ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2012. Том 19, № 1. С. 17–32

УДК 519.8

ПРИБЛИЖЁННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ КОММИВОЯЖЁРАХ НА МАКСИМУМ *)

Э. Х. Гимади, Е. В. Ивонина

Аннотация. Рассматривается задача отыскания в полном неориентированном графе двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов (маршрутов коммивояжёра) с максимальным суммарным весом. Для случая весов рёбер из отрезка $[1, q]$ представлен полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой точности $\frac{3q+2}{4q+1}$. В случае весов 1 и 2 и двух различных весовых функций, соответствующих двум маршрутам, предложен полиномиальный алгоритм с оценкой точности $\frac{11\rho-8}{18\rho-15}$, где ρ — оценка точности некоторого алгоритма решения аналогичной задачи на минимум.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, задача о двух коммивояжёрах, полиномиальный алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

В классической постановке задачи коммивояжёра (Traveling Salesman Problem, или, короче, TSP) входной информацией является рёберно взвешенный граф, а целью — отыскание экстремального по весу гамильтонова цикла. Задача коммивояжёра принадлежит классу NP-трудных задач [4]. Обзор работ по этой теме можно найти, например, в [10, 12]. Исследователи рассматривают различные постановки: задачу отыскания минимального или максимального по весу гамильтонова цикла, задачу на ориентированных и неориентированных графах. В нашей работе речь пойдёт о задаче на максимум в случае неориентированного рёберно взвешенного графа.

В предположении P≠NP для этой задачи в общем виде не существует точных полиномиальных алгоритмов. Поэтому изучение отдельных подклассов этой задачи — важное направление исследований. Например,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–07–00195 и 12–01–00093), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 30, целевой программы СО РАН (проект № 44), а также Госконтракта 14.740.11.0362.

подклассом рассматриваемой задачи является задача коммивояжёра на максимум на графах ($\mathrm{TSP}_{\max}$) с весовой функцией рёбер, обладающей некоторыми дополнительными свойствами. В нашей работе рассматриваются графы с весами рёбер из отрезка $[1, q]$, а также с весами рёбер 1 и 2.

Естественным обобщением является переход к задаче о двух или более рёберно непересекающихся маршрутах коммивояжёра. Такую задачу называют также задачей о m бродячих торговцах (m-Peripatetic Salesman Problem, далее m-PSP) [11]. Понятно, что при $m = 1$ имеем обычную задачу коммивояжёра (TSP). Входом задачи m-PSP является полный n-вершинный граф $G = (V, E)$ с неотрицательной весовой функцией рёбер $w : E \to R_+$. Целью является нахождение m непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов $H_1, \dots, H_m \subset E$ таких, что величина $\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{e \in H_k} w(e)$ минимальна или максимальна.

В нашей работе рассматривается задача 2-$\mathrm{PSP}_{\max}$ на неориентированных графах с весами рёбер на отрезке $[1, q]$. Далее задача обозначается через 2-$\mathrm{PSP}_{\max}[1, q]$. Также исследуется следующая постановка задачи 2-$\mathrm{PSP}_{\max}$: *имея на входе неориентированный граф $G = (V, E)$ с двумя весовыми функциями $w_1 : E \to \{1, 2\}$ и $w_2 : E \to \{1, 2\}$ (соответствующими двум маршрутам коммивояжёра), найти пару таких рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов, что величина $w_1(H_1) + w_2(H_2)$ максимальна.* Эту задачу обозначим через 2-$\mathrm{PSP}^{d}_{\max}\{1, 2\}$.

В [7] доказана NP-полнота задачи определения существования двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе, что влечёт NP-трудность задачи 2-$\mathrm{PSP}_{\max}\{1, 2\}$ (и тем более метрической задачи 2-$\mathrm{PSP}_{\max}$, случая весов из отрезка $[1, q]$, а также общего случая 2-$\mathrm{PSP}_{\max}$). В связи с этим представляет большой интерес построение полиномиальных алгоритмов решения с гарантированными оценками точности для задачи 2-$\mathrm{PSP}_{\max}$ с различными свойствами весовой функции. Рассмотрение известных результатов для задач, близких к рассматриваемым в данной работе, привело к построению алгоритмов с новыми, улучшенными оценками относительной погрешности.

В [1] предложен полиномиальный алгоритм $A_{3/4}$ с гарантированной оценкой точности $3/4$ для 2-PSP на максимум с произвольной весовой функцией рёбер. Несколько приближённых алгоритмов решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 можно найти в [2]. Кроме того, из [2] следует существование алгоритма $A_{5/(q+4)}$ решения 2-$\mathrm{PSP}_{\max}$ с весами рёбер на отрезке $[1, q]$ и оценкой точности $5/(q+4)$.

В настоящей статье посредством совместного применения алгорит-

мов $A_{3/4}$ и $A_{5/(q+4)}$ удалось построить алгоритм с улучшенной априорной оценкой точности $\frac{3q+2}{4q+1}$ решения задачи 2-PSP$_{\max}[1, q]$. Рассмотрена также задача 2-PSP$^d_{\max}\{1, 2\}$, в которой искомые рёберно непересекающиеся маршруты коммивояжёров имеют различные весовые функции рёбер, причём веса рёбер принимают значения 1 и 2. Предложен полиномиальный метод приближённого решения этой задачи. Метод основан на комбинированном использовании двух разных процедур. Первая процедура основана на очевидной связи между задачами 2-PSP$_{\max}\{1,2\}$ и 2-PSP$_{\min}\{1,2\}$. Другая процедура использует идеи работы [6] вместе с алгоритмом решения задачи TSP$_{\min}\{1,2\}$ с оценкой 7/6 [13]. В результате совместное рассмотрение оценок точности указанных процедур даёт новый алгоритм решения задачи 2-PSP$^d_{\max}\{1, 2\}$, имеющий оценку точности $\frac{11\rho-8}{18\rho-15}$. Известны значения ρ, равные 11/7, 7/5 и 4/3 [3, 6, 9]. Им соответствуют следующие оценки точности для комбинированного алгоритма решения задачи 2-PSP$^d_{\max}\{1, 2\}$: $65/113 < 37/51 < 20/27$.

1. Постановки задач

Задача 2-PSP$_{\max}[1, q]$. Пусть $G = (V, E)$ — полный неориентированный граф с весовой функцией рёбер $w : E \to [1, q]$. Целью является отыскание двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 с максимальным суммарным весом рёбер $w(H_1 \cup H_2)$.

Задача 2-PSP$_{\max}\{1, 2\}$ с различными весовыми функциями. Пусть задан полный неориентированный граф $G = (V, E)$ и две функции весов рёбер $w_1 : E \to \{1, 2\}$, $w_2 : E \to \{1, 2\}$. Целью является отыскание двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 с максимальным суммарным весом рёбер $w_1(H_1) + w_2(H_2)$.

Замечание 1. Квадратные скобки $[1, q]$ в краткой записи задачи всегда означают, что веса рёбер принимают любые значения из отрезка $[1, q]$. Фигурные скобки (как, например, $\{1, 2\}$) указывают на принадлежность весов рёбер некоторому множеству неотрицательных чисел.

Вес оптимального решения задачи вне зависимости от рассматриваемой постановки будем обозначать через Opt. Из контекста всегда будет ясно, вес решения какой именно задачи так обозначен.

2. Задача о двух коммивояжёрах на максимум на графах с весами рёбер из отрезка $[1, q]$

2.1. Обзор известных результатов. Алгоритм $A_{3/4}$. Полиномиальный приближённый алгоритм $A_{3/4}$ с оценкой точности 3/4 и тру-

доёмкостью $O(n^3)$ предложен в 2006 г. для решения 2-PSP$_{\max}$ с произвольной общей весовой функцией [1]. В настоящей работе этот алгоритм используется для получения улучшенной оценки. Ниже приведено краткое описание алгоритма, а также некоторые используемые в дальнейшем утверждения.

Схема алгоритма $A_{3/4}$

Вход: полный неориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, весовая функция $w : E \to \mathbb{R}_+$.

Этап 0. В случае $n \leqslant 13$ задача решается полным перебором. Иначе переходим на этап 1.

Этап 1. Используя новую целевую функцию

$$\widetilde{w}(e) = w(e) - \Big(\sum_{e' \in E} w(e') + 1 \Big)$$

и алгоритм Габова [8], строится подграф $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$ графа G, обладающий следующими свойствами:

(i) в случае чётного n граф $\widetilde{G}$ является кубическим, в случае нечётного n он имеет единственную вершину степени 4, а степени остальных его вершин равны 3;

(ii) граф $\widetilde{G}$ имеет максимальный вес относительно весовой функции w среди всех графов, обладающих предыдущим свойством.

Этап 2. Граф $\widetilde{G}$ разбивается на два частичных тура $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_2$, обладающих набором свойств, которые позволяют реализовать этап 3.

Этап 3. Добавлением недостающих рёбер пара частичных туров $\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$ преобразуется в пару рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1,\ H_2$.

На этом алгоритм заканчивает работу.

Выход: $H_1,\ H_2$.

Лемма 1. *В полном графе G с чётным числом вершин n за $O(n^3)$ операций можно построить пару рёберно непересекающихся частичных туров T_1 и T_2 (обозначим $\widetilde{E} = T_1 \cup T_2$), для которых выполняются условия:*

(i) *$\widetilde{G}(V, \widetilde{E})$ — остовный 3-регулярный подграф;*

(ii) *$\widetilde{w}(T_1 \cup T_2) \geqslant \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt}$;*

(iii) *$T_1 \cup T_2$ можно за $O(n^3)$ операций достроить до пары рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов.*

В полном графе G с нечётным числом вершин n и весами рёбер из промежутка $[1, +\infty)$ за $O(n^3)$ операций можно построить пару рёберно

непересекающихся частичных туров T_1 *и* T_2, *для которых выполняются условия:*

(i′) $\widetilde{G}(V, \widetilde{E})$ — *остовный подграф, в котором все вершины имеют степень* 3 *за исключением единственной вершины степени* 4;

(ii′) $\widetilde{w}(T_1 \cup T_2) \geqslant \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt} + \frac{1}{2}$;

(iii′) $T_1 \cup T_2$ *можно за* $O(n^3)$ *операций достроить до пары рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов.*

Доказательство. Свойства (i), (i′), (iii) и (iii′) являются прямыми следствиями построений алгоритма $A_{3/4}$: достаточно в качестве туров T_1, T_2 взять пару $\widetilde{G}_1$, $\widetilde{G}_2$.

Остаётся оценить $w(\widetilde{E})$. Оценка для случая чётного числа вершин приведена в [1]. Рассмотрим случай нечётного числа вершин.

Предположим, что $H_1 \cup H_2$ — оптимальная пара циклов, причём $w(H_1) \leqslant w(H_2)$. Выделим в цикле H_1 некоторое паросочетание M, максимальное по числу рёбер, и ребро e, инцидентное той вершине графа G, которая не вошла в паросочетание. На рис. 1 гамильтонов цикл H_1 задаёт последовательность обхода городов. Одно из возможных паросочетаний M изображено жирными рёбрами, также предложено ребро, которое подходит в качестве e.

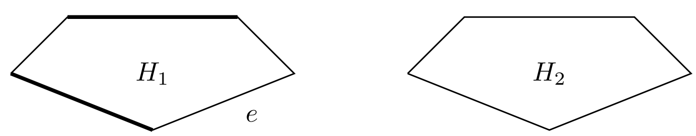

Рис. 1. Гамильтонов цикл H_1 и паросочетание $M \subset H_1$, $n = 5$

Рассмотрим множества рёбер

$$E_1 = H_2 \cup (H_1 \backslash M) \quad \text{и} \quad E_2 = H_2 \cup M \cup \{e\}.$$

Очевидно, они удовлетворяют условию (i′), а значит, по построению множества $\widetilde{E}$ как максимального по весу имеем

$$w(\widetilde{E}) \geqslant \max\{w(E_1),\ w(E_2)\}. \tag{1}$$

Предположим, что $w(M) \leqslant \frac{1}{4}\,\mathrm{Opt} - \frac{1}{2}$. Тогда

$$w(E_1) = \mathrm{Opt} - w(M) \geqslant \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt} + \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $w(M) > \frac{1}{4}\,\mathrm{Opt} - \frac{1}{2}$. Учитывая неравенство $w(H_1) \leqslant w(H_2)$ (следовательно, $w(H_2) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{Opt}$), получаем

$$w(E_2) = w(H_2) + w(M) + w(e) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{Opt} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Opt} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt} + \frac{1}{2}.$$

Из оценок $w(E_1)$ и $w(E_2)$ для двух возможных случаев и (1) следует свойство (ii′). Лемма 1 доказана.

2.2. Обзор известных результатов. Алгоритм $A_{5/(q+4)}$. В [2] рассмотрена задача 2-PSP$_{\min}$ с весами рёбер 1 и 2. Представлено четыре полиномиальных приближённых алгоритма с оценками 4/3, 5/4, 26/21 и 6/5. Две последние оценки составляют основной результат работы.

Центральное место в обосновании оценки 6/5 занимает описание процедуры $P_{8/5}$, которая за $O(n^2)$ операций находит в n-вершинном 4-регулярном графе пару непересекающихся частичных туров с общим количеством рёбер не менее $8n/5$. В этой же работе описано, как достроить эту пару туров до пары рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов (процедура $P_{T\to H}$). Подробные описания и обоснования соответствующих процедур приведены в [2]. Ниже приведён наиболее важный для нашего исследования факт из [2].

Лемма 2. *За время $O(n^2)$ в n-вершинном 4-регулярном графе G_4 можно найти пару непересекающихся частичных туров T_1' и T_2' с общим количеством рёбер не менее $8n/5$.*

Следствием леммы 2 является возможность построения алгоритма с оценкой $5/(q+4)$. Опишем схему алгоритма $A_{5/(q+4)}$ построения приближённого решения $H_1 \cup H_2$.

Шаг 1. Алгоритмом из [8] находим 4-регулярный подграф G_4 графа G с наибольшим рёберным весом.

Шаг 2. Процедурой $P_{8/5}$ находим в G_4 пару частичных туров $T_1,\ T_2$.

Шаг 3. Дополняем $T_1,\ T_2$ рёбрами до пары рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1,\ H_2$ (процедура $P_{T\to H}$).

Следствие 1. *Алгоритм $A_{5/(q+4)}$ за $O(n^3)$ операций находит допустимое решение задачи 2-PSP$_{\max}[1,q]$, вес которого составляет не менее $\frac{5}{q+4}$ от веса оптимальной пары циклов.*

Доказательство. Трудоёмкость $O(n^3)$ алгоритма определяется шагом 1, где используется алгоритм Габова. На выполнение оставшихся шагов требуется не более $O(n^2)$ операций.

Оценим вес полученного алгоритмом $A_{5/(q+4)}$ решения $H_1 \cup H_2$. Так как оптимальная пара циклов $H_1^* \cup H_2^*$ одновременно является и некоторым 4-регулярным подграфом графа G, по построению G_4 верно неравенство

$$w(G_4) \geqslant w(H_1^* \cup H_2^*) = \mathrm{Opt}. \tag{2}$$

В силу того, что пара частичных туров T_1, T_2 содержит не менее $8n/5$ рёбер и все эти рёбра вошли в решение $H_1 \cup H_2$, граф G_4 отличается от $H_1 \cup H_2$ в худшем случае «заменой» $2n/5$ рёбер веса q рёбрами веса 1. Поэтому имеем

$$w(H_1 \cup H_2) \geqslant w(G_4) - \frac{2nq}{5} + \frac{2n}{5}. \tag{3}$$

Учитывая очевидное неравенство $2n \leqslant w(H_1 \cup H_2)$ и подставляя (2) в (3), получаем

$$w(H_1 \cup H_2) \geqslant \mathrm{Opt} - (q-1)\frac{2n}{5} \geqslant \mathrm{Opt} - \frac{q-1}{5} w(H_1 \cup H_2).$$

Таким образом,

$$w(H_1 \cup H_2) \geqslant \frac{5}{q+4}\,\mathrm{Opt}.$$

Следствие 1 доказано.

2.3. Полиномиальный приближённый алгоритм A_1. Ниже описан алгоритм A_1 решения задачи 2-PSP$_{\max}[1,q]$ с оценкой точности $\frac{3q+1}{4q+2}$ и трудоёмкостью $O(n^3)$.

Вход: полный неориентированный граф $G = (V, E)$ с весовой функцией рёбер $w : E \to [1, q]$.

Шаг 1. Построим пару частичных туров T_1', T_2', обладающую всеми свойствами из леммы 1 (процедура построения описана в алгоритме $A_{3/4}$).

Шаг 2. Дополним T_1', T_2' произвольными подходящими рёбрами до пары рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1', H_2' (что возможно по лемме 1).

Шаг 3. Алгоритмом Габова [8] строим 4-регулярный подграф G_4 графа G с наибольшим рёберным весом относительно весовой функции w.

Шаг 4. Процедурой $P_{8/5}$ в G_4 находим пару туров T_1'', T_2'' с общим числом рёбер не менее $8n/5$.

Шаг 5. Используя процедуру $P_{T\to H}$, из T_1'', T_2'' получаем пару циклов H_1'', H_2''.

Шаг 6. В качестве выхода выберем среди (H_1', H_2'), (H_1'', H_2'') пару гамильтоновых циклов H_1, H_2 наибольшего суммарного веса

$$w(H_1 \cup H_2) = \max\{w(H_1' \cup H_2'),\ w(H_1'' \cup H_2'')\}.$$

Теорема 1. *Алгоритм A_1 за время $O(n^3)$ находит допустимое решение задачи* 2-PSP$_{\max}[1, q]$, *суммарный вес которого составляет не менее $\frac{3q+2}{4q+1}$ от веса оптимального решения.*

Доказательство. Оценим $w(H_1' \cup H_2')$. Пара циклов H_1', H_2' получена соединением цепей из T_1', T_2' некоторыми рёбрами графа G. Так как $G' = (V, \widetilde{E})$ — 3-регулярный («почти 3-регулярный» при нечётном числе вершин) остовный подграф, число рёбер в нём равно $3n/2$ ($(3n+1)/2$ при нечётном n). Кроме того, очевидно, пара рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов содержит $2n$ рёбер. Таким образом, на шаге 2 к паре туров T_1', T_2' добавлено $n/2$ ($(n-1)/2$ в случае нечётного n) рёбер. При этом вес каждого ребра не менее 1. Следовательно, из условий (ii) и (ii$'$) леммы 1, получаем

$$w(H_1' \cup H_2') \geqslant \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt} + \frac{n}{2}. \tag{4}$$

Теперь оценим величину $w(H_1'' \cup H_2'')$. На шаге 3 построен 4-регулярный подграф G_4, состоящий из $2n$ рёбер. По лемме 2 пара туров T_1'', T_2'', найденная в G_4 на шаге 4, содержит не менее $8n/5$ рёбер. Следовательно, в процессе преобразования G_4 в $T_1'' \cup T_2''$ по весу потеряно $lq \leqslant \frac{2n}{5}q$ ($l \leqslant \frac{2n}{5}$ рёбер веса не более q). Но далее T_1'', T_2'' достроены до пары гамильтоновых циклов с добавлением при этом l рёбер веса $\geqslant 1$. В итоге получаем

$$w(H_1'' \cup H_2'') \geqslant w(G_4) - lq + l \geqslant w(G_4) - \frac{2n}{5}\,q + \frac{2n}{5}. \tag{5}$$

Очевидно, что $H_1^* \cup H_2^*$ (оптимальная пара циклов) образует 4-регулярный подграф графа G. Так как G_4 является 4-регулярным подграфом наибольшего веса, имеем $w(G_4) \geqslant \mathrm{Opt}$. Таким образом, для $w(H_1'' \cup H_2'')$ получаем

$$w(H_1'' \cup H_2'') \geqslant \mathrm{Opt} - \frac{2n}{5}\,q + \frac{2n}{5}. \tag{6}$$

По построению итоговая пара циклов H_1, H_2 имеет наибольший вес среди $(H_1',\ H_2')$ и $(H_1'',\ H_2'')$. Следовательно, оценки (4) и (6) верны

и для $w(H_1 \cup H_2)$:

$$w(H_1 \cup H_2) \geqslant \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt} + \frac{n}{2}, \tag{7}$$

$$w(H_1 \cup H_2) \geqslant \mathrm{Opt} - \frac{2n}{5}\,q + \frac{2n}{5}. \tag{8}$$

Домножая (7) на $4(q-1)/5$ и прибавляя к (8), получаем

$$w(H_1 \cup H_2) \geqslant \frac{3q+2}{4q+1}\,\mathrm{Opt}.$$

Самым трудоёмким шагом алгоритма A_1 является построение 4-регулярного подграфа G_4 наибольшего веса, его время $O(n^3)$ [8] и определяет трудоёмкость всего алгоритма. Теорема 1 доказана.

Нетрудно видеть, что для всякого $q > 1$ полученная оценка лучше ранее известной оценки $\frac{3q+1}{4q}$, следующей из алгоритма $A_{3/4}$ [1]. Например, при $q = 2$ имеем улучшенную оценку 8/9 (по сравнению с 7/8).

3. Задача 2-$\mathbf{PSP}_{\max}\{1,2\}$ на полном графе с разными весовыми функциями маршрутов (2-$\mathbf{PSP}^{d}_{\max}\{1,2\}$)

3.1. Алгоритм $A_{8/9}$ решения задачи $\mathbf{TSP}_{\max}\{1,2\}$. Прежде всего рассмотрим связь между задачами коммивояжёра $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ (на максимум) и $\mathrm{TSP}_{\min}\{1,2\}$ (на минимум) в случае, когда веса рёбер принимают значения 1 и 2.

Пусть Opt и $\mathrm{Opt}'(G)$ — веса оптимальных маршрутов (гамильтоновых циклов) в задачах $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ и $\mathrm{TSP}_{\min}\{1,2\}$) с весовыми функциями рёбер w и w'. Очевидно, что если задачи $\mathrm{TSP}_{\min}\{1,2\}$ и $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ имеют в качестве входа один и тот же граф G, а весовые функции связаны равенством $w'(e) = 3 - w(e)$, то оптимальные решения этих задач (гамильтоновы циклы) совпадут. Следовательно, в этом случае для любого графа G

$$\mathrm{Opt}'(G) = 3n - \mathrm{Opt}. \tag{9}$$

Комбинируя эту связь между задачами $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ и $\mathrm{TSP}_{\min}\{1,2\}$ с известным алгоритмом Сердюкова с оценкой 3/4 [5], построим далее приближённый алгоритм $A_{8/9}$ для решения задачи $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$.

Опишем основные этапы алгоритма Сердюкова A_S. Рассмотрим менее громоздкий случай, когда число вершин графа n чётно.

Алгоритм A_S

Этап 1. Алгоритм начинается с построения двух основных конструкций — циклового покрытия C максимального веса и паросочетания M максимального веса (не обязательно рёберно непересекающихся).

Этап 2. С помощью специальной процедуры пара (C, M) преобразуется в пару туров $T_1,\ T_2$ без потери рёбер. В ходе работы процедуры на шаге i в цикле C_i покрытия C находится такое ребро e_i, после перемещения которого в M не образуется циклов (с учётом уже добавленных рёбер на шагах $1, 2, \ldots, i-1$), т. е. рёбра из T_1 и T_2 суть в точности рёбра из C и M, и их число равно $3n/2$.

Этап 3. Оба тура T_1 и T_2 произвольными рёбрами достраиваются до гамильтоновых циклов. На выходе алгоритма — гамильтонов цикл большего веса.

Опишем схему алгоритма, комбинирующего два полученных выше результата.

Алгоритм $A_{8/9}$

Этап 1. Найти решение задачи $\mathrm{TSP_{min}}\{1,2\}$ с входом $(G, 3-w)$, применяя алгоритм Пападимитриу и Яннакакиса [13].

Этап 2. Найти решение задачи $\mathrm{TSP_{max}}\{1,2\}$ на входе (G, w) посредством алгоритма Сердюкова A_S [5].

Этап 3. Из двух найденных циклов выбрать цикл наибольшего веса.

Теорема 2. *Алгоритм $A_{8/9}$ за время $O(n^3)$ находит допустимое решение задачи коммивояжёра на максимум с весами рёбер 1 и 2, вес которого составляет не менее $8/9$ от веса оптимального решения.*

Доказательство. На этапе 1 алгоритма по входу (G, w) задачи $\mathrm{TSP_{max}}\{1,2\}$ строим вход $(G,\ w')$ задачи $\mathrm{TSP_{min}}\{1,2\}$ $(w' = 3-w)$. Применим алгоритм Пападимитриу и Яннакакиса [13] для нахождения приближённого решения H задачи $\mathrm{TSP_{min}}\{1,2\}$, для которого верна оценка

$$w'(H) \leqslant \frac{7}{6}\,\mathrm{Opt}'(G).$$

Учитывая связь между весовыми функция w и w', а также соотношение (9) между оптимумами задач, приходим к неравенству $w(H) \geqslant \frac{7}{6}\,\mathrm{Opt} - \frac{n}{2}$, или, другими словами,

$$\Delta_1 = \frac{w(H)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \frac{7}{6} - \frac{n}{2\,\mathrm{Opt}} = \frac{7}{6} - \frac{x}{2}, \tag{10}$$

где $x = n/\mathrm{Opt}$, $1/2 \leqslant x \leqslant 1$.

На этапе 2 алгоритма используется алгоритм A_S. Заметим, что оптимальный цикл H^* для задачи $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ является некоторым цикловым покрытием. Значит, для циклового покрытия максимального веса выполнено $w(C) \geqslant \mathrm{Opt}$. С другой стороны, H^* можно представить в виде объединения двух паросочетаний графа, вес каждого из которых оценивается сверху величиной $w(M)$, тем самым $2w(M) \geqslant \mathrm{Opt}$. Объединяя две описанные оценки, для туров T_1 и T_2, построенных алгоритмом A_S, получаем

$$w(T_1) + w(T_2) = w(C) + w(M) \geqslant \frac{3}{2}\,\mathrm{Opt}. \tag{11}$$

Пара упомянутых туров достраивается алгоритмом A_S до пары гамильтоновых циклов. Число рёбер двух туров равно $3n/2$, а два гамильтоновых цикла содержат $2n$ рёбер. Таким образом, на этапе 3 алгоритма A_S добавлено $n/2$ рёбер. При этом в случае задачи $\mathrm{TSP}_{\max}(1,2)$ вес каждого ребра не меньше единицы. Учитывая (11), получаем неравенство

$$w(H_1) + w(H_2) \geqslant \frac{3}{2}\,\mathrm{Opt} + \frac{n}{2}.$$

В качестве выхода алгоритма A_S среди H_1, H_2 выбран цикл H с бо́льшим весом. Следовательно, для его веса верна оценка $w(H) \geqslant \frac{3}{4}\,\mathrm{Opt} + \frac{n}{4}$.

Обозначая $\Delta_1 = w(H)/\mathrm{Opt}$, $x = n/\mathrm{Opt}$, перепишем полученное неравенство в виде

$$\Delta_1 \geqslant \frac{3}{4} + \frac{x}{4}\,. \tag{12}$$

По построению для решения, полученного алгоритмом $A_{8/9}$ на этапе 3, выполнены одновременно неравенства (10) и (12), откуда с учётом $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ следует что

$$\frac{w(H)}{\mathrm{Opt}} = \Delta_1 \geqslant \min_{\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1} \max\left\{\frac{7}{6} - \frac{x}{2};\ \frac{3}{4} + \frac{x}{4}\right\} = \frac{8}{9}.$$

Время работы определяется трудоёмкостью алгоритма A_S, равной $O(n^3)$. Теорема 2 доказана.

3.2. Алгоритм A_2 решения задачи 2-$\mathbf{PSP}^{d}_{\max}\{1,2\}$. Рассмотрим задачу о двух коммивояжёрах на максимум в случае, когда веса рёбер принимают только значения 1 или 2 и при этом имеется полный неориентированный граф с двумя различными весовыми функциями, соответствующими двум рёберно непересекающимся маршрутам. Обозначим

через x отношение n/Opt. Так как веса рёбер принимают значения 1 и 2, имеем $1/4 \leqslant x \leqslant 1/2$.

По аналогии со связью между задачами $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ и $\mathrm{TSP}_{\min}\{1,2\}$ рассмотрим связь между задачами о двух коммивояжёрах на максимум и на минимум в случае разных весовых функций, принимающих значения 1 и 2.

Лемма 3. *Предположим, что известен полиномиальный приближённый алгоритм решения задачи* $2\text{-}\mathrm{PSP}^{\,d}_{\min}\{1,2\}$, *который находит допустимое решение с оценкой относительной точности* $\rho > 1$. *Тогда можно построить допустимое решение* $H_1,\ H_2$ *задачи* $2\text{-}\mathrm{PSP}^{\,d}_{\max}\{1,2\}$, *для которой верна оценка*

$$\frac{w_1(H_1) + w_2(H_2)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \rho - 6(\rho - 1)x. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть на входе задачи $2\text{-}\mathrm{PSP}^{\,d}\{1,2\}$ дан граф G с весовыми функциями рёбер w_1 и w_2. Рассмотрим этот же граф и весовые функции $w_1' = 3 - w_1,\ w_2' = 3 - w_2$ и для преобразованной входной информации применим алгоритм с оценкой ρ, найдя приближённое решение задачи $2\text{-}\mathrm{PSP}^{\,d}_{\min}\{1,2\}$. Если обозначить через $H_1,\ H_2$ полученную пару гамильтоновых циклов, а через $OPT'(G)$ — оптимум задачи $2\text{-}\mathrm{PSP}^{\,d}_{\min}\{1,2\}$, то верно неравенство

$$w_1'(H_1) + w_2'(H_2) \leqslant \rho\,\mathrm{Opt}'(G). \tag{14}$$

Очевидно, что $\mathrm{Opt}'(G) = 6n - \mathrm{Opt}$, $w_1'(H_1) = 3n - w_1(H_1)$, $w_2'(H_2) = 3n - w_2(H_2)$. Подставим эти равенства в (14) и выполним серию преобразований:

$$3n - w_1(H_1) + 3n - w_2(H_2) \leqslant \rho(6n - \mathrm{Opt}),$$

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \geqslant 6n - 6n\rho + \rho\,\mathrm{Opt},$$

$$\frac{w_1(H_1) + w_2(H_2)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \rho - 6(\rho - 1)x.$$

Таким образом, оценка (13) верна для веса полученного решения $H_1,\ H_2$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Предположим, что известен полиномиальный приближённый алгоритм решения задачи* $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ *с оценкой* Δ_1. *Тогда с той же трудоёмкостью можно построить пару циклов* $H_1,\ H_2$ *— решение задачи* $2\text{-}\mathrm{PSP}^{\,d}_{\max}\{1,2\}$, *вес которого оценивается неравенством*

$$\frac{w_1(H_1) + w_2(H_2)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \frac{\Delta_1}{2} + x. \tag{15}$$

Доказательство. Аналогичный результат для задачи коммивояжёра на минимум содержится в [6]. Опишем схему построения приближённого решения задачи 2-PSP$_{\max}^{d}\{1,2\}$.

Шаг 1. Найдём два приближённых решения H_1 и H_2 для задачи TSP$_{\max}\{1,2\}$ с весовыми функциями w_1 и w_2 соответственно, применяя Δ_1-приближённый алгоритм (существование которого предполагается в лемме).

Шаг 2. Найдём произвольный гамильтонов цикл H_2', который не пересекается по рёбрам с H_1. Также найдём гамильтонов цикл H_1', рёберно непересекающийся с H_2.

Шаг 3. Среди двух допустимых решений (H_1, H_2') и (H_1', H_2) выберем пару гамильтоновых циклов наибольшего суммарного веса в качестве приближённого решения $(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2)$ задачи 2-PSP$_{\max}^{d}\{1,2\}$.

Оценим величину $\frac{w_1(\widetilde{H}_1)+w_2(\widetilde{H}_2)}{\mathrm{Opt}}$. В силу того, что веса принимают значения 1 или 2, для любого $i \in \{1,2\}$ верны неравенства

$$n \leqslant w_i(H_i') \leqslant 2n. \tag{16}$$

При построении гамильтоновых циклов H_1 и H_2 мы применяли приближённый алгоритм с оценкой Δ_1, следовательно,

$$w_i(H_i) \geqslant \Delta_1 w_i(H_i^*), \tag{17}$$

где H_i^* — оптимальное решение задачи TSP$_{\max}\{1,2\}$ с весовой функцией w_i.

Также очевидно неравенство

$$\mathrm{Opt} \leqslant w_1(H_1^*) + w_2(H_2^*). \tag{18}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\frac{w_1(\widetilde{H}_1)+w_2(\widetilde{H}_2)}{\mathrm{Opt}} &= \frac{\max\big\{w_1(H_1)+w_2(H_2')\,;w_1(H_1')+w_2(H_2)\big\}}{\mathrm{Opt}} \\
&\overset{(16),(17)}{\geqslant} \frac{\max\big\{\Delta_1 w_1(H_1^*)+n\,;\ \Delta_1 w_2(H_2^*)+n\big\}}{\mathrm{Opt}} \\
&\geqslant \frac{\Delta_1\big(w_1(H_1^*)+w_2(H_2^*)\big)+2n}{2\,\mathrm{Opt}} \overset{(18)}{\geqslant} \frac{\Delta_1}{2}+\frac{n}{\mathrm{Opt}} = \frac{\Delta_1}{2}+x.
\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Опишем приближённый алгоритм A_2 решения задачи 2-$\mathrm{PSP}^d_{\max}\{1,2\}$. Пусть на входе имеется граф $G=(V,E)$ с числом вершин n и две функции весов рёбер $w_1 : E \to \{1,2\},\ w_2 : E \to \{1,2\}$.

Алгоритм A_2

Этап 1. По входу (G, w_1, w_2) задачи 2-$\mathrm{PSP}^d_{\max}\{1,2\}$ построим вход (G, w_1', w_2') задачи 2-$\mathrm{PSP}^d_{\min}\{1,2\}$, к которой применим ρ-приближённый алгоритм (как в лемме 3).

Этап 2. Найдём решение задачи 2-$\mathrm{PSP}^d_{\max}\{1,2\}$, используя процедуру из доказательства леммы 4. При этом в качестве приближённого алгоритма решения задачи $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$ возьмём алгоритм $A_{8/9}$, описанный в п. 3.1.

Этап 3. На этапах 1 и 2 получены две пары гамильтоновых циклов. В качестве приближённого решения выбираем пару $(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2)$ наибольшего суммарного веса.

Замечание 2. Временна́я сложность алгоритма A_2 равна (по порядку величины) сумме трудоёмкостей этапа 1 (построение ρ-приближённого решения задачи $\mathrm{PSP}^d_{\min}\{1,2\}$) и этапа 2 (построение Δ_1-приближённого решения задачи $\mathrm{TSP}_{\max}\{1,2\}$).

Например, если на 1-м этапе использовать алгоритм с оценкой точности $\rho = 11/7$ из [6] с временно́й сложностью $O(n^3)$, а на 2-м этапе — алгоритм с оценкой точности $\Delta_1 = 8/9$ (имеющий по теореме 2 трудоёмкость $O(n^3)$), то алгоритм A_2 выполняется за время $O(n^3)$.

Теорема 3. *Алгоритм A_2 находит допустимое решение задачи 2-$\mathrm{PSP}^d_{\max}\{1,2\}$ с суммарным весом не менее* $\frac{11\rho-8}{18\rho-15}\,\mathrm{Opt}$.

Доказательство. По построению для решения $(\widetilde{H}_1\widetilde{H}_2)$, полученного алгоритмом A_2, выполняются оценки точности (13) и (15) из лемм 3 и 4. Подставим в (15) $\Delta_1 = 8/9$ и избавимся от x в неравенствах

$$\frac{w_1(\widetilde{H}_1)+w_2(\widetilde{H}_2)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \rho - 6(\rho-1)x, \quad \frac{w_1(\widetilde{H}_1)+w_2(\widetilde{H}_2)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \frac{4}{9}+x.$$

Для этого достаточно второе из них домножить на $6(\rho-1)$ и прибавить к первому. В итоге имеем

$$\frac{w_1(\widetilde{H}_1)+w_2(\widetilde{H}_2)}{\mathrm{Opt}} \geqslant \frac{11\rho-8}{18\rho-15}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Известным значениям точности ρ решения задачи 2-$\mathrm{PSP}_{\min}^{d}\{1,2\}$, равным $11/7$, $7/5$ и $4/3$ [3, 6, 9], соответствуют следующие априорные оценки точности алгоритма A_2 решения задачи 2-$\mathrm{PSP}_{\max}^{d}\{1,2\}$:

$$\frac{65}{113} < \frac{37}{51} < \frac{20}{27}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Бабурин А Е., Гимади Э.Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 11–20.
2. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 41–61.
3. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Задача о двух коммивояжёрах на минимум в полном графе с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 16, № 4. — С. 17–48.
4. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
5. **Сердюков А. И.** Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжёра на максимум // Управляемые системы. — 1984. — Вып. 25. — С. 80–86.
6. **Baburin A. E., Croce F. D., Gimadi E. Kh., Glazkov Y. V., Paschos V. Th.** Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // Discrete Appl. Math. — 2009. — Vol. 157, N 9. — P. 1988–1992.
7. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // Eur. J. Oper. Res. — 1993. — Vol. 10, N 2. — P. 229–243.
8. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Ann. ACM Symp. Theory of Computing (Boston, April 25–27, 1983). — New York: ACM Press, 1983. — P. 448–456.
9. **Glebov A. N., Gordeeva A. V., Zambalaeva D. Zh.** 7/5-Approximation algorithm for a 2-peripatetic salesman problem on minimum with different weight functions valued 1 and 2 // Discrete Appl. Math. — 2010, submitted.
10. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations // Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. — 830 p.
11. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Ad-

vanced Study Inst., Versailles, 1974). — Reidel; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1975. — P. 173–178.

12. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization. — Chichester: Wiley, 1985. — 463 p.
13. **Papadimitriou C. H., Yannakakis M.** The traveling salesman problem with distances one and two // Math. Oper. Res. — 1993. — Vol. 18, N 1. — P. 1–11.

Гимади Эдуард Хайрудтинович,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru
Ивонина Евгения Викторовна,
e-mail: evivonina@gmail.com

Статья поступила
31 мая 2011 г.

Переработанный вариант —
1 июля 2011 г.