ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2012. Том 19, № 1. С. 3–16

УДК 519.8

О РЕКОНСТРУКТИВНЫХ МНОЖЕСТВАХ ВЕРШИН В БУЛЕВОМ КУБЕ *)

А. Ю. Васильева

Аннотация. В терминах преобразования Фурье вводится понятие реконструктивного множества в булевом кубе. Получена характеризация реконструктивных множеств, являющихся линейными подпространствами. Установлены необходимые и достаточные условия реконструктивности сферы. Приведено достаточное условие реконструктивности двух концентрических сфер.

Ключевые слова: преобразование Фурье, реконструктивное множество, линейное подпространство, многочлены Кравчука, схема отношений Джонсона.

Введение

Вопрос, исследуемый в статье, можно сформулировать так: какова минимальная информация (определённого рода) об объекте из заданного класса, однозначно определяющая этот объект? Этот вопрос рассматривается для класса всех действительнозначных функций, определённых на множестве всех двоичных наборов длины n. Произвольная такая функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье, которые, в свою очередь, однозначно определяются по функции. Таким образом, функция полностью задаётся набором из 2^n значений либо набором из 2^n коэффициентов Фурье. Возникает вопрос об однозначности задания функции некоторым набором из k значений и m коэффициентов Фурье. Ясно, что в общем случае $k + m$ должно быть не меньше 2^n. Здесь исследуется экстремальный случай, когда $k + m = 2^n$ и в каждой вершине булева куба задано значение функции или коэффициент Фурье.

Исследуемый вопрос возник в результате изучения совершенных кодов и центрированных функций [1–3, 7]. Произвольная центрированная

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00424) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0362).

функция (т. е. функция, сумма значений которой в любом шаре радиуса 1 не зависит от выбора шара) может быть однозначно восстановлена по её значениям на наборах веса $(n+1)/2$ [2]. Именно на этих наборах (и только на них) коэффициенты Фурье центрированной функции могут принимать ненулевые значения. В нашей терминологии это означает, что множество наборов веса $(n+1)/2$ является реконструктивным. Совершенные коды являются важным частным случаем центрированных функций, когда функция булева, а сумма её значений в шаре равна 1.

В статье пополнен список реконструктивных множеств и изучены их свойства.

1. Предварительные сведения

Булев куб $\mathbb{E}^n$ (т. е. n-мерное векторное пространство над $\{0,1\}$) снабдим метрикой Хэмминга, тем самым расстояние $\rho(x,y)$ между вершинами x и y будет равно числу позиций, в которых эти вершины различаются. *Вес Хэмминга* $wt(x)$ вершины x равен числу ненулевых позиций x. Через W_h обозначим множество всех вершин веса h и назовём его h-м *уровнем* куба. Скалярное произведение двоичных наборов определяется обычным способом: $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Известно, что произвольная функция $f:\mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ может быть однозначно представлена своими коэффициентами Фурье

$$\widehat{f}(a) = \sum_{x\in\mathbb{E}^n} (-1)^{\langle a,x\rangle} f(x), \quad a \in \mathbb{E}^n. \tag{1}$$

В терминах этих коэффициентов

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{a\in\mathbb{E}^n} (-1)^{\langle a,x\rangle} \widehat{f}(a), \quad x \in \mathbb{E}^n. \tag{2}$$

Зафиксируем некоторый порядок вершин булева куба. Пусть F и $\widehat{F}$ — наборы длины 2^n, состоящие из всех значений функций f и $\widehat{f}$ соответственно, а A — матрица преобразования Фурье, т. е. квадратная матрица порядка 2^n с элементами $a_{x,y} = (-1)^{\langle x,y\rangle}$, $x,y \in \mathbb{E}^n$. Заметим, что A является матрицей Адамара и потому ортогональна. Равенства (1) и (2) могут быть представлены в векторной форме:

$$AF = \widehat{F}, \tag{3}$$

$$2^{-n} A\widehat{F} = F. \tag{4}$$

Обозначим через A^{PQ} подматрицу из A, строки которой соответствуют вершинам множества $P \subseteq \mathbb{E}^n$, а столбцы — вершинам из $Q \subseteq \mathbb{E}^n$, через F^P — вектор всех значений функции f в вершинах множества P, а через $\widehat{F}^P$ — вектор всех коэффициентов Фурье функции f в вершинах P.

Для произвольного множества L из булева куба через $\overline{L}$ обозначим дополнение к L: $\overline{L} = \mathbb{E}^n \backslash L$, а через $L^\perp$ — ортогональное к нему множество: $L^\perp = \{y \in \mathbb{E}^n \ : \ \langle x, y\rangle = 0 \ \forall \ x \in L\}$. Если L является линейным подпространством, то $(L^\perp)^\perp = L$.

В дальнейшем нам понадобятся хорошо известные многочлены Кравчука $K_k(x; N)$ и Эберлейна $E_k(x; h, n)$:

$$K_k(x;N) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{x}{j}\binom{N-x}{k-j} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j 2^{k-j}\binom{N-x}{k-j}\binom{N-k+j}{j}, \quad (5)$$

$$E_k(x;h,n) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{x}{j}\binom{h-x}{k-j}\binom{n-h-x}{k-j} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{h-j}{k-j}\binom{h-x}{j}\binom{n-h-x+j}{j}. \quad (6)$$

Схема отношений Джонсона $J(h, n)$, $h \leqslant n/2$, определяется как множество W_h с отношениями $R_0, R_1, \ldots, R_h$ на нём, где

$$(x, y) \in R_i \Longleftrightarrow \rho(x, y) = 2i.$$

Отношения $R_0, R_1, \ldots, R_h$ можно описывать квадратными матрицами инцидентности $D_0^h, D_1^h, \ldots, D_h^h$ порядка $\binom{n}{h}$, строки и столбцы которых соответствуют вершинам множества W_h, с элементами

$$\left(D_i^h\right)_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(x,y) = 2i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Матрицы инцидентности образуют базис алгебры Боуза — Меснера (БМ-алгебры) схемы $J(h, n)$. Все матрицы из БМ-алгебры имеют общие собственные подпространства. Можно также выбрать другой базис

БМ-алгебры — из примитивных идемпотентов $J_0^h, J_1^h, \dots, J_h^h$. Два базиса связаны соотношениями

$$D_k^h = \sum_{i=0}^{h} E_k(i;h,n) J_i^h, \tag{7}$$

$$J_i^h = \frac{(n-2i+1)\binom{n}{i}}{(n-i+1)\binom{n}{h}} \sum_{j=0}^{h} \frac{E_j(i;h,n)}{\binom{h}{j}\binom{n-h}{j}} D_j^h. \tag{8}$$

Из (7) легко увидеть, что многочлены $E_k(i;h,n)$ дают собственные значения матриц D_k^h. Нетрудно доказать, что если некоторая матрица X из БМ-алгебры представима как линейная комбинация всех примитивных идемпотентов с ненулевыми коэффициентами, то обратная к ней X^{-1} представима в виде аналогичной линейной комбинации с обратными коэффициентами. Введение в схемы отношений см., например, в [4–6].

2. Реконструктивные множества

Пусть L — произвольное множество вершин из $\mathbb{E}^n$. Множество L назовём *реконструктивным*, если для любой функции $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ из условий

$$f(x) = 0, \quad x \in L, \tag{9}$$

$$\widehat{f}(x) = 0, \quad x \in \overline{L}, \tag{10}$$

следует, что функция f тождественно равна нулю. Очевидно, что тогда и $\widehat{f}(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{E}^n$. Другими словами, если для любой функции $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ её значения $f(x),\ x \in L,$ и значения её коэффициентов Фурье $\widehat{f}(x)$, $x \in \overline{L}$, однозначно определяют всю функцию, то множество L реконструктивно. Следующая лемма следует из определения.

Лемма 1. *Множество $\overline{L}$ реконструктивно в том и только том случае, если множество $L \subseteq \mathbb{E}^n$ реконструктивно.*

Выразим свойство множества L быть реконструктивным в терминах подматриц матрицы преобразования Фурье. Перепишем (3) и (4):

$$\begin{pmatrix} A^{LL} & A^{L\overline{L}} \\ A^{\overline{L}L} & A^{\overline{L}\overline{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{L} \\ F^{\overline{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{F}^{L} \\ \widehat{F}^{\overline{L}} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$2^{-n} \begin{pmatrix} A^{LL} & A^{L\overline{L}} \\ A^{\overline{L}L} & A^{\overline{L}\overline{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{F}^{L} \\ \widehat{F}^{\overline{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{L} \\ F^{\overline{L}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Теорема 1. *Произвольное множество $L \subseteq \mathbb{E}^n$ реконструктивно тогда и только тогда, когда матрица A^{LL} обратима.*

Доказательство. Пусть выполнены условия (9), (10). Из (12) получим

$$2^{-n} A^{LL} \widehat{F}^L = 0, \tag{13}$$

$$2^{-n} A^{\overline{L}L} \widehat{F}^L = F^{\overline{L}}. \tag{14}$$

Реконструктивность множества L равносильна тому, что $F = 0$ и $\widehat{F} = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение (13) имело единственное решение $\widehat{F}^L = 0$, т. е. матрица A^{LL} невырожденна. Теорема 1 доказана.

Предположим, что нам известны значения некоторой функции во всех вершинах данного реконструктивного множества и её коэффициенты Фурье во всех вершинах дополнения к нему. Вычислим остальные значения этой функции. Из формулы (12) и теоремы 1 вытекает

Лемма 2. *Пусть множество $L \subseteq \mathbb{E}^n$ реконструктивно и $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Тогда*

$$F^{\overline{L}} = A^{\overline{L}L}(A^{LL})^{-1}F^L + 2^{-n}\big(A^{\overline{L}\overline{L}} - A^{\overline{L}L}(A^{LL})^{-1}A^{L\overline{L}}\big)\widehat{F}^{\overline{L}}.$$

Заметим, что аналогично можно выразить $\widehat{F}^L$ через векторы F^L и $\widehat{F}^{\overline{L}}$.

Последняя лемма этого раздела устанавливает инвариантность реконструктивности относительно сдвигов множеств.

Лемма 3. *Пусть $a \in \mathbb{E}^n$ — произвольная вершина и $L \subseteq \mathbb{E}^n$ — произвольное множество. Тогда множество $L_a = L + a$ реконструктивно в том и только том случае, когда L реконструктивно.*

Доказательство. Достаточно показать, что матрицы A^{LL} и $A^{L_aL_a}$ невырожденны одновременно. Действительно, на соответствующих местах в матрицах A^{LL} и $A^{L_aL_a}$ стоят элементы $(-1)^{\langle x^i, x^j\rangle}$ и

$$(-1)^{\langle x^i+a, x^j+a\rangle} = (-1)^{\langle x^i, x^j\rangle}(-1)^{\langle x^i, a\rangle}(-1)^{\langle a, x^j\rangle}(-1)^{\langle a, a\rangle}$$

соответственно, $x^i, x^j \in L$. Таким образом, матрица $A^{L_aL_a}$ может быть получена из A^{LL} с помощью элементарных преобразований: для каждой вершины x из L соответствующие ей строка и столбец умножаются на константу $(-1)^{\langle x, a\rangle}$, а затем вся матрица умножается на $(-1)^{\langle a, a\rangle}$. Лемма 3 доказана.

Исследуем на реконструктивность некоторые классы множеств: линейные подпространства, сферы и пары концентрических сфер.

3. Линейное подпространство

В случае, когда рассматриваемое подмножество линейно, его реконструктивность тесно связана с ортогональным множеством.

Теорема 2. *Пусть L — линейное подпространство $\mathbb{E}^n$. Тогда L реконструктивно в том и только том случае, когда $L \cap L^\perp = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть L реконструктивно и существует вершина $a \in L \cap L^\perp$, $a \neq 0$. Строка матрицы A^{LL}, соответствующая a, состоит целиком из единиц, а потому совпадает со строкой, соответствующей вершине $0 \in L$. Матрица A^{LL} вырождена, что противоречит теореме 1.

Обратно, пусть $L \cap L^\perp = \{0\}$. Так как L линейно, каждая строка матрицы A^{LL} либо полностью состоит из единиц, либо единиц и минус единиц в ней поровну. Первое возможно лишь для строки, соответствующей нулевой вершине. Рассмотрим две различные вершины $a, b \in L$, имеем $0 \neq a + b \in L$. Скалярное произведение соответствующих строк матрицы A^{LL} равно $\sum\limits_{x \in L} (-1)^{\langle a,x\rangle}(-1)^{\langle b,x\rangle} = \sum\limits_{x\in L}(-1)^{\langle a+b,x\rangle} = 0$. Таким образом, любые две строки A^{LL} ортогональны, а следовательно, эта матрица невырожденна, и по теореме 1 множество L реконструктивно. Теорема 2 доказана.

Поскольку при условии реконструктивности линейного подпространства L матрица A^{LL} квазиортогональна, найти обратную к ней очень просто: $(A^{LL})^{-1} = |L|^{-1}A^{LL}$. Теперь, воспользовавшись леммой 2, нетрудно получить формулу восстановления всех значений функции.

Лемма 4. *Пусть L — линейное подпространство в $\mathbb{E}^n$. Тогда*

$$F^{\overline{L}} = |L|^{-1}A^{\overline{L}L}A^{LL}F^L + 2^{-n}(A^{\overline{L}\overline{L}} - |L|^{-1}A^{\overline{L}L}A^{LL}A^{L\overline{L}})\widehat{F}^{\overline{L}}.$$

4. Одна сфера

Зададимся вопросом, реконструктивна ли сфера радиуса h? В силу леммы 3 без потери общности вместо произвольной сферы можно рассматривать сферу с центром в нулевой вершине, т. е. h-й уровень W_h гиперкуба. Таким образом, в рассматриваемом случае $L = W_h$ и порядок квадратной матрицы A^{LL} равен $\binom{n}{h}$. При этом естественно предположить, что сфера имеет радиус не более половины n.

В дальнейшем матрицу $A^{L_1L_2}$ будем обозначать через A^{kh}, если L_1 и L_2 являются соответственно k-м и h-м уровнями n-куба; вместо F^{W_h} будем писать F^h. Через $\lambda_i(h,n)$, $i = 0,\ldots,h$, обозначим собственные значения матрицы A^{hh}.

Лемма 5. *Собственные числа матрицы* A^{hh} *задаются формулой*

$$\lambda_i(h,n) = (-2^i)K_{h-i}(h-i, n-2i), \quad i = 0,1,\dots,h. \tag{15}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$A^{hh} = (-1)^h \sum_{k=0}^{h} (-1)^k D_k^h. \tag{16}$$

Поскольку все матрицы из БМ-алгебры имеют общие собственные подпространства, i-е собственное значение $\lambda_i(h,n)$ матрицы A^{hh} выражается через собственные значения матриц инцидентности D_k^h (собственные значения которых дают многочлены Эберлейна). Из (16) и (7) имеем

$$\lambda_i(h,n) = (-1)^h \sum_{k=0}^{h} (-1)^k E_k(i;h,n), \quad i = 0,1,\dots,h.$$

Вычислим эти суммы. Используя подходящую формулу (6) для многочленов Эберлейна и меняя порядок суммирования, имеем

$$\lambda_i(h,n) = (-1)^h \sum_{j=0}^{h} (-1)^j \binom{h-i}{j}\binom{n-h-i+j}{j} \sum_{k=j}^{h} \binom{h-j}{k-j}$$
$$= (-1)^h \sum_{j=0}^{h} (-1)^j 2^{h-j} \binom{h-i}{j}\binom{n-h-i+j}{j}.$$

Все слагаемые этой суммы, начиная с $(h-i+1)$-го, равны нулю. Поэтому

$$\lambda_i(h,n) = (-2)^i(-1)^{h-i} \sum_{j=0}^{h-i} (-1)^j 2^{h-i-j} \binom{h-i}{j}\binom{n-h-i+j}{j}$$
$$= (-2)^i \lambda_0(h-i, n-2i). \tag{17}$$

Значение $\lambda_0(h,n)$ совпадает со значением многочлена Кравчука (5):

$$\lambda_0(h,n) = (-1)^h \sum_{j=0}^{h} (-1)^j 2^{h-j} \binom{h}{j}\binom{n-h+j}{j} = K_h(h;n). \tag{18}$$

В силу (17) и (18) лемма 5 доказана.

Комбинацией теоремы 1 и леммы 5 получается следующая

Теорема 3 [8]. *Сфера радиуса $h \leqslant n/2$ в n-кубе реконструктивна тогда и только тогда, когда*

$$K_i(i; n-2h+2i) \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, h. \tag{19}$$

В качестве примера нереконструктивности сферы отметим случай $h = n/2$, когда половина из требуемых теоремой значений многочленов Кравчука $K_i(i; 2i)$, $i = 0, 1, \ldots, n/2$, оказываются нулевыми (а именно, $K_i(i; 2i) = 0$, когда i нечётно), и потому сфера радиуса $n/2$ не обладает свойством реконструктивности.

Теперь выведем формулу восстановления при условии реконструктивности. Эта формула будет выражать все неизвестные значения функции f, все ненулевые коэффициенты Фурье которой находятся на h-м уровне куба, через её значения на этом уровне.

Определим матрицы S_l^{kh} размера $\binom{n}{k} \times \binom{n}{h}$ с элементами

$$\left(S_l^{kh}\right)_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle x, y \rangle = l, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad x \in W_k,\ y \in W_h,$$

$k, h = 0, \ldots, n,\ l = 0, \ldots, h.$

Лемма 6. *Пусть $h \leqslant n/2$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда*

$$A^{kh} D_j^h = \sum_{l=0}^{n} \tau_j^{kh}(l) S_l^{kh},$$

где $\tau_j^{kh}(l) = (-1)^l K_j(l, h) K_j(k-l, n-h)$.

Доказательство. Нетрудно понять, что

$$\left(A^{kh} D_j^h\right)_{x,a} = \sum_{b \in W_h,\ \rho(a,b)=2j} (-1)^{\langle b, x \rangle}.$$

Любую вершину $b \in W_h$ на расстоянии $2j$ от данной вершины $a \in W_h$ можно получить, заменив j нулей среди координат b единицами и столько же единиц нулями. Поэтому последняя сумма равна

$$\sum_{u \in W_j,\ u \preceq a} \ \sum_{u' \in W_j,\ u' \preceq 1+a} (-1)^{\langle a+u+u', x \rangle} = (-1)^{\langle a, x \rangle} r_j(a, x) r_j(1+a, x), \tag{20}$$

где $r_j(y, x) = \sum\limits_{v \in W_j:\ v \preceq y} (-1)^{\langle v, x \rangle}$.

Вычислим величину $r_j(y,x)$ для произвольных вершин $x, y \in \mathbb{E}^n$. Пусть z — вершина максимального веса такая, что $z \preceq x$ и $z \preceq y$. Тогда

$$r_j(y,x) = \sum_{v \in W_j,\ v \preceq y} (-1)^{\langle v,z \rangle}.$$

Из свойств многочленов Кравчука (см., например, [5]) следует, что эта сумма равна $K_j(\langle y,x\rangle; wt(y))$. Подставив это выражение в (20), получим

$$\left(A^{kh} D_j^h\right)_{x,a} = (-1)^{\langle a,x\rangle} K_j\left(\langle a,x\rangle, h\right) K_j\left(k - \langle a,x\rangle, n-h\right).$$

Из последнего соотношения следует наше утверждение. Лемма 6 доказана.

Формула восстановления имеет вид линейной комбинации сумм значений функции f, где сумма берётся по всем вершинам слоя W_h на фиксированном расстоянии от x (т. е. с фиксированным скалярным произведением на x). Положим

$$\alpha_l^{kh} = \frac{(-1)^l}{\binom{n}{h}} \sum_{i=0}^{h} \sum_{j=0}^{h} \frac{(n-2i+1)\ \binom{n}{i}\ K_j(l;h)\ K_j(k-l;n-h)\ E_j(i;h,n)}{(n-i+1)\ \binom{h}{j}\ \binom{n-h}{j}\ \lambda_i(h,n)}.$$

Теорема 4. *Пусть n и h — целые числа, удовлетворяющие условию (19), и функция $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\widehat{f}(x) = 0$ для всех $x \notin W_h$. Тогда функция f однозначно определяется своими значениями в вершинах h-го слоя, причём для любого k, $0 \leqslant k \leqslant n$,*

$$F^k = \sum_{l=0}^{h} \alpha_l^{kh} S_l^{kh} F^h. \tag{21}$$

Доказательство. В силу леммы 2 имеем $F^k = A^{kh}(A^{hh})^{-1} F^h$, $k = 0, \ldots, n$. Зная собственные значения (15) матрицы A^{hh}, получим обратную к ней через примитивные идемпотенты БМ-алгебры схемы Джонсона $J(h,n)$:

$$(A^{hh})^{-1} = \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{\lambda_i(h,n)} J_i^h.$$

Выражая в этой формуле примитивные идемпотенты через матрицы инцидентности (см. (8)), имеем

$$F^k = \frac{1}{\binom{n}{h}} \sum_{j=0}^{h} \sum_{i=0}^{h} \frac{(n-2i+1)\binom{n}{i} E_j(i;h,n)}{(n-i+1)\binom{h}{j}\binom{n-h}{j}\lambda_i(h,n)} A^{kh} D_j^h F^h.$$

Применяя лемму 6, приходим к выражению (21). Теорема 4 доказана.

5. Две концентрические сферы

Зададимся вопросом, является ли реконструктивным множество, состоящее из двух сфер с общим центром. Учитывая лемму 3, опять без ограничения общности можно считать, что центр — это нулевая вершина куба, тогда сферы совпадают с уровнями куба и полагаем $L = W_k \cup W_h$, причём считаем, что $k < h \leqslant n/2$ (случай $k < n/2 < h$ может быть рассмотрен аналогично). В этом случае матрица A^{LL} квадратная порядка $\binom{n}{k} + \binom{n}{h}$. Как и в случае одной сферы, нам придётся рассматривать нули некоторых многочленов. В [9] показано, что достаточное условие реконструктивности множества L может быть выражено опять в терминах полиномов Кравчука и Эберлейна.

Для формулировки теоремы из [9] потребуются следующие величины:

$$\beta_t^{kh} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-2)^i}{\binom{h-i}{k-i}} \binom{k-t}{i-t} \binom{n-i-t}{k-i},$$

$$\nu_m^{kh} = \frac{\binom{h-m}{k-m}^2}{\binom{n}{k}} \sum_{l=k-m}^{k} \frac{(-1)^{m-k+l}\binom{m}{k-l}}{\binom{k}{l}\binom{n-k}{l}} \sum_{i=0}^{k} \frac{\frac{n-2i+1}{n-i+1}\binom{n}{i} E_l(i;k,n)}{\lambda_i(k,n)} \left(\beta_i^{kh}\right)^2,$$

$$\mu_i^{kh} = \sum_{m=i}^{k} \nu_m^{kh} \binom{h-i}{m-i} \binom{n-m-i}{h-m}.$$

Теорема 5. *Пусть $k < h \leqslant n/2$. Объединение двух концентрических сфер радиусов k и h реконструктивно, если $\lambda_i(k,n) \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и $\lambda_j(h,n) \neq \mu_j^{kh}$, $j = 0, 1, \ldots, h$.*

Основой доказательства теоремы 5 служит

Лемма 7. *Пусть $k < h \leqslant n/2$. Если матрицы $A^{hh} - A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh}$ и A^{kk} невырожденны, то множество $W_k \cup W_h$ реконструктивно.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что реконструктивность $W_k \cup W_h$ равносильна невырожденности матрицы $\begin{pmatrix} A^{kk} & A^{kh} \\ A^{hk} & A^{hh} \end{pmatrix}$. Лемма 7 доказана.

Таким образом, вопрос сводится к вычислению собственных значений матрицы $A^{hh} - A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh}$ (собственные значения A^{kk} нам уже известны из леммы 5). Их можно вычислить, используя соотношения между БМ-алгебрами схем Джонсона $J(h,n)$ и $J(k,n)$.

Определим две серии матриц, тесно связанных с БМ-алгеброй схемы Джонсона. Первая — матрицы сравнимости L^{ij}, $i \leqslant j$, — матрицы раз-

мера $\binom{n}{i} \times \binom{n}{j}$, строки которых занумерованы вершинами веса i, а столбцы — вершинами веса j, с элементами

$$(L^{ij})_{z,x} = \begin{cases} 1, & \text{если } z \preceq x, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad z \in W_i,\ x \in W_j.$$

Легко понять, что для произвольных $i \leqslant k \leqslant h$ выполнено

$$L^{ik} L^{kh} = \binom{h-i}{k-i} L^{ih}. \tag{22}$$

Определим вторую серию квадратных матриц, известных в качестве ещё одного базиса БМ-алгебры схемы Джонсона [5]. Пусть $i \leqslant j \leqslant n/2$. Тогда

$$C_i^j = (L^{ij})^T L^{ij} \tag{23}$$

— квадратная матрица порядка $\binom{n}{j}$. Ясно, что для любых $x, y \in W_j$ элемент $\left(C_i^j\right)_{x,y}$ равен числу вершин $z \in W_i$ таких, что $z \preceq x$ и $z \preceq y$, т. е. числу $\binom{\langle x,y\rangle}{i}$. Значит,

$$C_i^k = \sum_{l=0}^{k-i} \binom{k-l}{i} D_l^k.$$

Эти соотношения могут быть обращены:

$$D_l^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m-k+l} \binom{m}{k-l} C_m^k, \tag{24}$$

и потому матрицы C_i^j, $i = 0, 1, \ldots, j$, образуют базис БМ-алгебры схемы Джонсона порядка j. Следовательно, этот базис и базис из примитивных идемпотентов выражаются друг через друга линейно [5].

Лемма 8. *Для произвольных $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$ имеем*

$$C_j^k = \sum_{i=0}^{j} \binom{k-i}{j-i} \binom{n-j-i}{k-j} J_i^k.$$

Выражая с помощью (8) примитивные идемпотенты через матрицы смежности, а затем применяя (24), получим обратные соотношения.

Лемма 9. *Для произвольных $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$ имеет место*

$$J_i^k = \frac{(n-2i+1)\binom{n}{i}}{(n-i+1)\binom{n}{k}} \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{l-k+j} \frac{E_j(i;k,n)\binom{l}{k-j}}{\binom{k}{j}\binom{n-k}{j}} \right) C_l^k.$$

Теперь можем выразить прямоугольную матрицу A^{kh} через примитивные идемпотенты БМ-алгебры схемы Джонсона $J(k, n)$.

Лемма 10. *Пусть $k \leqslant h$. Тогда* $A^{kh} = \left(\sum\limits_{t=0}^{k} \beta_t^{kh} J_t^k\right) L^{kh}$.

Доказательство. Сначала представим подматрицы матрицы преобразования Фурье через матрицы сравнимости. Проверим, что

$$A^{kh} = \sum_{i=0}^{k} (-2)^i (L^{ik})^T L^{ih}. \tag{25}$$

Пусть $x \in W_k$, $y \in W_h$ и их скалярное произведение равно l, и потому $(A^{kh})_{x,y} = (-1)^l$. Элемент $((L^{ik})^T L^{ih})_{x,y}$ равен числу вершин $z \in W_i$, удовлетворяющих условиям $z \preceq x$ и $z \preceq y$, т. е. величине $\binom{l}{i}$. Следовательно,

$$\left(\sum_{i=0}^{k} (-2)^i (L^{ik})^T L^{ih}\right)_{x,y} = \sum_{i=0}^{l} (-2)^i \binom{l}{i} = (-1)^l.$$

Теперь из (25), представляя с помощью (22) матрицу L^{ih} в виде произведения матриц и учитывая определение (23), получим

$$A^{kh} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-2)^i}{\binom{h-i}{k-i}} (L^{ik})^T L^{ik} L^{kh} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-2)^i}{\binom{h-i}{k-i}} C_i^k L^{kh}.$$

Осталось выразить C_i^k через примитивные идемпотенты (лемма 8):

$$A^{kh} = \sum_{t=0}^{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(-2)^i}{\binom{h-i}{k-i}} \binom{k-t}{i-t} \binom{n-i-t}{k-i} \right) J_t^k \; L^{kh}.$$

Лемма 10 доказана.

Мы подошли к основной лемме.

Лемма 11. *Матрица $A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh}$ лежит в БМ-алгебре схемы Джонсона порядка h, причём*

$$A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh} = \sum_{i=0}^{k} \mu_i^{kh} J_i^h. \tag{26}$$

Доказательство. Представим каждый из трёх сомножителей через примитивные идемпотенты, воспользовавшись леммой 10 для прямоугольных матриц и леммой 5 для квадратной матрицы:

$$A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh} = \left[\sum_{t=0}^{k} \beta_t^{kh} J_t^k L^{kh}\right]^T \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{J_i^k}{\lambda_i(k,n)}\right] \left[\sum_{s=0}^{k} \beta_s^{kh} J_s^k L^{kh}\right]$$
$$= \sum_{t=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} \frac{\beta_t^{kh}\beta_s^{kh}}{\lambda_i(k,n)} (L^{kh})^T J_t^k J_s^k J_i^k L^{kh}.$$

В силу свойств примитивных идемпотентов произведение трёх из них в последней формуле будет ненулевым только в случае совпадения всех трёх нижних индексов t, s и i, поэтому последняя сумма равна

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\left(\beta_i^{kh}\right)^2}{\lambda_i(k,n)} (L^{kh})^T J_i^k L^{kh}.$$

Выразим с помощью леммы 9 примитивные идемпотенты в терминах матриц C_i^k. Получим, что

$$A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh} = \sum_{m=0}^{k} \frac{\nu_m^{kh}}{\binom{h-m}{k-m}^2} (L^{kh})^T C_m^k L^{kh}. \tag{27}$$

Рассмотрим произведение трёх матриц, стоящее в этой сумме. Из определения (23) и формулы (22) имеем

$$(L^{kh})^T C_m^k L^{kh} = (L^{kh})^T (L^{mk})^T L^{mk} L^{kh} = \binom{h-m}{k-m}^2 C_m^h.$$

Тогда выражение (27) примет вид

$$A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh} = \sum_{m=0}^{k} \nu_m^{kh} C_m^h.$$

Наконец, с помощью леммы 8 получим (26). Лемма 11 доказана.

Теперь нам известны собственные числа (или, что то же самое, выражения в терминах примитивных идемпотентов) матриц A^{hh} и $A^{hh} - A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh}$. Как следствие лемм 5 и 11 и свойств примитивных идемпотентов получим следующее утверждение.

Лемма 12. *Собственные значения матрицы* $A^{hh} - A^{hk}(A^{kk})^{-1}A^{kh}$ *равны* $\lambda_i^h - \mu_i^{kh},\ i = 0, 1, \ldots, h.$

Соединяя лемму 7 с леммами 5 и 12, получим теорему 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В.** Об одном свойстве совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 1. — С. 4–6.
2. **Августинович С. В., Васильева А. Ю.** Вычисление центрированной функции по её значениям на средних слоях булева куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 3–16.
3. **Августинович С. В., Васильева А. Ю.** Теоремы восстановления для центрированных функций и совершенных кодов // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 3. — С. 1–6.
4. **Баннаи Э., Ито Т.** Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. — М.: Мир, 1987. — 374 с.
5. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. — М.: Мир, 1976. — 136 с.
6. **Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.** Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979. — 744 с.
7. **Heden O.** On the reconstruction of perfect codes // Discrete Math. — 2002. — Vol. 256. — P. 479–485.
8. **Vasil'eva A.** On reconstruction of generalized centered functions // Proc. 9th Int. Workshop "Algebraic and combinatorial coding theory" (Kranevo, Bulgaria, June 19–25, 2004). — Sophia: Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy of Sciences, 2004. — P. 385–389.
9. **Vasil'eva A. Yu.** On reconstruction of functions on the hypercube // Proc. Int. Workshop Coding Cryptography (Bergen, Norway, March 14–18, 2005). — Bergen: The Selmer Center, 2005. — P. 491–498.

Васильева Анастасия Юрьевна,
e-mail: vasilan@math.nsc.ru

Статья поступила
25 мая 2011 г.

Переработанный вариант —
9 сентября 2011 г.