ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2011. Том 18, № 6. С. 82–89

УДК 519.8

О ПАРАМЕТРАХ СОВЕРШЕННЫХ 2-РАСКРАСОК ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ *)

Д. Б. Хорошилова

Аннотация. Предлагается конструкция, позволяющая строить совершенные 2-раскраски циркулянтных графов с новыми неизвестными ранее параметрами.

Ключевые слова: совершенная раскраска, циркулянтный граф, сплошная раскраска.

Статья посвящена совершенным раскраскам графов — теме, с основами которой можно ознакомиться, посмотрев, например, [1, 2, 17]. Употребляемые теоретико-графовые понятия и определения в основном соответствуют терминологии, принятой в [10, 12]. Продолжается изучение совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов, начало которому положено в [11], где полностью охарактеризованы раскраски некоторого специального вида, так называемые сплошные (2-раскраски множества $\mathbb{Z}_n$ вершин циркулянтного графа, естественным образом организованных в цикл, такие, что все вершины одного цвета расположены подряд). В частности, показано, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является матрицей параметров некоторой сплошной 2-раскраски циркулянтного графа тогда и только тогда, когда числа a, b, c, d целые неотрицательные, $a+b=c+d=2n$, b и c больше нуля и $a-c \geqslant -2\lfloor (b,c)/2 \rfloor$, другими словами, когда младшее собственное число матрицы не меньше $-2\lfloor (b,c)/2 \rfloor$, где через (b,c) обозначен наибольший общий делитель b и c.

Отметим, что произвольная совершенная раскраска циркулянтного графа с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a+b=c+d=2n$, индуцирует совершенную раскраску n-мерной бесконечной решётки $\mathbb{Z}^n$ с той же матрицей параметров (многие исследователи рассматривают совершенные раскраски графов, имеющих явно выраженную алгебраическую природу,

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России, 2009–2013 гг.» (гос. контракт № 02.740.11.0429).

таких, как граф $\mathbb{Z}^n$, граф n-мерного двоичного куба или дистанционно-регулярные графы (см., например, [3, 6–9, 13, 14, 18])). В частности, множество параметров, которые могут быть получены при помощи конструкции, описанной в [11], включает все параметры, соответствующие раскраскам n-мерной бесконечной решётки, построенным в [15, 16].

В настоящей работе предлагается конструкция, позволяющая строить совершенные 2-раскраски циркулянтных графов с параметрами, отличными от перечисленных в [11].

В [11] циркулянтный граф определялся следующим образом.

Определение 1. *Циркулянтным графом* длины n с вектором *кратностей дистанций* $\varkappa = (\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ называется мультиграф с петлями $C_n(\varkappa)$ на множестве вершин $V = \mathbb{Z}_n$ такой, что для любых $u \in \mathbb{Z}_n$ и $i \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ кратности рёбер $\{u, u+i\}$ и $\{u, u-i\}$ в графе $C_n(\varkappa)$ равны $\varkappa_i$.

Здесь $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ — целые неотрицательные числа. По ряду соображений (подробнее см. [11]) удобно потребовать, чтобы $\varkappa_0$ и $\varkappa_{\frac{n}{2}}$ (при чётном n) были чётными.

Следует отметить, что для графов подобного вида и соответствующих им матриц смежности общеупотребительны названия «циркулянтный граф», «циркулянтная матрица» («циркулянт») (см., например, [4, с. 14]), однако там такие графы не вполне корректно именуются циркулярными. В настоящей работе будем придерживаться общепринятой терминологии.

Воспользуемся алгебраическим представлением циркулянтного графа. Чтобы получить такое представление, необходимо предварительно расширить понятие циркулянтного графа.

Определение 2. Рассмотрим полный ориентированный граф с петлями на множестве вершин $V = \mathbb{Z}_n$. Дуге $(u, u+i)$ данного графа припишем вес $w_i \in \mathbb{C}$ для всех $u \in \mathbb{Z}_n,\ i = 0, \ldots, n-1$. Полученный взвешенный граф будем называть *обобщённым циркулянтным графом* (ОЦГ) длины n с вектором *обобщённых кратностей дистанций* $w = (w_0, \ldots, w_{n-1})$ и обозначать через $C_n(w)$.

Нетрудно понять, что когда все компоненты вектора w целые неотрицательные, w_0 и $w_{\frac{n}{2}}$ чётны при чётном n и $w_i = w_{n-i},\ i = 1, \ldots, n-1$, обобщённый циркулянтный граф по сути обыкновенный циркулянтный граф длины n с вектором кратностей дистанций $(w_0, \ldots, w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$.

Нам потребуется также определение совершенной раскраски для взвешенного орграфа с петлями.

Определение 3. Раскраска вершин взвешенного ориентированного графа с петлями в цвета из множества $N = \{1, 2, \ldots, s\}$ называется *совершенной с матрицей параметров* $M = (m_{ij})$ размера $s \times s$, если сумма весов дуг (включая петли), выходящих из вершины v цвета i и ведущих в вершины цвета j, не зависит от выбора v и равно m_{ij} для любых $i, j \in \{1, \ldots, s\}$.

Рассмотрим так называемую обратную задачу: зафиксируем некоторое множество вершин и некоторую его раскраску и будем искать все ОЦГ с указанным множеством вершин, для которых выбранная раскраска совершенна. Чтобы поставить задачу более формально, введём следующее понятие.

Определение 4. Зафиксируем некоторую раскраску элементов множества $\mathbb{Z}_n$. Если она является совершенной раскраской вершин графа $C_n(w)$ для некоторого вектора $w \in \mathbb{C}^n$, то его будем называть *подходящим* для этой раскраски элементов множества $\mathbb{Z}_n$.

Таким образом, обратная задача состоит в нахождении всех векторов $w \in \mathbb{C}^n$, подходящих для выбранной раскраски элементов множества $\mathbb{Z}_n$.

Очевидно, что когда вектор $w = (w_0, \ldots, w_{n-1})$ является подходящим для данной раскраски элементов множества $\mathbb{Z}_n$, то же верно и для вектора $w' = (w_0 + \Delta, \ldots, w_{n-1})$ при любом $\Delta \in \mathbb{C}$, и что если векторы w и z подходящие, то вектор $\alpha w + \beta z$ также является подходящим для данной раскраски при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Теперь перейдём к рассмотрению совершенных 2-раскрасок обобщённых циркулянтных графов. Зафиксируем некоторую раскраску элементов $\mathbb{Z}_n$ в два цвета. Сопоставим ей *вектор раскраски* $\chi = (\chi_0, \ldots, \chi_{n-1})$, где

$$\chi_i = \begin{cases} 0, & \text{если элемент } i \text{ покрашен цветом } 1, \\ 1, & \text{если элемент } i \text{ покрашен цветом } 2, \end{cases}$$

для $i = 0, \ldots, n-1$. *Матрицей раскраски* будем называть матрицу X, строки которой представляют собой последовательные циклические сдвиги вектора χ, т. е.

$$X = \begin{pmatrix} \chi_0 & \chi_1 & \cdots & \chi_{n-1} \\ \chi_{n-1} & \chi_0 & \cdots & \chi_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_0 \end{pmatrix}.$$

Легко понять, что если выбранная 2-раскраска элементов $\mathbb{Z}_n$ является совершенной раскраской вершин графа $C_n(w)$, $w = (w_0, \ldots, w_{n-1})$, с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то верно $a+b=c+d$ и данная раскраска элементов $\mathbb{Z}_n$ является также совершенной раскраской графа $C_n(w')$, где $w' = (w_0 + (c-a), \ldots, w_{n-1})$, с матрицей параметров $\begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix}$. Далее, очевидно, что заданная 2-раскраска элементов $\mathbb{Z}_n$ является совершенной раскраской графа $C_n(w)$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда

$$X \cdot w = \begin{pmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Решениями уравнения (1) являются векторы вида

$$w = \frac{b}{N_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + x,$$

где N_2 — число элементов множества $\mathbb{Z}_n$, покрашенных цветом 2, а вектор x является собственным для матрицы X с собственным значением 0.

Таким образом, заданная 2-раскраска элементов $\mathbb{Z}_n$ является совершенной раскраской вершин графа $C_n(w)$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$w = (a-c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{N_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + x, \tag{2}$$

где x — собственный вектор матрицы X с нулевым собственным значением.

Легко убедиться, что матрица X представляет собой полином от матрицы циклического сдвига. Известно (см., например, [4, с. 101–102]), что базис пространства $\mathbb{C}^n$, состоящий из собственных векторов такой матрицы, может быть выбран в следующем виде:

$$x(j) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi j}{n}} \\ \vdots \\ e^{i\frac{2\pi j}{n}(n-1)} \end{pmatrix}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

В частности, пространство собственных векторов матрицы X с нулевым собственным значением совпадает с линейной оболочкой множества $\{x(j) \mid \chi \cdot x(j) = 0\}$.

Построение серии раскрасок с новыми параметрами будем осуществлять следующим образом. Рассматривая некоторые специальные 2-раскраски элементов множества $\mathbb{Z}_n$, будем строить для каждой из них подходящий вектор w таким образом, чтобы ОЦГ $C_n(w)$ был обыкновенным циркулянтным графом длины n и эта раскраска элементов $\mathbb{Z}_n$ являлась совершенной раскраской указанного графа с матрицей параметров, не реализуемой никакой сплошной раскраской.

Перейдём к подробному описанию конструкции. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — все простые делители числа n. Выберем 2-раскраску элементов из $\mathbb{Z}_n$ так, чтобы множество V_2 вершин цвета 2 представляло собой объединение нескольких непересекающихся множеств вида

$$W_{(i,r)} = \left\{ j \in \mathbb{Z}_n \mid j = r \bmod \frac{n}{p_i} \right\},$$
$$(i,r) \in I \subset \{1, \ldots, k\} \times \left\{ 0, 1, \ldots, \frac{n}{p_i} - 1 \right\},$$

и число $q = |V_2|$ взаимно просто с n (пример того, как это можно сделать, приведён ниже). Легко видеть, что при такой раскраске элементов $\mathbb{Z}_n$ для вектора раскраски χ верно

$$\chi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{(i,r)\in I} \left(\sum_{j=0}^{p_i-1} w^{r+j\cdot\frac{n}{p_i}} \right) = \sum_{(i,r)\in I} w^r \cdot \sum_{j=0}^{p_i-1} (w^{\frac{n}{p_i}})^j = 0$$

для любого ω из множества $\mathrm{PR}(p_1 p_2 \ldots p_k)$ простых комплексных корней из единицы степени $p_1 p_2 \ldots p_k$.

Рассмотрим вектор

$$x = \sum_{\omega \in \mathrm{PR}(p_1 p_2 \ldots p_k)} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Компоненты x являются рациональными числами, так как могут быть выражены рациональными функциями от коэффициентов кругового многочлена [5]. Кроме того, несложно убедиться, что $x_0 = \varphi(p_1 p_2 \ldots p_k)$, где

φ — функция Эйлера, $|x_i| \leqslant x_0$ и $x_i = x_{n-i}$ для $i = 1, \dots, n-1$. Пусть число m является общим знаменателем для всех компонент вектора x, и пусть $k = 2\varphi(p_1 p_2 \dots p_k)m$. Определим вектор w следующим образом:

$$w = (-2k)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} + 2mx.$$

Легко проверить, что при таком векторе обобщённых кратностей дистанций w обобщённый циркулянтный граф $C_n(w)$ является обычным циркулярным графом длины n и что выбранная раскраска элементов множества $\mathbb{Z}_n$ является совершенной раскраской вершин указанного графа с матрицей параметров $\begin{pmatrix}k(p-2) & kq\\ kp & k(q-2)\end{pmatrix}$, где $p = n - q$. По выбору раскраски $(n, q) = 1$, откуда $(p, q) = 1$, следовательно, полученная матрица параметров не реализуется никакой сплошной раскраской.

В заключение приведём один способ построения множества $V_2 \subset \mathbb{Z}_n$ нужного вида. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — все простые делители числа n, и пусть $k \geqslant 3$. Число $p_1 p_2 \dots p_{k-1} + p_k$, очевидно, взаимно просто с n. Рассмотрим непересекающиеся множества

$$A_r = \left\{ j \in \mathbb{Z}_n \mid j = r \bmod \frac{n}{p_{k-1}p_k} \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, \frac{n}{p_{k-1}p_k} - 1.$$

Ясно, что $A_0 \supset B_0 = \left\{ j \in \mathbb{Z}_n \mid j = 0 \bmod \frac{n}{p_k} \right\}$. Оставшиеся множества $A_1, \dots, A_{\frac{n}{p_{k-1}p_k}-1}$ содержат в совокупности $p_k\left(\frac{n}{p_{k-1}p_k} - 1\right)$ непересекающихся множеств вида $\left\{ j \in \mathbb{Z}_n \mid j = r' \bmod \frac{n}{p_{k-1}} \right\}$. Так как

$$\begin{aligned} p_k\left(\frac{n}{p_{k-1}p_k} - 1\right) &\geqslant p_1 \dots p_{k-2}p_k - p_k \\ &\geqslant 2p_2 \dots p_{k-2}p_k - p_k \geqslant p_2 \dots p_{k-2}p_k > p_1 p_2 \dots p_{k-2}, \end{aligned}$$

выбрав $p_1 p_2 \dots p_{k-2}$ таких множеств и объединив их с множеством B_0, получим множество V_2 требуемого вида.

В силу вышеприведённых рассуждений справедлива

Теорема. *Существует бесконечная серия циркулянтных графов, допускающих совершенные 2-раскраски с параметрами вида* $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a - c = -2(b, c) < -(b, c)$, *т. е. с параметрами, не реализуемыми никакой сплошной раскраской.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.** Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 3. — С. 3–16.
2. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 3–12.
3. **Ефремова Е. М., Молодых Е. А.** Параметры совершенных раскрасок бесконечной кубической решётки в два цвета // Устное сообщение.
4. **Прасолов В. В.** Задачи и теоремы линейной алгебры. — М: Наука, Физматлит, 1996. — 304 с.
5. **Прасолов В. В.** Многочлены. — М: МЦНМО, 2001. — С. 104–113.
6. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 1. — С. 79–92.
7. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(\mathbb{Z}^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 37–54.
8. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292–295.
9. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 924–931.
10. **Харари Ф.** Теория графов. — М: КомКнига, 2006. — 296 с.
11. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80–92.
12. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. Теория и применение. — Киев: Наукова думка, 1984. — 384 с.
13. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. — Vol. 268, N 1–3. — P. 31–49.
14. **Agustini E., Costa S. I. R., Muniz M., Palazzo R.** Graphs, tesselations, and perfect codes on flat tori // IEEE Trans. Inf. Theory. — 2004. — Vol. 50, N 10. — P. 2363–2377.
15. **Dorbec P., Gravier S., Honkala I., Mollard M.** Weighted codes in Lee metrics // Des. Codes Cryptography. — 2009. — Vol. 52. — P. 209–218.
16. **Dorbec P., Gravier S., Honkala I., Mollard M.** Weighted perfect codes in Lee metric // Electron. Notes Discrete Math. — 2009. — Vol. 34. — P. 477–481.
17. **Godsil C.** Equitable partitions // Combinatorics. Paul Erdös is eighty. Vol. 1. — Budapest, Hungary: Janos Bolyai Mathematical Society, 1993. — P. 173—192.

18. **Krotov D. S.** Perfect colorings of $\mathbb{Z}^2$: nine colors // http://arxiv.org/abs/0901.0004. — 2008. — 177 p.

Хорошилова Дарья Борисовна,
e-mail: dkhor@ngs.ru

Статья поступила
13 мая 2011 г.

Переработанный вариант —
23 августа 2011 г.