в противном случае образуется порождённый подграф B_2 или цикл длины не более 5. Вершины из X не могут быть смежны между собой, так как иначе образуется порождённый подграф B_3 или цикл длины не более 6. Итак, граф H имеет степени не более 3 и состоит из цикла C с несколькими добавленными вершинами, каждая из которых имеет степень 1 и смежна с вершиной на цикле. При этом расстояние между вершинами степени 3 в нём не может быть меньше $2q+2$, иначе образовался бы запрещённый подграф B_i, $i \leqslant 2q+1$. Очевидно, что H содержит порождённый подграф $aT(1,q,q)$, где $a = |X|$. Так как в H нет $pT(1,q,q)$, то $|A| < p$. Каждый связный подграф графа H состоит из отрезка цикла C и нескольких вершин из X. Число таких подграфов не превосходит $n^2 2^p$.

Если в графе H нет циклов, то выберем в нём самый длинный простой путь, а в качестве X возьмём множество всех вершин, не принадлежащих пути. Аналогичными рассуждениями можно для этого случая получить такую же верхнюю оценку числа связных подграфов. Теорема 4 доказана.

Для установления того, что некоторая конечная совокупность граничных классов образует граничную систему, можно использовать следующий критерий.

Лемма 5. *Множество* $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k\}$ Π-*граничных классов для* $\mathcal{Y}$ *является* Π-*граничной системой для* $\mathcal{Y}$ *тогда и только тогда, когда класс* $\mathcal{Y} \cap \mathit{Free}(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ Π-*простой для любых графов* $G_1 \in \mathcal{B}_1$, $G_2 \in \mathcal{B}_2$, $\ldots, G_k \in \mathcal{B}_k$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1. Для доказательства достаточности предположим, что существует Π-граничный для $\mathcal{Y}$ класс $\mathcal{B}$, отличный от каждого из этих k классов. Выберем графы $G_1 \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}$,$G_2 \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}$,$\ldots$,$G_k \in \mathcal{B}_k \setminus \mathcal{B}$ (они существуют, так как ни один Π-граничный класс не является подмножеством другого). Тогда $\mathcal{B} \subseteq Y \cap \mathrm{Free}(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ и по теореме 1 класс $\mathcal{Y} \cap \mathrm{Free}(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ является Π-сложным, что противоречит условию. Лемма 5 доказана.

Следующее утверждение является следствием лемм 2, 3, 5 и теоремы 2.

Теорема 5. *Класс* T1 *является единственным* BCP-*граничным классом для* Forest(d) *при любом* $d \geqslant 3$.

3. Граничная система

Класс T1 BCP-простой, что легко установить с помощью теоремы 2. В отличие от него Comet и Star2 являются BCP-сложными. Поэтому каждый из них BCP-предельный и, следовательно, BCP-граничный для любого объемлющего наследственного класса, в частности, для класса Forest. В этом разделе показано, что эти три граничных класса и составляют BCP-граничную систему для Forest.

Обозначим через $\alpha(i,j)$ наибольшее число вершин в дереве с наибольшей степенью вершины i и радиусом j. Легко видеть, что $\alpha(i,j) = 1 + i\frac{(i-1)^j-1}{i-2}$.

Лемма 6. *Если T — дерево, не содержащее поддеревьев $C(i,i)$ и $S(i)$, $i > 2$, то либо в T степени всех вершин меньше i, либо в нём имеется не более $\alpha(i-1, i-3)$ внутренних вершин.*

Доказательство. Пусть x — вершина наибольшей степени Δ в дереве T. Допустим, что $\Delta \geqslant i$. Тогда эксцентриситет вершины x меньше $i-1$, иначе образовался бы подграф $C(i,i)$. Значит, радиус дерева T не больше $i-2$. Удалив из T все листья, получим дерево T' радиуса не более $i-3$. Для каждой вершины дерева T среди смежных с ней вершин имеется не более $i-1$ внутренних, в противном случае образовался бы подграф $S(i)$. Поэтому в дереве T' степени вершин не превосходят $i-1$, а их число, т. е. число внутренних вершин дерева T, не превосходит $\alpha(i-1, i-3)$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7 [7]. *При любом фиксированном i множество графов, имеющих не более i вершин степени не менее 2, является* ВСР*-простым классом.*

Теорема 6. ВСР*-граничная система для* Forest *состоит из трёх классов* T1, Star2 *и* Comet.

Доказательство. Ввиду леммы 5 достаточно показать, что для любых $G_1 \in$ T1, $G_2 \in$ Star2, $G_3 \in$ Comet класс Forest $\cap$ Free$(\{G_1, G_2, G_3\})$ является ВСР-простым. Для этого заметим, что при некотором i граф G_1 является порождённым подграфом графа $iT(1,i,i)$, граф G_2 — порождённым подграфом графа Star(i), а граф G_3 — порождённым подграфом графа Comet(i,i). Тогда

$$\mathrm{Forest} \cap \mathrm{Free}(\{G_1, G_2, G_3\}) \subseteq \mathrm{Forest} \cap \mathrm{Free}(\{iT(1,i,i), S(i), C(i,i)\}).$$

Пусть $G \in \mathrm{Forest} \cap \mathrm{Free}(\{iT(1,i,i), S(i), C(i,i)\})$. Если G содержит не более чем $\alpha(i-1, i-3)$ внутренних вершин, то к G применим полиномиальный алгоритм, существование которого следует из леммы 7. Если G содержит не менее $\alpha(i-1, i-3)+1$ внутренних вершин, то по лемме 6 степени всех вершин графа G не превосходят $i-1$. Но тогда к G применим другой полиномиальный алгоритм, существование которого следует из лемм 3, 4 и теоремы 2. Теорема 6 доказана.

4. Рёберное ранжирование

Наряду с задачей о вершинном списковом ранжировании можно рассматривать рёберный вариант задачи. В задаче РСР о рёберном ранжировании списки допустимых цветов назначаются рёбрам и ищется рёберная раскраска, удовлетворяющая требованиям, аналогичным задаче ВСР, в которых слово «вершина» заменено словом «ребро».

Для задачи РСР классы Star2 и Comet являются РСР-граничными. Для второго класса это доказано в [2], а для первого это легко показать, практически дословно повторяя рассуждения из работы [3]. Аналогично тому, как это сделано выше для задачи ВСР, можно показать, что класс T1 является РСР-граничным, и доказать следующее утверждение.

Теорема 7. РСР-*граничная система для* Forest *состоит из трёх классов* T1, Star2 *и* Comet.

Вместе с тем РСР-граничность класса T1 даёт новую информацию о ВСР-граничных классах. В работе [2] показано, что задача РСР в любом наследственном классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче ВСР для совокупности всех графов, являющихся рёберными к графам класса $\mathcal{X}$. Отсюда и из РСР-граничности класса T1 следует, что множество рёберных графов к графам класса T1 является ВСР-граничным классом.

Авторы благодарны рецензенту за предложение по усовершенствованию формулировки и доказательства леммы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 3–10.
2. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных классах графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 43–51.
3. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных элементах решетки наследственных классов графов // Материалы VII молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 18–23 мая 2009 г.). Часть II. — М: Изд-во ИПМ РАН, 2009. — С. 12–17.
4. **Малышев Д.С.** Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов. Дис. ...канд. физ-мат. наук: 01.01.09. — Нижний Новгород: ННГУ, 2009. — 113 с.
5. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 132. — P. 17–26.

6. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theor. Comput. Sci. — 2007. — Vol. 389. — P. 219–236.
7. **Dereniowski D.** The complexity of list ranking of trees // Ars Comb. — 2008. — Vol. 86. — P. 97–114.
8. **Jamison R. E.** Coloring parameters associated with rankings of graphs // Congr. Numerantium. — 2003. — Vol. 164. — P. 111–127.
9. **Lozin V. V.** Boundary classes of planar graphs // Comb. Probab. Comput. — 2008. — Vol. 17. — P. 287–295.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru
Алексеев Владимир Евгеньевич,
e-mail: aleve@rambler.ru

Статья поступила
19 января 2011 г.
Переработанный вариант —
9 августа 2011 г.