ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2011. Том 18, № 6. С. 71–81

УДК 519.8

О РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СХЕМАХ *)

Е. А. Окольнишникова

Аннотация. Вводится класс распределённых схем, которые моделируют вычисления параллельными компьютерами с распределённой памятью. Доказываются оценки сложности вычисления булевых функций и систем булевых функций этими схемами.

Ключевые слова: сложность вычислений, схемы из функциональных элементов, моделирование вычислений.

Введение

Схемы, рассматриваемые в теории сложности, в той или иной степени моделируют работу вычислительных устройств. В статье представлен класс схем, моделирующих работу параллельных машин. Распределённые схемы, рассматриваемые в этой работе, — простая модель, которая описывает вычисление параллельными машинами с распределённой памятью (DCM) [7, 8]. k-Распределённая схема содержит p подсхем (процессоров). Каждая подсхема работает отдельно, но существует возможность обмениваться промежуточными результатами работы с другими подсхемами заранее предписанное число раз (k раз). (Можно представить, что в эти моменты вся информация, вычисленная к этому моменту любой из подсхем, становится доступной всем подсхемам, и каждая из них может использовать эту информацию в своих дальнейших вычислениях. Формальное определение k-распределённых схем и их сложности будет дано ниже.) Показано, что существуют примеры последовательностей булевых функций, а также систем булевых функций, для которых даже разрешение однократного обмена информацией может существенно уменьшить сложность вычисления булевых функций распределёнными схемами. Тем не менее при некоторых значениях параметров схем и реализуемых ими систем функций можно показать, что сложность вычисления схемами без обменов (0-распределёнными схемами) почти всех систем булевых функций асимптотически совпадает со сложностью вы-

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00528-а).

© 2011 Окольнишникова Е. А.

числения этой же системы булевых функций распределёнными схемами с любым числом разрешённых обменов.

Рассматриваемые модели — схемы с ограничениями на структуру. Эти схемы представляют интерес как сами по себе, так и как способ разработки новых методов получения оценок и рассматривались многими авторами. Сверхполиномиальные нижние оценки для сложности схем из функциональных элементов в монотонном базисе получены А. А. Разборовым [9] и А. Е. Андреевым [1]. Кроме того, сверхполиномиальные нижние оценки для схем с ограничениями получены А. К. Пулатовым, Е. А. Окольнишниковой, Г. А. Ткачёвым и др. Рассмотрение схем с ограничениями позволяет выявить факторы, влияющие на сложность схем. Более того, в [4, 5] предложен метод получения нелинейных нижних оценок сложности вычисления булевых функций недетерминированными ветвящимися программами (без ограничений) с использованием нижних оценок сложности для программ с ограничениями на структуру схем (а именно, ветвящиеся k-программы). Это позволило [4–6] получить нелинейные нижние оценки сложности вычисления характеристических функций кодов Рида — Маллера и БЧХ-кодов недетерминированными ветвящимися программами.

1. Определения

Дадим определение (n, m, p, k)-распределённых схем. Будем называть (n, m, p, k)-*распределённой схемой* в базисе B от переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ схему S из функциональных элементов в базисе B от $\{x_1, \ldots, x_n\}$, вычисляющую систему булевых функций $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ и обладающую следующими свойствами. Множество всех функциональных элементов схемы S разбито на p непересекающихся подмножеств (подсхем) $S_1, S_2, \ldots, S_p$. Элементы i-й подсхемы занумерованы числами $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,l_i}$, при этом выход элемента $a_{i,j}$ может подаваться только входы элементов $a_{i,j'}$, где $j' > j$. Пусть номера $t_1, t_2, \ldots, t_k$, где $1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, определены как уровни, на которых возможен информационный обмен. Положим $t_0 = 1$, $t_{k+1} = \max\limits_{i=1,\ldots,p} l_i + 1$. Элементы $a_{i,j}$, $t_{s-1} \leqslant j < t_s$, $s = 0, \ldots, k$, назовём *элементами s-го слоя*. Выходы элементов s-го слоя ($s = 0, 1, \ldots, k-1$) могут подаваться на входы элементов слоёв с номерами $s+1, \ldots, k$ любой подсхемы. Определим *сложность* TS_k^p для (n, m, p, k)-распределённой схемы:

$$\mathrm{TS}_k^p = \max_{i=1,\ldots,p} l_i.$$

Если принять во внимание величину обмена информацией в каждой точке информационного обмена, то можно предложить другое определение сложности. Через I_i^j обозначим общее число вершин j-го слоя подсхем $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_p$, выходы которых подаются на входы элементов S_i. *Сложность* $\widetilde{\mathrm{TS}}_k^p$ распределённой схемы определим следующим образом:

$$\widetilde{\mathrm{TS}}_k^p = \max_{i=1,\ldots,p} l_i + \sum_{j=1}^{k} \max_{i=1,\ldots,p} I_i^j.$$

При $m = 1$ схема вычисляет булеву функцию $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Сложность вычисления системы булевых функций $F^{n,m}$ в базисе B схемами из функциональных элементов обозначим через $L_B(F^{n,m})$.

Из определения распределённых схем следует, что обычная схема из функциональных элементов, вычисляющая систему из m булевых функций от n переменных, есть $(n, m, 1, k)$-распределённая схема для любого k.

Утверждение 1. *Для любых p, k и произвольной системы булевых функций $F^{n,m}(X_n)$ от n переменных имеют место неравенства*

$$L_B(F^{n,m})/p \leqslant \mathrm{TS}_k^p(F^{n,m}) \leqslant L_B(F^{n,m}).$$

Можно дать определение распределённой недетерминированной ветвящейся программы, состоящей из недетерминированных подпрограмм, при этом дуги из некоторых недетерминированных вершин будут идти в вершины других подпрограмм.

2. Сравнение

Ниже используем строчную букву f и прописную букву F для обозначения функции $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и системы функций $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^{m(n)}$ соответственно. Будет показано, что при некоторых значениях параметров p и m для некоторых последовательностей функций $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и систем булевых функций $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^{m(n)}$, где $n \to \infty$, сложность вычисления этих функций (систем функций) $(n, m, p, 0)$-распределёнными (кратко 0-распределёнными) схемами в базисе $B_0 = \{\vee, \wedge, \neg\}$ в p раз больше сложности вычисления тех же функций $(n, m, p, 1)$-распределёнными (или, кратко, 1-распределёнными) схемами в том же базисе. Рассматриваются последовательности, заданные неконструктивно, и конкретные последовательности систем булевых функций. Можно отметить, что в предложенных системах существует сильная зависимость между функциями. Это и позволило для некоторых значений параметров схем получить максимально возможное значение отношение сложностей 0- и 1-распределённых схем.

Пусть функция $f(X_n)$, где $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, — элемент последовательности булевых функций, сложность вычисления которых схемами из функциональных элементов в базисе $\{\vee, \&, \neg\}$ асимптотически равна $2^n/n$ [2, 3]. Построим последовательность систем булевых функций $F^{n,m}(X_n)$, сложность вычисления которых 1-распределёнными схемами меньше сложности её вычисления 0-распределёнными схемами. Через $\overline{\sigma}(i) = (\sigma_1(i), \ldots, \sigma_q(i))$, $0 \leqslant i \leqslant 2^{q-1}$, обозначим двоичное представление числа i. Для удобства изложения будем рассматривать случай, когда m и p — степени двойки.

Рассмотрим разложение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по первым $\log_2 m$ переменным (здесь и далее под log будем понимать $\log_2$):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=0}^{m-1} x_1^{\sigma_1(j)} \wedge \ldots \wedge x_{\log m}^{\sigma_{\log m}(j)} \\ \wedge f(\sigma_1(j), \ldots, \sigma_{\log m}(j), x_{\log m+1}, \ldots, x_n).$$

Для $0 \leqslant j \leqslant m-1$ положим

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1(j)} \wedge \ldots \wedge x_{\log m}^{\sigma_{\log m}(j)} \\ \wedge f(\sigma_1(j), \ldots, \sigma_{\log m}(j), x_{\log m+1}, \ldots, x_n).$$

Пусть $F^{n,m}(X_n) = (f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$ при $m \geqslant 2$, где

$$f_j(X_n) = \bigvee_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m-1 \\ i \neq j}} \varphi_i(X_n), \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Положим $F^{n,1}(X_n) = f(X_n)$.

Теорема 1. *Пусть m и p — степени двойки, $\log m = o(n)$, $\log p = o(n)$, $p \geqslant 2$. Тогда существует последовательность $F^{n,m}$ систем из m булевых функций от n переменных такая, что при $n \to \infty$ выполняются соотношения*:

$$\mathrm{TS}_0^p(F^{n,m})/\mathrm{TS}_1^p(F^{n,m}) \sim p \qquad \textit{при } m = 1 \textit{ и } m > p;$$

$$\mathrm{TS}_0^p(F^{n,m})/\mathrm{TS}_1^p(F^{n,m}) \gtrsim p\,(1 - 1/m) \qquad \textit{при } 2 \leqslant m \leqslant p.$$

Для меры сложности $\widetilde{\mathrm{TS}}$ справедливы аналогичные утверждения.

Доказательство проведём для неконструктивно заданной последовательности систем булевых функций $F^{n,m}(X_n)$. Рассмотрим два случая: $m \leqslant p$ и $m > p$.

Случай 1: $m \leqslant p$. Нижние оценки. При $m = 1$ имеем

$$\mathrm{TS}_0^p(F^{n,1}) \gtrsim 2^n/n. \tag{1}$$

Из [2, 3] следует, что при $\log m = o(n)$ сложность вычисления любой из функций $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ не превышает

$$(2^{n-\log m}/(n-\log m)) \cdot \left(1 + O\left(\frac{\log(n-\log m)}{n-\log m}\right)\right) + \log m,$$

а поскольку по условию теоремы $\log m = o(n)$, эта сложность асимптотически не превышает $2^n/(mn)$. Так как $f(X_n) = f_i(X_n) \vee \varphi_i(X_n)$, имеем

$$L(f(X_n)) \leqslant L(f_i(X_n)) + L\left(\varphi_i(X_n)\right) + 1.$$

Поэтому для сложности функции $f_i(X_n)$ при $m \geqslant 2$ справедлива оценка

$$L(f_i(X_n)) \geqslant L(f(X_n)) - L\left(\varphi_i(X_n)\right) - 1 \gtrsim 2^n/n - 2^n/(nm),$$

т. е.

$$\mathrm{TS}_0^p(F^{n,m}) \gtrsim (1 - 1/m)2^n/n \quad \text{при} \ \ m \geqslant 2 \tag{2}$$

$$\mathrm{TS}_0^p(F^{n,1}) \gtrsim 2^n/n \quad \text{при} \ \ m = 1. \tag{3}$$

Верхние оценки. $1 \leqslant m \leqslant p$. Построим i-ю подсхему, $1 \leqslant i \leqslant p$, такую, что на первом этапе (на нулевом слое) она вычисляет функцию

$$x_1^{\sigma_1(i-1)} \wedge x_2^{\sigma_2(i-1)} \wedge \ldots \wedge x_{\log p}^{\sigma_{\log p}(i-1)} \\ \wedge f(\sigma_1(i-1), \ldots, \sigma_{\log p}(i-1), x_{\log p+1}, \ldots, x_n).$$

Сложность такого вычисления не превышает величины

$$2\log p + 2^{(n-\log p)}/(n-\log p)\left(1 + O\left(\log(n-\log p)/(n-\log p)\right)\right).$$

Так как по условию теоремы $\log p = o(n)$, эта сложность асимптотически не превышает $2^n/(pn)$. В качестве t_1 (уровня, где возможен первый информационный обмен) выберем максимальную сложность подсхем нулевого слоя. Если сложность какой либо из построенных на первом этапе подсхем меньше приведённой выше оценки сложности, то дополним число элементов этой подсхемы до неё.

На втором этапе (на первом слое) i-я подсхема, $1 \leqslant i \leqslant m$, вычисляет функцию f_{i-1}. Поскольку любая из функций f_i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, является дизъюнкцией из $m-1$ функции φ_j (при $m \geqslant 2$), каждая из которых, в свою очередь, является дизъюнкцией из p/m функций, построенных на первом этапе, для построения функции f_i достаточно дополнительно использовать $(m-1)p/m$ дизъюнкций при $m \geqslant 2$ (для построения функции $F^{n,1}(X_n) = f(X_n)$ — дополнительно $p-1$ дизъюнкций). Таким образом, при $m \geqslant 2$ имеем

$$L(F^{n,m}(X_n)) \lesssim 2^n/(pn) + (m-1)p/m \sim 2^n/(pn),$$

а при $m = 1$

$$L(f(X_n)) \lesssim 2^n/(pn) + p - 1 \sim 2^n/(pn).$$

Таким образом, в случае 1 при любых $m \leqslant p$, удовлетворяющих условию теоремы, имеем

$$\mathrm{TS}_1^p(F^{m,n}) \lesssim 2^n/(pn).$$

Ввиду (1), (3) и этих оценок теорема справедлива.

Случай 2: $m > p$. Нижние оценки. Рассмотрим минимальную 0-распределённую схему S, вычисляющую систему функций $F^{n,m}(X_n)$. Существует по крайней мере одна подсхема $S_l, 1 \leqslant l \leqslant p$, на выходах элементов которой вычисляются по крайней мере две функции f_{i_1} и f_{i_2}, $i_1 \neq i_2$, из множества $\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}\}$. Поскольку $f(X_n) = f_i(X_n) \vee f_j(X_n)$ для любых $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$, $i \neq j$, имеем $L(f(X_n)) \leqslant L(S_l) + 1$. Поэтому

$$TS_0^p(F^{n,m}) \geqslant L(S_l) \geqslant L(f(X_n)) - 1 \gtrsim 2^n/n.$$

Верхние оценки. Построим схему S такую, что i-я подсхема, $i = 1, 2, \ldots, p$, на первом этапе (на нулевом слое) вычисляет m/p функций $\varphi_{(i-1)m/p}, \varphi_{(i-1)m/p+1}, \ldots, \varphi_{im/p-1}$, а также функции

$$\omega_i(j) = \bigvee_{\substack{(i-1)m/p \leqslant s \leqslant im/p-1 \\ s \neq j}} \varphi_s \tag{4}$$

для $(i-1)m/p \leqslant j \leqslant im/p - 1$ и функцию

$$W_i = \bigvee_{j=(i-1)m/p}^{im/p-1} \varphi_j. \tag{5}$$

Для этого на нулевом слое вычислим m/p функций

$$f(\sigma_1(i-1), \sigma_2(i-1), \ldots, \sigma_{\log p}(i-1), \sigma_1(j), \sigma_2(j) \ldots, \sigma_{\log m - \log p}(j),\\ x_{\log m+1}, \ldots, x_n), \quad 0 \leqslant j \leqslant m/p - 1.$$

Поскольку по условию теоремы $\log p = o(n)$, сложность такого вычисления [2, 3] асимптотически не превышает

$$(m/p)2^{(n-\log m)}/(n - \log m) \sim 2^n/(p\,n).$$

Вычислим набор из $2^{\log m - \log p}$ конъюнкций

$$x_1^{\sigma_1(i-1)} \wedge \ldots \wedge x_{\log p}^{\sigma_{\log p}(i-1)} \wedge x_{\log p+1}^{\sigma_1(j)} \wedge \ldots \wedge x_{\log m}^{\sigma_{\log m - \log p}(j)}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m/p.$$

Сложность такого вычисления не превосходит

$$O(\log p + 2^{\log m - \log p}) = O(\log p + m/p).$$

Домножим выход каждого элемента, вычисляющего такую конъюнкцию, на выход элемента, вычисляющего соответствующую подфункцию функции f, в результате получим функцию φ_j, $j \in \{(i-1)m/p, \ldots, im/p - 1\}$. После этого вычислим функции (4) и (5). Сложность этого вычисления не больше $(m/p)(m/p + 1)$. Общая сложность вычисления на нулевом слое не превосходит

$$2^n/(pn) + O((m/p)^2) + O(\log p) \sim 2^n/(pn). \tag{6}$$

Выберем в качестве первого уровня информационного обмена t_1 величину самой сложной подсхемы нулевого слоя. Если сложность какой-то из подсхем окажется меньше этой величины, то добавим фиктивные элементы для некоторых подсхем.

В начале второго этапа (первого слоя) i-я подсхема вычислит дизъюнкцию всех функций W_s, где $s \neq i$. Дизъюнкция функций $\omega_i(j)$ и $\bigvee\limits_{s, s\neq i} W_s$ и даст соответствующую функцию f_j. Сложность вычисления функций на первом слое не больше $p + m/p$. Из этой оценки и (6) следует, что в случае 2 при ограничениях на p и m по условию теоремы имеем

$$\mathrm{TS}_1^p(F^{n,m}) \lesssim 2^n/(pn) + p + m/p \lesssim 2^n/(pn).$$

Теорема 1 доказана.

Последовательность $F^{n,m}$ даёт неконструктивный пример последовательности функций, для которой сложность вычисления этой системы 0-распределёнными схемами существенно больше сложности вычисления той же системы функций 1-распределёнными схемами. Аналогично можно построить пример конструктивно заданной последовательности функций, для которой имеет место аналогичное утверждение, но для более узкого диапазона значений параметров.

Предположим, что $m \leqslant n$ и n делится на m. Пусть $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для $j = 1, \ldots, m$ положим

$$X^j = \{x_{(j-1)n/m+1}, \ldots, x_{jn/m}\}, \quad \psi^j(X^j) = x_{(j-1)n/m+1} \vee \ldots \vee x_{jn/m},$$

$$g_j = \bigvee_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq j}} \psi^i(X^i), \quad G^{n,1} = \bigvee_{j=1}^{n} x_j, \quad G^{n,m}(X_n) = (g_1, g_2, \ldots, g_m) \ (m \geqslant 2).$$

Некоторой модификацией теоремы 1 является

Теорема 2. *Для последовательности систем булевых функций $G^{n,m}(X_n)$ от n переменных при условиях $p = o(\sqrt{n})$ и $p \geqslant 2$ при $n \to \infty$ имеем*

$$\mathrm{TS}_0^p(G^{n,m})/\mathrm{TS}_1^p(G^{n,m}) \gtrsim p\,(1 - 1/m) \qquad \text{при } 2 \leqslant m \leqslant p;$$
$$\mathrm{TS}_0^p(G^{n,m})/\mathrm{TS}_1^p(G^{n,m}) \sim p \qquad \text{при } m = 1 \text{ и } m > p.$$

Для $\widetilde{\mathrm{TS}}$ справедливы аналогичные утверждения.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $m \leqslant p$. Нижние оценки. $\mathrm{TS}_0^p(G^{n,1}(X_n)) = n - 1$ при $m = 1$, $\mathrm{TS}_0^p(G^{n,m}(X_n)) = n - n/m - 1$ при $2 \leqslant m \leqslant p$.

Верхние оценки. Разобьём множество переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ на p подмножеств $A_1, \ldots, A_p$, содержащих $\lceil n/p \rceil$ или $\lfloor n/p \rfloor$ переменных. При этом первые множества $A_1, A_2, \ldots, A_p$ содержат по $\lceil n/p \rceil$ переменных, а последние — $\lfloor n/p \rfloor$ переменных. Пусть множество A_1 содержит первые $\lceil n/p \rceil$ переменных из X_n: $A_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{\lceil n/p \rceil}\}$, A_2 — следующие $\lceil n/p \rceil$ или $\lfloor n/p \rfloor$ переменных из X_n, а множество A_p — последние $\lfloor n/p \rfloor$ переменные из X_n.

Каждое из множеств A_i может иметь непустое пересечение не более чем с двумя множествами из семейства $\{X^1, X^2, \ldots, X^m\}$. Обозначим эти пересечения через B_i^1 и B_i^2. Одно из этих множеств может быть пустым. Положим[1)] $h_i^1 = \bigvee_{x_j \in B_i^1} x_j$, $h_i^2 = \bigvee_{x_j \in B_i^2} x_j$.

[1)] Одна из этих функций может равняться нулю.

На первом этапе (на нулевом слое) вычислим функции h_i^1 и h_i^2. Сложность их вычисления не превышает $|A_i| - 1 \leqslant \lceil n/p \rceil - 1 \leqslant \lfloor n/p \rfloor$. В качестве t_1 (уровня, где возможен первый информационный обмен) выберем величину $\lfloor n/p \rfloor$. Если сложность какой либо из построенных подсхем меньше $\lfloor n/p \rfloor$, то дополним число элементов этой подсхемы до этой величины.

На втором этапе на выходе i-й подсхемы, $i \leqslant p$, вычислим функцию g_i; если $p > m$ и $i > m$, то i-я подсхема вычисляет функцию, тождественно равную нулю. Для этого i-я схема, $i \leqslant p$, вычисляет дизъюнкцию ненулевых функций $h_1^1, h_1^2, h_2^1, h_2^2, \dots, h_p^1, h_p^2$, не зависящих от переменных из множества X^i. Сложность такого вычисления не превышает $2p$. Поэтому с учётом условий теоремы получаем, что

$$\mathrm{TS}_1^p(G^{n,m}(X_n)) \leqslant n/p + 2p \lesssim n/p.$$

Отсюда и из соответствующей нижней оценки следует утверждение теоремы.

Случай 2: $m > p$. Нижние оценки. Если $m > p$, то существует подсхема, вычисляющая не менее двух функций системы $G^{n,m}$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 1, следует, что $\mathrm{TS}_0^p(G^{n,m}) \geqslant n - 2$.

Верхние оценки. Разобьём множество переменных $x_1, \dots, x_n$ на p подмножеств, при этом первые множества $A_1, A_2, \dots, A_p$ содержат по $\lceil m/p \rceil \cdot n/m$ переменных. При этом некоторые из последних множеств могут быть пустыми, а последнее из непустых множество может содержать меньшее число переменных.

Пусть на первом этапе (нулевой слой) i-я подсхема вычисляет функции $\psi^j(X^j)$, $(i-1)\lceil m/p \rceil + 1 \leqslant j \leqslant i\lceil m/p \rceil$ (для последнего непустого A_i множество вычисляемых функций может быть меньше), а также вычисляет функцию

$$h^i(A_i) = \bigvee_{(i-1)\lceil m/p \rceil + 1 \leqslant j \leqslant i\lceil m/p \rceil} \psi^j(X^j).$$

Число элементов на нулевом слое не превышает $\lceil m/p \rceil \cdot n/m - 1$. Положим $t_1 = \lceil m/p \rceil \cdot n/m$. Если сложность какой-то из построенных подсхем меньше приведённой выше оценки сложности, то дополним число элементов этой подсхемы до этой величины.

На втором этапе (первый слой) i-я подсхема вычислит функции $g_{(i-1)\lceil m/p \rceil + 1}, g_{(i-1)\lceil m/p \rceil + 2}, \dots, g_{i\lceil m/p \rceil}$. На первом шаге второго этапа вычислим дизъюнкцию всех функций, полученных остальными схемами, т. е. функцию $H^i = \bigvee\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq i}} h^j$. Сложность такого вычисления не превосходит $p-1$. Далее, используя полученные на нулевом слое i-й подсхемы функции $\psi^j(X^j)$, для j, удовлетворяющих условиям $(i-1)\lceil m/p\rceil + 1 \leqslant j \leqslant i\lceil m/p\rceil$, построим функции $g'_j = \bigvee\limits_{\substack{(i-1)\lceil m/p\rceil+1\leqslant s\leqslant i\lceil m/p\rceil\\ s\neq j}} \psi^s(X^s)$. В силу, например, утверждения 3 из [10] это можно сделать с использованием не более чем $3\lceil m/p\rceil$ операций дизъюнкции. И, наконец, истратив $\lceil m/p\rceil$ элементов, в соответствии с равенствами $g_j = g'_j \vee H_i$ получаем функции g_j, $(i-1)\lceil m/p\rceil+1 \leqslant j \leqslant i\lceil m/p\rceil$. Таким образом, сложность i-й подсхемы не превышает $\lceil m/p\rceil \cdot n/m + p + 3\lceil m/p\rceil + \lceil m/p\rceil \lesssim n/p + 4m/p \lesssim n/p$. Следовательно,

$$\mathrm{TS}_1^p(G^{n,m}(X_n)) \lesssim n/p.$$

Из полученной оценки и оценки (2) следует утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Замечание. Если $m = 1$, то для почти всех булевых функций сложность вычисления 0-распределёнными схемами асимптотически в p раз больше, чем сложность вычисления тех же функций даже 1-распределёнными схемами. Этот факт следует из доказательства теоремы 1.

Если $m \geqslant p$, $\log m = o(n)$, то для любого k сложность вычисления почти всех систем из m функций от n переменных $(n, m, p, 0)$-распределёнными схемами не более чем в $\dfrac{\lceil m/p\rceil}{m/p}$ раз превосходит сложность вычисления такой системы (n, m, p, k)-распределёнными схемами. Действительно, известно [3], что почти для всех систем

$$F^{n,m}(X_n) = (f_1(X_n), f_2(X_n), \ldots, f_m(X_n))$$

из m булевых функций от n переменных минимальные схемы имеют сложность не менее чем $m2^n/(n + \log m)$ (асимптотически). Следовательно, хотя бы одна из p подсхем 0-распределённой схемы должна содержать асимптотически не менее чем $m2^n/(p(n + \log m)) \gtrsim m2^n/(pn)$ элементов. Для получения верхней оценки сложности рассмотрим вычисление первой подсхемой первых $\lceil m/p\rceil$ функций из системы булевых функций $F^{n,m}(X_n)$, второй подсхемой — следующих $\lceil m/p\rceil$ или $\lfloor m/p\rfloor$ функций этой системы, и т. д. Очевидно, что сложность такой схемы асимптотически не превышает $\lceil m/p\rceil \cdot 2^n/(n + \log\lceil m/p\rceil) \lesssim \lceil m/p\rceil \cdot 2^n/n$.

Таким образом, если $m \geqslant p$ и m делится на p, $\log m = o(n)$, то для любого k и почти всех систем из m функций от n переменных имеем $\mathrm{TS}_0^p(F^{n,m}) \sim \mathrm{TS}_k^p(F^{n,m})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев А. Е.** Об одном методе получения нижних оценок сложности индивидуальных монотонных функций // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 282, № 5. — С. 1033–1037.
2. **Лупанов О. Б.** О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. — Вып. 10. — М.: Наука, 1963. — С. 63–97.
3. **Лупанов О. Б.** Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.
4. **Окольнишникова Е. А.** Нижние оценки сложности реализации характеристических функций двоичных кодов бинарными программами // Методы дискретного анализа в синтезе реализаций булевых функций: Сб. науч. тр. Вып. 51. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. — С. 61–83.
5. **Окольнишникова Е. А.** Об одном методе получения нижних оценок сложности реализации булевых функций недетерминированными ветвящимися программами // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 76–112.
6. **Окольнишникова Е. А.** Нижняя оценка сложности вычисления характеристических функций БЧХ-кодов ветвящимися программами // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 69–77.
7. Параллельные машины // Энциклопедия «Дискретная математика». — М.: Большая Российская энциклопедия, 2004. — С. 193–194.
8. Параллельных вычислений теория // Энциклопедия «Дискретная математика». — М.: Большая Российская энциклопедия, 2004. — С. 194–196.
9. **Разборов А. А.** Нижние оценки сложности монотонной сложности некоторых булевых функций // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 281, № 4. — С. 798–801.
10. **Чашкин А. В.** О сложности булевых матриц, графов и соответствующих им булевых функций // Дискрет. математика. — 1994. — Т. 6, вып. 2. — С. 43–73.

Окольнишникова Елизавета Антоновна

Статья поступила
3 декабря 2010 г.