ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2012. Том 19, № 1. С. 33–40

УДК 519.718

О НАДЁЖНОСТИ НЕВЕТВЯЩИХСЯ ПРОГРАММ В БАЗИСЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ОБОБЩЁННУЮ КОНЪЮНКЦИЮ *)

С. М. Грабовская

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с операторами условной остановки в полном конечном базисе, содержащем хотя бы одну из функций $x_1 \cdot x_2$, $\overline{x}_1 \cdot x_2$ или $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$. Предполагается, что функциональные операторы с вероятностью $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах, а операторы условной остановки абсолютно надёжны. Доказано, что в таких базисах любую булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой, функционирующей с ненадёжностью не больше $\varepsilon + 59\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.

Ключевые слова: булева функция, неветвящаяся программа, оператор условной остановки, синтез, надёжность.

Введение

Рассматривается реализация булевых функций неветвящимися программами с операторами условной остановки [4] в полном конечном базисе B. Программы с оператором условной остановки характеризуются наличием управляющей команды — команды условной остановки, дающей возможность досрочного прекращения работы при выполнении определённого условия. Сформулируем необходимые понятия и определения [4].

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество независимых булевых переменных, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — набор независимых переменных, $n \in \mathbb{N}$. Введём множества переменных $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$ и $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$, $l, m \in \mathbb{N}$. Переменные из Y назовём *внутренними*, а из Z — *выходными* переменными. Пусть $a \in Y \cup Z$, $b_1, \ldots, b_d \in X \cup Y \cup Z$ $(d \in \{1, \ldots, n\})$, h — булева функция из базиса B, зависящая не более чем от d переменных. *Вычислительным оператором* p назовём выражение $p:\ a = h(b_1, \ldots, b_d)$. Переменную a назовём *выходом вычислительного оператора*, переменные $b_1, \ldots, b_d$ — *её входами.*

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00212-а).

Пусть $a \in X \cup Y \cup Z$. *Оператором остановки* p назовём выражение $p:\ \mathrm{Stop}(a)$. Переменную a назовём *входом* оператора остановки p.

Последовательность $\mathrm{Pr} = p_1 \ldots p_i \ldots p_L$, состоящая из вычислительных операторов и операторов остановки, называется *неветвящейся программой с условной остановкой*, если при любом $j \in \{1, 2, \ldots, L\}$ каждый вход оператора p_j есть либо независимая переменная, либо выход некоторого вычислительного оператора.

Неветвящаяся программа работает в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$, не изменяет значений независимых переменных и изменяет значения внутренних и выходных переменных. Значения $y_i(\widetilde{x}; t)$ внутренних переменных y_i и $z_j(\widetilde{x}; t)$ выходных переменных z_j программы Pr в произвольный момент времени t на наборе независимых переменных $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ определим индуктивно следующим образом:

(i) в начальный момент времени $t = 0$ значения всех внутренних и выходных переменных считаем неопределёнными;

(ii) если оператор p_t не изменяет значения внутренней переменной y_i или выходной переменной z_j, то полагаем

$$y_i(\widetilde{x}; t) = y_i(\widetilde{x}; t-1), \quad z_j(\widetilde{x}; t) = z_j(\widetilde{x}; t-1);$$

(iii) если оператор p_t изменяет значение внутренней переменной y_i или выходной переменной z_j и значения 1-го, …, d-го входов оператора p_t в момент времени $t-1$ равны $b_1(\widetilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\widetilde{x}; t-1)$ соответственно, то полагаем

$$y_i(\widetilde{x}; t) = h_t(b_1(\widetilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\widetilde{x}; t-1)),$$
$$z_j(\widetilde{x}; t) = h_t(b_1(\widetilde{x}; t-1), \ldots, b_d(\widetilde{x}; t-1)).$$

Значением оператора p_t программы Pr на наборе $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовём значение её выхода в момент времени t, обозначим его через $p_t(\widetilde{x})$. Через $n(p)$ обозначим номер оператора p в программе Pr, т. е. $n(p_i) = i$. Пусть $p_{t_1}, \ldots, p_{t_r}$ — все операторы остановки из Pr, причём $t_1 < \ldots < t_r$. Через s_j будем обозначать j-й оператор остановки программы Pr, т. е. $s_j \equiv p_{t_j}$. Вычислительный оператор p_i (переменную x_l) назовём *аргументом оператора остановки* s_j, $n(s_j) = r$, и обозначим через q_j, если (a) выход оператора p_i (переменная x_l) является входом оператора s_j, (b) среди $p_t,\ i < t < r$, нет оператора, выход которого совпадает с выходом p_i.

Будем говорить, что k-й оператор остановки s_k *прекращает вычисления программы* Pr на наборе $\widetilde{x}$, если

$$q_1(\widetilde{x}) = \ldots = q_{k-1}(\widetilde{x}) = 0, \quad q_k(\widetilde{x}) = 1.$$

Результат действия программы Pr на наборе $\widetilde{x}$ обозначим через $\mathrm{Pr}(\widetilde{x})$ и его l-ю компоненту $\mathrm{Pr}_l(\widetilde{x})$ определим следующим образом:

$$\mathrm{Pr}_l(\widetilde{x}) = \begin{cases} z_l(\widetilde{x}; t_k), & \text{если } q_1(\widetilde{x}) = \ldots = q_{k-1}(\widetilde{x}) = 0,\ q_k(\widetilde{x}) = 1, \\ z_l(\widetilde{x}; L), & \text{если } q_1(\widetilde{x}) = \ldots = q_r(\widetilde{x}) = 0, \end{cases}$$

т. е. $\mathrm{Pr}_l(\widetilde{x})$ равно значению l-й выходной переменной z_l в момент остановки программы. Легко видеть, что

$$\mathrm{Pr}_l(\widetilde{x}) = q_1(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_1) \vee \overline{q}_1(\widetilde{x})q_2(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_2) \vee \ldots \vee \overline{q}_1(\widetilde{x})\overline{q}_2(\widetilde{x}) \ldots \overline{q}_{k-1}(\widetilde{x})q_k(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_k) \vee \ldots \vee \overline{q}_1(\widetilde{x})\overline{q}_2(\widetilde{x}) \ldots \overline{q}_{r-1}(\widetilde{x})q_r(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_r) \vee \ldots \vee \overline{q}_1(\widetilde{x})\overline{q}_2(\widetilde{x}) \ldots \overline{q}_r(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; L). \quad (1)$$

Иногда (1) удобнее использовать в преобразованном виде:

$$\mathrm{Pr}_l(\widetilde{x}) = q_1(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_1) \vee \overline{q}_1(\widetilde{x})(q_2(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_2) \vee \overline{q}_2(\widetilde{x})(\ldots (q_{k-1}(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_{k-1}) \vee \overline{q}_{k-1}(\widetilde{x})(\ldots \vee \overline{q}_{r-1}(\widetilde{x})(q_r(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; t_r) \vee \overline{q}_r(\widetilde{x})z_l(\widetilde{x}; L))\ldots))\ldots)). \quad (2)$$

Если $\mathrm{Pr}(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$ для любого $\widetilde{x}$ из $\{0,\ 1\}^n$, то программа Pr вычисляет n-местную булеву функцию f. Далее будем считать, что операторы условной остановки абсолютно надёжны, а вычислительные операторы базиса B независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Поскольку оператор условной остановки абсолютно надёжен, он срабатывает, когда на его вход поступает единица. Инверсные неисправности на выходах вычислительных операторов характеризуются тем, что в исправном состоянии вычислительный оператор реализует приписанную ему функцию φ, а в неисправном — функцию $\overline{\varphi}$.

Программа Pr реализует булеву функцию $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, если она реализует её при отсутствии неисправностей.

Ненадёжностью $N(\mathrm{Pr})$ *программы* Pr назовём максимальную вероятность ошибки на выходе программы Pr при всевозможных входных наборах.

Чтобы использовать известные результаты для схем из функциональных элементов введём понятия ненадёжности схемы и асимптотически оптимальной схемы.

Ненадёжностью $N(S)$ *схемы* S из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на выходах, назовём максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах схемы S и обозначим её через $N_\varepsilon(f) = \inf N(S)$, где инфимум

берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим булеву функцию f.

Схема A из ненадёжных элементов, реализующая функцию f, называется *асимптотически оптимальной по надёжности*, если $N(A) \sim N_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{N_\varepsilon(f)}{N(A)} = 1$.

Теорема 1 [1]. *В произвольном полном конечном базисе B любую булеву функцию f можно реализовать схемой S с ненадёжностью*

$$N(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2 \quad \text{\textit{при} } \varepsilon \in (0,\ 1/960].$$

Константа 5 в оценке ненадёжности из теоремы 1 в некоторых базисах, например, в $B = \{x_1\&x_2,\ \overline{x}_1\}$, не может быть понижена [3].

1. О надёжности неветвящихся программ в базисах, содержащих функцию $x_1\&x_2$

Пусть полный конечный базис B содержит $x_1\&x_2$. Для неветвящихся программ с оператором условной остановки справедлива

Теорема 2. *В полном конечном базисе B, содержащем $x_1\&x_2$, при любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать такой программой Pr_f^*, что $N(\mathrm{Pr}_f^*) \leqslant \varepsilon + 54\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.*

Доказательство. Пусть полный конечный базис B содержит функцию $x_1\&x_2$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция, $n \in \mathbb{N}$. По теореме 1 её можно реализовать схемой S, которая при $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$ функционирует с ненадёжностью $N(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$. Используя четыре экземпляра схемы S, построим для f неветвящуюся программу Pr_f^* с абсолютно надёжными операторами условной остановки:

$$
\mathrm{Pr}_f^*:\quad
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} y_1 = f[S]\\ y_2 = f[S]\\ z = y_1\&y_2\\ \mathrm{Stop}(z)\end{array}\right\}\mathrm{Pr}_f^{*I}\\
y_3 = f[S]\\ y_4 = f[S]\\ z = y_3\\ \mathrm{Stop}(y_4)
\end{array}\right\}\mathrm{Pr}_f^{*II}\\
z = y_4
\end{array}\right\}\mathrm{Pr}_f^{*III}
$$

Используя (2), найдём функцию, которую вычисляет программа Pr_f^*:

$$\mathrm{Pr}_f^* = y_1y_2 \cdot y_1y_2 \vee \overline{y_1}\overline{y}_2 \cdot (y_3y_4 \vee \overline{y}_4y_4) = y_1y_2 \vee \overline{y_1}\overline{y}_2 \cdot y_3y_4$$
$$= y_1y_2 \vee y_3y_4 = f \cdot f \vee f \cdot f = f.$$

Следовательно, программа Pr_f^* реализует функцию f.

Программа Pr_f^* имеет один выход. Выделим в ней подпрограммы Pr_f^{*I}, Pr_f^{*II} и Pr_f^{*III}. Если срабатывает первый оператор остановки $\mathrm{Stop}(z)$, то выполнение программы прекращается и на выходе программы $z = y_1\&y_2$, если срабатывает второй $\mathrm{Stop}(y_4)$, то $z = y_3$. При этом результат работы программы совпадает с результатом работ подпрограмм Pr_f^{*I} или Pr_f^{*II} соответственно. Если ни один из стоп-операторов не срабатывает, то выполнение программы продолжается и на выход идёт $z = y_4$. Результат работы программы совпадает с результатом работы подпрограммы Pr_f^{*III}.

Вычислим и оценим вероятности ошибок на выходе программы Pr_f^*. Пусть входной набор $\widetilde{a}$ такой, что $f(\widetilde{a}) = 0$. Обозначим через $P_1(S,\ \widetilde{a})$ вероятность ошибки схемы S на наборе $\widetilde{a}$. Тогда

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^*,\ \widetilde{a}) = (1 - P_1(S,\ \widetilde{a}))^2 \cdot \big\{\varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot P_1^2(S,\ \widetilde{a})\big\}$$
$$+ 2P_1(S,\ \widetilde{a})(1 - P_1(S,\ \widetilde{a})) \cdot \big\{\varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot P_1^2(S,\ \widetilde{a})\big\}$$
$$+ P_1^2(S,\ \widetilde{a}) \cdot \big\{(1-\varepsilon) + \varepsilon \cdot P_1^2(S,\ \widetilde{a})\big\} \leqslant \varepsilon + 2N^2(S).$$

Поскольку $N(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$, получаем неравенство

$$P_1(\mathrm{Pr}_f^*,\ \widetilde{a}) \leqslant \varepsilon + 54\varepsilon^2. \tag{3}$$

Пусть набор $\widetilde{a}$ такой, что $f(\widetilde{a}) = 1$. Обозначим через $P_0(S,\ \widetilde{a})$ вероятность ошибки схемы S на наборе $\widetilde{a}$. Тогда

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^*,\ \widetilde{a}) = (1 - P_0(S,\ \widetilde{a}))^2 \cdot \varepsilon \cdot \big\{2P_0(S,\ \widetilde{a})(1 - P_0(S,\ \widetilde{a})) + P_0^2(S,\ \widetilde{a})\big\}$$
$$+ 2P_0(S,\ \widetilde{a})(1 - P_0(S,\ \widetilde{a})) \cdot (1-\varepsilon) \cdot \big\{2P_0(S,\ \widetilde{a})(1 - P_0(S,\ \widetilde{a})) + P_0^2(S,\ \widetilde{a})\big\}$$
$$+ P_0^2(S,\ \widetilde{a}) \cdot (1-\varepsilon) \cdot \big\{2P_0(S,\ \widetilde{a})(1 - P_0(S,\ \widetilde{a})) + P_0^2(S,\ \widetilde{a})\big\}$$
$$\leqslant 2N(S)\varepsilon + 4N^2(S).$$

Поскольку $N(S) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ и $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$, получаем

$$P_0(\mathrm{Pr}_f^*,\ \widetilde{a}) \leqslant 118\varepsilon^2.$$

Отсюда и из (3) следует, что $N(\mathrm{Pr}_f^*) \leqslant \varepsilon + 54\varepsilon^2$. Теорема 2 доказана.

2. О надёжности неветвящихся программ в базисах, содержащих функцию $\overline{x}_1 \& x_2$

Пусть полный конечный базис B содержит $\overline{x}_1 \& x_2$. Для неветвящихся программ с оператором условной остановки справедлива

Теорема 3. *В полном конечном базисе B, содержащем $\overline{x}_1 \& x_2$, при любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать такой программой Pr_f^{**}, что $N(\mathrm{Pr}_f^{**}) \leqslant \varepsilon + 54\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 с использованием программы Pr_f^{**} (рис. 1).

Pr_f^{**} :	Pr_f^{***} :
$y_1 = \overline{f}[S']$	$y_1 = \overline{f}[S']$
$y_2 = f[S]$	$y_2 = f[S']$
$z = \overline{y}_1 \& y_2$	$z = \overline{y}_1 \& \overline{y}_2$
$\mathrm{Stop}(z)$	$\mathrm{Stop}(z)$
$y_3 = \overline{f}[S']$	$y_3 = \overline{f}[S']$
$\mathrm{Stop}(y_3)$	$\mathrm{Stop}(y_3)$
$y_4 = f[S]$	$y_4 = \overline{f}[S']$
$z = y_4$	$z = \overline{y}_4 \& \overline{y}_4$

Рис. 1

Замечание 1. Теорема 3 справедлива для полных конечных базисов, содержащих $x_1 \& \overline{x}_2$, поскольку $x_1 \& \overline{x}_2$ получается из функции $\overline{x}_1 \& x_2$ переименованием переменных x_1 на x_2 и x_2 на x_1.

3. О надёжности неветвящихся программ в базисах, содержащих функцию $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2$

Пусть полный конечный базис B содержит $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2$. Для неветвящихся программ с оператором условной остановки справедлива

Теорема 4. *В полном конечном базисе B, содержащем $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2$, при любом $n \in \mathbb{N}$ любую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать такой программой Pr_f^{***}, что $N(\mathrm{Pr}_f^{***}) \leqslant \varepsilon + 59\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 с использованием программы Pr_f^{***} (рис. 1).

Заключение

Из теорем 2, 3 и 4 с учётом замечания 1 следует

Теорема 5. *В полном конечном базисе B, содержащем функцию вида $x_1^{a_1} \& x_2^{a_2}$ $(a_1,\ a_2 \in \{0,\ 1\})$, любую булеву функцию f можно реализовать такой программой Pr_f, что $N(\mathrm{Pr}_f) \leqslant \varepsilon + 59\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.*

Замечание 2. Утверждение теоремы 5 верно, если полный конечный базис содержит некоторую функцию вида $x_1^{a_1} \& x_2^{a_2} \& \ldots \& x_k^{a_k}$ $(k \geqslant 3$, $a_i \in \{0,\ 1\},\ i \in \{1,\ \ldots, k\})$, поскольку, отождествляя некоторые переменные, из неё можно получить функцию вида $x_1^{b_1} \& x_2^{b_2},\ b_1, b_2 \in \{0,\ 1\}$.

Из теоремы 5 следует, что в полном конечном базисе, содержащем хотя бы одну из функций $x_1 \cdot x_2,\ \overline{x}_1 \cdot x_2$ или $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, любую булеву функцию f можно реализовать неветвящейся программой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 59\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.

Сравним полученный результат с известными результатами [2] для схем из функциональных элементов.

Булевы функции f_1 и f_2 назовём *конгруэнтными*, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления).

Пусть B_3 — множество всех булевых функций, зависящих от трёх переменных $x_1,\ x_2,\ x_3$, а $X \subseteq B_3$. Обозначим через $\mathrm{Congr}(X)$ множество всех функций, зависящих от переменных $x_1,\ x_2,\ x_3$, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества X.

Пусть $B \subseteq B_3$ — полный базис. Обозначим $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, где

$$G_1 = \left\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \mid \sigma_i \in \{0,\ 1\},\ i \in \{1,\ 2,\ 3\}\right\};$$

$$G_2 = \mathrm{Congr}\left\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3} \mid \sigma_i \in \{0,\ 1\},\ i \in \{1,\ 2,\ 3\}\right\};$$

$$G_3 = \mathrm{Congr}\left\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \mid \sigma_i \in \{0,\ 1\},\ i \in \{1,\ 2,\ 3\}\right\}.$$

Известно [1], что если полный конечный базис содержит функцию $\varphi \in G$, то любую функцию в этом базисе можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой из функциональных элементов, ненадёжность которой асимптотически равна ε при $\varepsilon \to 0$. Если $B \subseteq B_3 \backslash G$, то для почти всех функций ненадёжность асимптотически оптимальных по надёжности схем асимптотически не меньше 2ε при $\varepsilon \to 0$ [1].

Например, для почти всех булевых функций можно построить асимптотически оптимальные по надёжности схемы с ненадёжностью, при $\varepsilon \to 0$ асимптотически равной 2ε в базисе $B = \{x_1 \& x_2,\ \overline{x}_1(x_2 \vee x_3),\ 1\}$ [2], 3ε в базисе $B = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \overline{x}_1\}$, 4ε в базисе $B = \{\overline{x}_1 \& x_2,\ \overline{x}_1\}$ [2] и 5ε в базисе $B = \{x_1 \& x_2,\ \overline{x}_1\}$ [3].

Итак, асимптотически оптимальные по надёжности схемы из функциональных элементов в различных полных базисах $B \subseteq B_3 \backslash G$, содержащих функции вида $x_1^{a_1} \& x_2^{a_2}$ $(a_1, a_2 \in \{0,\ 1\})$, имеют ненадёжность, асимптотически равную $k_B \cdot \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, где константа k_B зависит от базиса B и $k_B \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. При этом в любом полном конечном базисе, содержащем некоторую функцию вида $x_1^{a_1} \& x_2^{a_2}$ $(a_1, a_2 \in \{0,\ 1\})$, в том числе и в базисе $B' \subseteq B_3$, произвольную булеву функцию можно реализовать неветвящейся программой, функционирующей с ненадёжностью не больше $\varepsilon + 59\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,\ 1/960]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А., Васин А. В.** О надёжности схем в базисах, содержащих функции не более чем трёх переменных // Уч. записки Казанского гос. ун-та. Сер. «Физ.-мат. науки». — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2009. — Т. 151, вып. 2. — С. 25–35.
2. **Васин А. В.** Асимптотически оптимальные по надёжности схемы в полных базисах из трёхвходовых элементов // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Пенза: Пензенский гос. ун-т, 2010. — 100 с.
3. **Васин А. В.** Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2,\ \overline{x}_1\}$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 12–22.
4. **Чашкин А. В.** О среднем времени вычисления значений булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 60–78.

Грабовская Светлана Михайловна,
e-mail: swetazin@mail.ru

Статья поступила
16 ноября 2010 г.

Переработанный вариант —
14 октября 2011 г.