ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2012. Том 19, № 1. С. 74–96

УДК 519.178

АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ О РЁБЕРНОМ СПИСКОВОМ РАНЖИРОВАНИИ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ ТРЕМЯ ЗАПРЕТАМИ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Описаны все наследственные классы графов, определяемые не более чем тремя запрещёнными порождёнными подграфами (обструкциями), для которых задача о рёберном списковом ранжировании полиномиально разрешима. В основе алгоритма распознавания сложностного статуса лежит установление принадлежности обструкций некоторым специальным («критическим») классам графов. Частью множества таких специальных классов являются минимальные по включению наследственные случаи NP-полноты рассматриваемой задачи. Все классы данного типа, определяемые тремя и менее обструкциями, описаны.

Ключевые слова: вычислительная сложность, минимальный сложный класс, граничный класс, задача о рёберном списковом ранжировании, эффективный алгоритм.

Введение

Статья является продолжением цикла работ [3–7], объект исследований которых — семейство наследственных классов графов, т. е. совокупность множеств графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Хорошо известно, что наследственный класс графов $\mathcal{X}$ определяется множеством $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$ своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$. Минимальное по включению множество запрещённых порождённых подграфов для класса $\mathcal{X}$ существует, единственно и обозначается через $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$. Если $|\mathrm{Forb}(\mathcal{X})| = k$, то $\mathcal{X}$ называется *k-определённым*, а если $|\mathrm{Forb}(\mathcal{X})| < \infty$ — *конечно определённым.*

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–01–00357-а и 11–01–00107-а), и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (ГК 16.740.11.0310).

Пусть Π — некоторая NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если Π для графов из этого класса полиномиально разрешима. Любой наследственный не Π-простой класс называется Π-*сложным*. Таким образом, любой наследственный класс графов либо Π-прост, либо Π-сложен. Далее предполагается, что P$\neq$NP, и это условие не включается явно в формулировки теорем и других утверждений. Например, *если задача* Π *остаётся NP-полной для графов из наследственного класса* $\mathcal{X}$, *то* $\mathcal{X}$ *является* Π-*сложным*.

Естественный подход к определению границы между Π-простыми и Π-сложными классами состоит в поиске наследственных классов, тупиковых по сложности решения задачи Π. Иными словами, речь идет о поиске максимальных по включению Π-простых и минимальных по включению Π-сложных классов. Однако максимальных по включению Π-простых классов не существует ни для одной задачи Π. Действительно, к любому Π-простому классу $\mathcal{X}$ можно добавить граф $G \notin \mathcal{X}$ и всевозможные собственные порождённые подграфы G. Получившийся класс будет Π-простым (поскольку к $\mathcal{X}$ добавили лишь конечное множество графов) и включает $\mathcal{X}$. С другой стороны, минимальные по включению Π-сложные классы тоже существуют не всегда. Действительно, для любой NP-полной задачи распознавания принадлежности графа наследственному классу нет минимальных сложных классов [3]. Этот результат действует, например, для задач о вершинной и о рёберной k-раскрасках при $k > 2$. В [3] исследована задача о вершинном списковом ранжировании и показано, что некоторые классы графов являются минимальными сложными для этой задачи. Первые примеры минимальных сложных классов для рёберного варианта задачи о списковом ранжировании найдены в [5].

В нашей статье рассматривается задача о рёберном списковом ранжировании (задача РСР). Постановка её состоит в следующем. Пусть заданы граф G с множеством рёбер E и множество $\mathcal{L} = \{L(e) \mid e \in E\}$, где $L(e)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, которыми разрешается покрасить ребро e). Значит, любые два цвета сравнимы по отношению «быть не больше». $\mathcal{L}$-*ранжированием рёбер* графа G называется такая раскраска c его рёбер, что

(i) $c(e) \in L(e)$,

(ii) если $c(e_1) = c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, (т. е. набор $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_k)$ из попарно различных рёбер графа G, для которого $e'_1 = e_1$, $e'_k = e_k$ и $\forall i \in \overline{1, k-1}$ рёбра e'_i и e'_{i+1} смежны) содержит такое ребро e_3, что $c(e_3) > c(e_1)$.

Проиллюстрируем на примере понятие ранжирования рёбер. Для этого рассмотрим граф, изображённый на рис. 1.

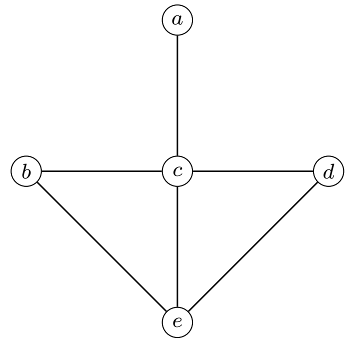


Рис. 1

Пусть $e_1 = (a, c)$, $e_2 = (b, c)$, $e_3 = (b, e)$, $e_4 = (c, d)$, $e_5 = (c, e)$, $e_6 = (d, e)$ и множество $\mathcal{L}$ такое, что $L(e_1) = \{3\}, L(e_2) = \{1, 3\}$, $L(e_3) = \{2, 4\}, L(e_4) = \{1, 2, 3\}, L(e_5) = \{5\}, L(e_6) = \{1, 4\}$. Ясно, что $c(e_1) = 3$ и $c(e_5) = 5$. Поскольку рёбра e_1 и e_2 являются смежными, $c(e_2)$ может быть равным только 1. По тем же причинам $c(e_4) = 2$ и $c(e_6) = 1$. Ребро e_3 не может быть окрашено в цвет 2, так как иначе на пути (e_4, e_2, e_3) нарушается условие ранжирования рёбер. Поэтому $c(e_3) = 4$. Легко видеть, что построенная раскраска рёбер является $\mathcal{L}$-ранжированием.

Задача РСР состоит в том, чтобы по данным G и $\mathcal{L}$ определить, существует ли $\mathcal{L}$-ранжирование рёбер графа G. Далее под РСР-простым классом графов понимается такой наследственный класс, что задача РСР для графов из этого класса решается за полиномиальное время при любом множестве $\mathcal{L}$.

До настоящего времени всё множество минимальных РСР-сложных классов не известно. Однако если рассматривать k-определённые минимальные РСР-сложные классы (т. е. такие минимальные РСР-сложные классы $\mathcal{X}$, что $|\mathrm{Forb}(\mathcal{X})| = k$), то для небольших значений k удаётся описать всё множество таких классов. Так, в [6] показано, что единственным 1-определённым минимальным РСР-сложным классом является множество всех полных графов $\mathcal{C}lique$, что среди наследственных подклассов класса полных двудольных графов существует единственный минимальный РСР-сложный класс $\mathcal{BC}$ и что если $\mathcal{BC}$ не совпадает с множеством всех полных двудольных графов, то 2-определённых минимальных РСР-сложных классов нет. В [7] доказано, что некоторые классы графов являются конечно определёнными минимальными сложными классами для задачи PCP. Одним из этих классов является $\mathcal{C}amomile$. По аналогии с доказательствами из [5] можно показать, что класс $\mathcal{S}tar$ также является PCP-сложным. Описание множеств графов $\mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{S}tar$ дано в конце введения.

Одним из основных наших результатов является доказательство того, что $\mathcal{B}C$ состоит из всевозможных полных двудольных графов, одна из долей которых содержит не более двух вершин. Отсюда и из [6] следует, что 2-определённых минимальных PCP-сложных классов нет. Кроме того, показано, что множество 4-определённых минимальных PCP-сложных классов непусто и конечно.

Другим направлением наших исследований является классификация классов графов, определяемых не более чем тремя запрещёнными порождёнными подграфами, по сложности решения задачи PCP. Доказано, что любой такой класс является PCP-простым тогда и только тогда, когда он не включает ни один из восьми конкретных классов графов и что для семейства 4-определённых классов графов существует конечная совокупность классов графов с таким же значением.

Для графов приняты следующие обозначения:

K_n — полный граф с n вершинами;

$K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле;

$K'_{2,i}$ — граф, получаемый добавлением к графу $K_{2,i}$ ребра, инцидентного вершинам степени i;

P_k — простой путь с k вершинами;

C_k — простой цикл длины k;

комета $C(i,j)$ — граф, получаемый отождествлением вершины степени i графа $K_{1,i}$ с одной из концевых вершин пути P_j;

триод $T(i,j,k)$ — дерево, имеющее не более трёх листьев, находящихся от некоторой его вершины на расстояниях i, j, k соответственно;

$D(i,j,k)$ — граф, являющийся рёберным к $T(i+1, j+1, k+1)$;

$G_1 \oplus G_2$ — граф, являющийся объединением графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин;

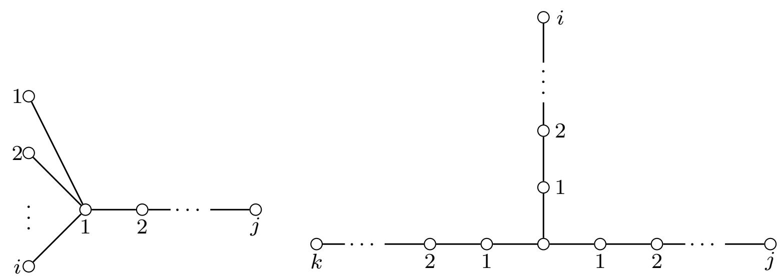
pG — граф, изоморфный $\underbrace{G \oplus G \oplus \ldots \oplus G}_{p \text{ слагаемых}}$.

Комета и триод изображены на рис. 2.

Для классов графов приняты следующие обозначения:

$BC' = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\{\overline{K_i}\} \cup \{K_{1,i}\} \cup \{K'_{2,i}\})$;

$\mathcal{S}tar$ и $\mathcal{C}amomile$ — множества графов, порождённых подграфами в графах из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S'_i$ соответственно, где S_i — результат подразбиения каждого ребра графа $K_{1,i}$, а S'_i — граф, получающийся из S_i добавлением рёбер, соединяющих вершину степени i со всеми листьями.



Комета $C(i, j)$ Триод $T_{i,j,k}$

Рис. 2

1. Доказательства PCP-минимальности классов $\mathcal{B}C$ и $\mathcal{B}C'$

Используем NP-полноту задачи о трёхмерном сочетании для доказательства PCP-минимальности класса $\mathcal{B}C$. В ней заданы попарно не пересекающиеся множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ и множество троек $M \subseteq X \times Y \times Z$. Требуется определить, существует ли подмножество $M' \subseteq M$ мощности n такое, что никакие две тройки из M' не имеют общего элемента.

Лемма 1. *Класс $\mathcal{B}C$ является* PCP-*сложным.*

Доказательство. Рассмотрим множество M — входные данные задачи о трёхмерном сочетании. Пусть $A(i, j) = \{k \mid (x_i, y_j, z_k) \in M\}$, $i, j \in \overline{1, n}$. Рассмотрим множество $\{j \mid A(i, j) \neq \varnothing\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Понятно, что это множество непусто (иначе для M множества M' не существует). Будем считать, что $\{j \mid A(i, j) \neq \varnothing\} = \{j_1^{(i)}, j_2^{(i)}, \ldots, j_{s_i}^{(i)}\}$. Для заданных натурального числа k и некоторого множества натуральных чисел $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ через kN будем обозначать множество $\{kn_1, kn_2, \ldots, kn_p\}$.

Рассмотрим граф $G = K_{2,2\sum\limits_{i=1}^{n} s_i}$. Обозначим через a и b его вершины степени $2\sum\limits_{i=1}^{n} s_i$. Для каждой вершины $x \in \{a, b\}$ плоская укладка графа G задаёт циклическое упорядочивание рёбер, инцидентных x. Пронумеруем рёбра, инцидентные x, в порядке их следования в циклическом упорядочивании. При этом рёбра с одинаковыми номерами являются смежными (рис. 3).

Множество рёбер, инцидентных вершине a, разобъём на $n+1$ частей. Рёбра из i-й части имеют номера из множества

$$N_i = \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} s_k + 1, \sum_{k=0}^{i-1} s_k + 2, \ldots, \sum_{k=0}^{i} s_k \right\}$$

(s_0 считается равным нулю). Иными словами, N_i — множество натуральных чисел из диапазона $\overline{\sum\limits_{k=0}^{i-1} s_k + 1, \sum\limits_{k=0}^{i} s_k}$. Последнюю часть образуют рёбра, инцидентные вершине a и имеющие номер больше $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$. Множество рёбер, принадлежащих i-й части ($i \in \overline{1, n+1}$), обозначим через $\mathrm{Part}_i(a)$. Множество рёбер, инцидентных вершине b, разбивается на $2n$ частей. Для каждого $i \in \overline{1, n}$ множества рёбер, принадлежащих i-й и $(n+i)$-й частям, составляют рёбра (инцидентные b) с номерами из N_i и $\left\{ \sum\limits_{k=0}^{i-1} s_k + 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} s_i, \sum\limits_{k=0}^{i-1} s_k + 2 + \sum\limits_{i=1}^{n} s_i, \ldots, \sum\limits_{k=0}^{i} s_k + \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \right\}$ соответственно. Множество рёбер, принадлежащих i-й части ($i \in \overline{1, 2n}$), обозначим через $\mathrm{Part}_i(b)$.

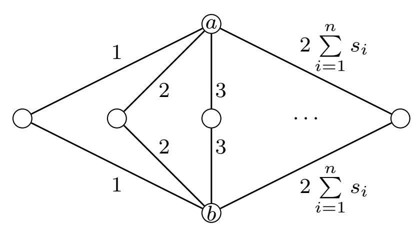


Рис. 3

Теперь покажем, как построить $\mathcal{L}$ — назначение допустимых цветов рёбер графа G. Внутри каждой из введённых ранее частей плоская укладка G порождает свою нумерацию, т. е. если какую-нибудь часть образовывали рёбра с номерами из $\overline{k_1, k_2}$, то во внутренней нумерации этой части ребро с общим номером $i \in \overline{k_1, k_2}$ имеет номер $i - k_1 + 1$. Для ребра e с номером k в части $\mathrm{Part}_i(a)$ $(i \neq n+1)$ положим

$$\mathcal{L}(e) = (n+1)^5 A\big(i, j_k^{(i)}\big) \cup (n+1)\left(N_i \setminus \left\{ \sum_{j=0}^{i} s_j \right\} \right).$$

Ребро e с номером k в части $\mathrm{Part}_{n+1}(a)$ имеет один допустимый цвет $(n+1)^6 + k$. Для ребра e с номером k из части $\mathrm{Part}_i(b)$ $(i < n+1)$

положим
$$\mathcal{L}(e)=\left\{j_k^{(i)}\right\}\cup(n+1)^3\left(N_i\setminus\left\{\sum_{j=0}^{i}s_j\right\}\right).$$
Для всех рёбер e, принадлежащих части $\mathrm{Part}_i(b)$ $(i\geqslant n+1)$, положим $\mathcal{L}(e)=(n+1)N_i$.

Предположим, что существует $\mathcal{L}$-ранжирование рёбер графа G. Покажем, что тогда существует множество M' с требуемыми свойствами. Очевидно, что для любого $i\in\overline{1,n}$ хотя бы одно ребро из $\mathrm{Part}_i(a)$ покрашено в цвет, не принадлежащий множеству $(n+1)\left(N_i\setminus\left\{\sum\limits_{j=0}^{i}s_j\right\}\right)$. Вместе с тем, такое ребро должно быть единственным, поскольку среди рёбер, инцидентных a, не более n рёбер может быть покрашено в цвета, не принадлежащие множеству $(n+1)\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(N_i\setminus\left\{\sum\limits_{j=0}^{i}s_j\right\}\right)$. Обозначим это ребро через e_i'. Аналогично для любого $i\in\overline{1,n}$ ровно одно ребро из $\mathrm{Part}_i(b)$ покрашено в цвет, не принадлежащий множеству $(n+1)^3\left(N_i\setminus\left\{\sum\limits_{j=0}^{i}s_j\right\}\right)$. Данное ребро обозначим через e_i''. Ясно, что среди рёбер $e_1'',e_2'',\ldots,e_n''$ нет двух, покрашенных в один и тот же цвет. Покажем, что рёбра e_i' и e_i'' должны быть смежными для любого i. Предположим противное. Рассмотрим ребро $e^*\in\mathrm{Part}_i(a)$, смежное с e_i''. Цвет ребра e^* больше цвета ребра e_i''. В множестве $\mathrm{Part}_{i+n}(b)$ обязательно есть ребро e^{**}, цвет которого совпадает с цветом e^*. Но тогда для пути, содержащего рёбра e^*,e_i'',e^{**}, не выполняется условие $\mathcal{L}$-ранжирования рёбер; противоречие.

Итак, для любого $i\in\overline{1,n}$ рёбра e_i' и e_i'' должны быть смежными. Но тогда в частях $\mathrm{Part}_i(a)$ и $\mathrm{Part}_i(b)$ рёбра e_i' и e_i'' имеют одинаковый номер k_i. Поскольку $e_1'',e_2'',\ldots,e_n''$ окрашены в попарно различные цвета, $\{j_{k_1},j_{k_2},\ldots,j_{k_n}\}=\{1,2,\ldots,n\}$. Аналогично поскольку $e_1',e_2',\ldots,e_n'$ окрашены в различные цвета,
$$\left\{\frac{c(e_1')}{(n+1)^5},\frac{c(e_2')}{(n+1)^5},\ldots,\frac{c(e_n')}{(n+1)^5}\right\}=\{1,2,\ldots,n\}$$
(напомним, что $c(e_i')$ — цвет, в который покрашено ребро e_i'). Но тогда множество M содержит набор из n троек
$$M'=\{(x_1,y_{j_{k_1}},z_{\frac{c(e_1')}{(n+1)^5}}),(x_2,y_{j_{k_2}},z_{\frac{c(e_2')}{(n+1)^5}}),\ldots,(x_n,y_{j_{k_n}},z_{\frac{c(e_n')}{(n+1)^5}})\}$$
с требуемым свойством.

Таким образом, если существует $\mathcal{L}$-ранжирование рёбер графа G, то существует и множество M' с соответствующими свойствами. Легко проверить справедливость и обратного утверждения. Заметим, что длина входа задачи РСР для пары $(G, \mathcal{L})$ ограничена сверху полиномом от длины входа задачи о трёхмерном сочетании множества M. Поэтому задача о трёхмерном сочетании полиномиально сводится к задаче РСР в классе графов $\{K_{2,i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Отсюда следует, что класс $\mathcal{BC}$ является РСР-сложным. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{BC}$ минимальный* РСР-*сложный.*

Доказательство. По лемме 1 класс $\mathcal{BC}$ является РСР-сложным. Докажем его минимальность. Вначале покажем, что класс $\mathcal{BC} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$ для любого $G \in \mathcal{BC}$ является РСР-простым. Действительно, каждый граф из $\mathcal{BC} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$ либо порождённый подграф графа $K_{|V(G)|,|V(G)|}$, либо граф вида $K_{1,i}$, либо пустой граф. Задача РСР полиномиально разрешима в классе графов $\{K_{1,i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$, поскольку она полиномиально эквивалентна задаче о системе различных представителей. Граф $K_{|V(G)|,|V(G)|}$ содержит конечное число попарно не изоморфных порождённых подграфов. Таким образом, при любом $G \in \mathcal{BC}$ класс $\mathcal{BC} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$ является РСР-простым. Теорема 1 доказана.

Итак, $\mathcal{BC}$ — РСР-сложный и собственный подкласс класса полных двудольных графов, причём $\mathrm{Forb}(\mathcal{BC}) = \{C_3, K_2 \oplus K_1, K_{3,3}\}$. Отсюда и из [6] следует, что не существует 2-определённых минимальных РСР-сложных классов. Более того, в последнем разделе показано, что $\mathcal{BC}$ — единственный 3-определённый минимальный РСР-сложный класс и что множество 4-определённых минимальных РСР-сложных классов конечно. Вместе с тем, далее устанавливается, что множество 4-определённых минимальных РСР-сложных классов непусто. Именно, что $\mathcal{BC}'$ — минимальный РСР-сложный класс. Нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{Forb}(\mathcal{BC}') = \{C_4, K_2 \oplus K_1, K_4, D(0,0,1)\}.$$

Введём понятие продолжения класса графов. Класс $\mathcal{Y}$ называется *продолжением* класса $\mathcal{X}$, если выполняются следующие условия:

(i) для любого графа $G \in \mathcal{X}$ существует такой граф $H \in \mathcal{Y}$, что G — остовный подграф графа H;

(ii) в любом графе из $\mathcal{Y}$ существует остовный подграф из $\mathcal{X}$.

Лемма 2 [7]. *Пусть $\mathcal{Y}$ — произвольный класс графов, являющийся продолжением класса $\mathcal{X}$ с* NP-*полной задачей* РСР. *Тогда задача* РСР NP-*полна в $\mathcal{Y}$.*

Теорема 2. *Класс $\mathcal{BC}'$ минимальный* PCP*-сложный.*

Доказательство. Заметим, что $\{K'_{2,i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ — продолжение класса $\{K_{2,i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$. При доказательстве леммы 1 показано, что задача PCP является NP-полной в классе графов $\{K_{2,i} \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Отсюда и из леммы 2 следует, что класс $\mathcal{BC}'$ PCP-сложный. По аналогии с доказательством теоремы 1 легко показать его минимальность. Теорема 2 доказана.

2. Новые граничные классы для задачи о рёберном списковом ранжировании

Понятие граничного класса графов является полезным инструментом исследования вычислительного статуса задач на графах в семействе конечно определённых классов. Класс графов $\mathcal{X}$ называется *предельным для* NP*-полной задачи на графах* Π (Π-*предельным*), если существует такая последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ из Π-сложных классов, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i = \mathcal{X}$. Класс графов называется Π-*граничным*, если он является минимальным по включению Π-предельным. Понятие граничного класса введено В. Е. Алексеевым в [9] и уточнено в [1]. Значение этого понятия раскрывает следующее утверждение, которое может быть доказано почти так же, как и теорема 4 из [9].

Теорема 3. *Конечно определённый класс графов является* Π*-сложным тогда и только тогда, когда он включает какой-нибудь* Π*-граничный класс.*

Одним из основных результатов нашей работы является полная классификация классов графов, определяемых не более чем тремя запрещёнными порождёнными подграфами, по сложности решения задачи PCP. Формулировка этого критерия похожа на формулировку теоремы 3, а при его доказательстве в значительной мере используется значение понятия граничного класса графов. Для получения указанного результата необходимы некоторые сведения о структуре PCP-граничных классов графов. Основным результатом этого раздела является указание таких классов графов.

Конечно определённый класс — минимальный Π-сложный класс тогда и только тогда, когда он Π-граничен [5]. Классы $\mathcal{C}lique, \mathcal{S}tar, \mathcal{BC}, \mathcal{BC}'$, $\mathcal{C}amomile$ конечно определены (для $\mathcal{S}tar$ и $\mathcal{C}amomile$ [5], $\mathrm{Forb}(\mathcal{C}lique) = \{\overline{K}_2\}, \mathrm{Forb}(\mathcal{BC}) = \{C_3, K_2 \oplus K_1, K_{3,3}\}$ и $\mathrm{Forb}(\mathcal{BC}') = \{C_4, K_2 \oplus K_1, K_4, D(0,0,1)\}$), поэтому они минимальные PCP-сложные и -граничные одновременно. Вместе с тем, в [8] найдены граничные классы, являющиеся простыми для задачи PCP. Речь идёт о классах графов $\widetilde{\mathcal{T}}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$. Каждый из них состоит из порождённых подграфов графов из классов $\{iT(1,i,i) \mid i = 1,2,\ldots\}$ и $\{iD(0,i,i) \mid i = 1,2,\ldots\}$ соответственно. Далее показано, что классы $\widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ также PCP-граничные. Класс $\widehat{\mathcal{T}}$ состоит из графов, являющихся порождёнными подграфами во всевозможных графах, каждая компонента связности которых получается отождествлением двух концевых вершин двух простых путей с двумя несмежными вершинами цикла длины четыре. Строение $\widehat{\mathcal{D}}$ отличается от строения класса $\widehat{\mathcal{T}}$ тем, что концевые вершины двух простых путей отождествляются с вершинами степени два графа $K_4 - e$, где $K_4 - e$ — результат удаления произвольного ребра из графа K_4. Механизмы обоих отождествлений представлены на рис. 4.

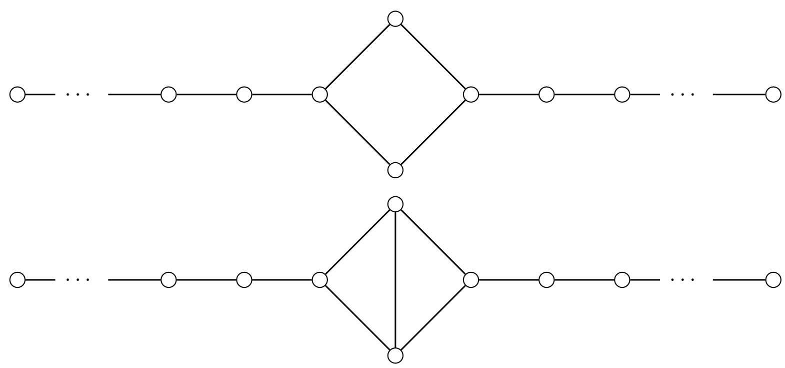


Рис. 4

Лемма 3. *Класс* $\widehat{\mathcal{T}}$ *является* PCP-*предельным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную комету $C(i,j)$ и $\mathcal{L}$ — назначение допустимых цветов рёбер этого графа. Рёбра, принадлежащие подграфу $K_{1,i}$ кометы $C(i,j)$, покрасим в синий цвет и произвольно занумеруем числами от 1 до i, а оставшиеся рёбра этого графа покрасим в белый цвет и занумеруем числами от 1 до $j-1$ в порядке их следования в «хвосте» кометы от конца к началу (под «хвостом» понимается путь P_j графа $C(i,j)$, начало «хвоста» — вершина этого пути, имеющая на рис. 2 номер 1).

Построим граф $G(i,j,k)$ $(k \geqslant 3)$ следующим образом. Рассмотрим простой путь с $ki+j$ вершинами. Занумеруем его рёбра числами от 1 до $ki+j-1$ в порядке их следования от начала к концу пути. Добавим к пути i изолированных вершин, которые произвольно пронумеруем. Первые $j-1$ рёбер пути покрасим в белый цвет. Для каждого $s \in \overline{1,i}$ s-я из добавленных вершин соединяется рёбрами с $(j+(s-1)k)$-й и $(j+(s-1)k+2)$-й вершинами пути, первое из которых окрашивается в синий цвет, а второе в красный. Все синие рёбра нумеруются произвольным образом. То же делается и для красных рёбер.

Построим теперь $\mathcal{L}'_k$ — назначение допустимых цветов рёбер графа $G_{i,j,k}$. Пусть $m = \min\limits_{e\in E(C(i,j))} \min\{x \mid x \in L(e)\}$ и $M = \max\limits_{e\in E(C(i,j))} \max\{x \mid x \in L(e)\}$. Пусть e — ребро графа $G_{i,j,k}$, окрашенное в белый или синий цвет. Для этого ребра в графе $C(i,j)$ имеется ребро e' с тем же номером и цветом. Множество $L(e')$ в $\mathcal{L}'_k$ получается домножением всех элементов из $L(e)$ в $\mathcal{L}$ на $(ki+j)m$. Множества разрешённых цветов неокрашенных рёбер графа $G_{i,j,k}$ одноэлементны, причём соответствующие цвета — произвольные различные натуральные числа из множества $\overline{1, ki+j-1}$. Множество $L(e)$ состоит из одного элемента $sM+1$, если e — красное ребро с номером s.

Легко видеть, что $\mathcal{L}$-ранжирование рёбер графа $C(i,j)$ существует тогда и только тогда, когда при любом $k \geqslant 3$ существует $\mathcal{L}'_k$-ранжирование рёбер графа $G_{i,j,k}$. Вместе с тем, при фиксированном k длина входа задачи РСР для пары $(G_{i,j,k}, \mathcal{L}'_k)$ ограничена сверху полиномом от длины входа задачи РСР для пары $(C(i,j), \mathcal{L})$. Таким образом, при любом фиксированном $k \geqslant 3$ задача РСР в классе графов $\{C(i,j) \mid i = 1,2,\ldots,\ j = 1,2,\ldots\}$ полиномиально сводима к той же задаче в классе $\mathcal{X}_{k-2} = \{G_{i,j,k} \mid i = 1,2,\ldots,\ j = 1,2,\ldots\}$. Поэтому при любом натуральном k задача РСР NP-полна в классе $\mathcal{X}_k$.

Рассмотрим класс $\mathcal{Y}_k$ — множество графов, являющихся порождёнными подграфами в графах из $\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Ясно, что при любом k класс графов $\mathcal{Y}_k$ является РСР-сложным, причём $\mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i = \widehat{\mathcal{T}}$. Отсюда следует, что $\widehat{\mathcal{T}}$ — РСР-предельный класс. Лемма 3 доказана.

Рассуждая, как в доказательстве леммы 3, можно прийти к выводу о том, что класс $\widehat{\mathcal{D}}$ является РСР-предельным. Для доказательства граничности классов $\widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ докажем одно вспомогательное утверждение (лемма 4). Будем говорить, что класс графов является *poly-классом*, если любой его связный граф G с n вершинами имеет не более $p(n)$ подмножеств множества $V(G)$, порождающих в G связный подграф, где $p(n)$ — некоторый полином от n. Значение этого понятия состоит в том, что задачи о вершинном и о рёберном списковом ранжировании полиномиально разрешимы для графов из любого *poly*-класса. Для первой задачи этот факт доказан в [8, теорема 2]. Там же отмечено, что аналогичные рассуждения для рёберного варианта задачи о списковом ранжировании приводят к тому же результату. Поэтому справедлива

Теорема 4. *Для графов из произвольного poly-класса задача* PCP *полиномиально разрешима.*

В графе любую вершину степени не выше 2 назовём *второстепенной*, а остальные вершины — *основными.*

Лемма 4. *При любых фиксированных d и k множество графов со степенями вершин не более d, имеющих не более k основных вершин, является poly-классом.*

Доказательство. Рассмотрим связный граф G с n вершинами степени не более d, имеющий не более k основных вершин. Понятно, что для каждой пары основных вершин (не обязательно различных) существует не более d путей (не обязательно простых), соединяющих эти две вершины и не содержащих других основных вершин. Рассмотрим произвольное подмножество V' множества всех основных вершин графа G. Всего подмножеств этого множества не более 2^k. Обозначим через $\mathcal{G}(V')$ совокупность связных порождённых подграфов графа G, множество основных вершин которых совпадает с V'. Если $|V'| = 0$, то $|\mathcal{G}(V')|$ состоит либо из простых путей и одного простого цикла (если G — простой цикл), либо только из простых путей (если G не простой цикл). Легко проверить, что в этом случае $|\mathcal{G}(V')| \leqslant n^3$.

Далее всегда будем предполагать, что множество V' не является пустым. Совокупность минимальных (по отношению «быть порождённым подграфом») элементов из $\mathcal{G}(V')$ обозначим через $\mathcal{G}^*(V')$. Заметим, что каждая второстепенная вершина любого графа из $\mathcal{G}^*(V')$ принадлежит ровно одному его пути, который соединяет две вершины из V' и не содержит других вершин из V'.

Оценим мощность множества $\mathcal{G}^*(V')$. Понятно, что граф из $\mathcal{G}^*(V')$ однозначно определяется множеством своих путей, соединяющих пары вершин из V' и не содержащих других вершин из V'. Поэтому общее число графов из $\mathcal{G}^*(V')$ не превосходит числа таких путей, а число таких путей не превосходит $d\frac{|V'|(|V'|+1)}{2}$.

Теперь оценим мощность множества $\mathcal{G}^*(V')$. Очевидно, что каждый граф из $\mathcal{G}(V')$ получается путём отождествлений концов некоторых путей с частью вершин из V' в некотором графе, принадлежащем $\mathcal{G}^*(V')$. С каждой вершиной из V' может отождествляться не более d путей. Длина каждого пути не более n, поэтому

$$|\mathcal{G}(V')| \leqslant n^{d|V'|}|\mathcal{G}^*(V')| \leqslant d\frac{|V'|(|V'|+1)}{2}n^{d|V'|}.$$

Наконец, оценим общее число связных порождённых подграфов графа G. Из оценок, полученных в предыдущем абзаце, следует, что общее число таких подграфов G не превосходит $2^k \max\left\{n^3, d^{\frac{k(k+1)}{2}} n^{dk}\right\}$. Таким образом, при фиксированных d и k число связных порождённых подграфов в графах из рассматриваемого класса ограничено сверху некоторым полиномом от числа вершин. Лемма 4 доказана.

При доказательстве граничности классов $\widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ используется критерий граничности [1].

Теорема 5. Π-*предельный класс* $\mathcal{A}$ *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathcal{A}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathcal{X}_G \subseteq \mathrm{Forb}(\mathcal{A})$, *что класс* $\mathrm{Free}(\mathcal{X}_G \cup \{G\})$ Π-*прост.*

Сферой $S(x,r)$ в графе G с центром в вершине x и радиуса r назовём множество вершин G, отстоящих от x в точности на расстояние r. *Шаром* $B(x,r)$ (в некотором графе G) с центром в вершине x и радиуса r назовём множество вершин графа G, отстоящих от x на расстояние не более r. Легко проверить, что если все степени графа G не превосходят d, то

$$|B(x,r)| \leqslant \frac{d^{r+1}-1}{d-1}.$$

Отсюда, в частности, следует, что произвольный связный граф, степени всех вершин которого не превосходят d, имеющий радиус не более k, содержит не более $\frac{d^{k+1}-1}{d-1}$ вершин.

Теорема 6. *Класс* $\widehat{\mathcal{T}}$ *является* PCP-*граничным.*

Доказательство. Согласно лемме 3 класс $\widehat{\mathcal{T}}$ предельный для задачи о рёберном списковом ранжировании. Покажем, что он граничный.

Пусть G — произвольный граф из класса $\widehat{\mathcal{T}}$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех графов, не принадлежащих классу $\widehat{\mathcal{T}}$ и имеющих не более чем $\frac{3^{2|V(G)|+6}-1}{2}$ вершин. Выделим среди них принадлежащие множеству $\mathrm{Forb}(\widehat{\mathcal{T}})$. Данное множество графов обозначим через $\mathcal{M}^*$. Очевидно, что множество $\mathcal{M}^*$ конечно. Покажем, что класс $\mathrm{Free}(\mathcal{M}^* \cup \{G\})$ действительно PCP-прост. Для этого докажем, что каждый связный граф из этого класса имеет не более чем $\frac{(|V(G)|+1)(3^{2|V(G)+6}-1)}{2}$ основных вершин.

Предположим противное. Тогда найдётся связный граф $H \in \mathrm{Free}(\mathcal{M}^* \cup \{G\})$ с не менее чем $\frac{(|V(G)|+1)(3^{2|V(G)+6}-1)}{2}+1$ основных вершин. Очевидно, что графы $K_{1,4}$ и C_3 принадлежат множеству $\mathcal{M}^*$. Поэтому степень любой вершины графа H не превосходит 3. Рассмотрим множество основных вершин графа H. Для каждой основной вершины x графа H

рассмотрим шар $B(x, 2|V(G)| + 5)$. Поскольку степень вершины x равна 3, выполнено неравенство

$$|B(x, 2|V(G)| + 5)| \leqslant \frac{3^{2|V(G)|+6} - 1}{2}.$$

Отсюда следует, что все подмножества шара $B(x, 2|V(G)|+5)$ порождают в графе H подграфы, принадлежащие классу $\widehat{\mathcal{T}}$. Вместе с тем, в графе H существуют такие основные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{|V(G)|+2}$, что никакие две из них не принадлежат одному и тому же шару из

$$\{B(x_1, 2|V(G)| + 5), B(x_2, 2|V(G)| + 5), \ldots, B(x_{|V(G)|+2}, 2|V(G)| + 5)\}.$$

Это следует из сделанного предположения о том, что H содержит не менее чем $\frac{(|V(G)|+1)(3^{2|V(G)|+6}-1)}{2} + 1$ вершин.

Ясно, что шары

$$B(x_1, |V(G)| + 2),\ B(x_2, |V(G)| + 2), \ldots, B(x_{|V(G)|+2}, |V(G)| + 2)$$

попарно не пересекаются и не существует пары смежных вершин графа H, принадлежащих двум разным таким шарам. Покажем, что среди $x_1, x_2, \ldots, x_{|V(G)|+2}$ нет таких основных вершин x'_1, x'_2, x'_3, что сферы $S(x'_1, |V(G)|+2)$, $S(x'_2, |V(G)|+2)$, $S(x'_3, |V(G)|+2)$ содержат не более чем по одному элементу. Предположим, что такие вершины x'_1, x'_2, x'_3 существуют. Рассмотрим пути P_1 и P_2, соединяющие вершины x'_1, x'_2 и x'_1, x'_3 соответственно. Занумеруем в порядке следования вершины этих путей, начиная от вершины x'_1. Среди вершин графа H, принадлежащих пересечению P_1 и P_2 и не принадлежащих множеству

$$B(x'_1, |V(G)| + 1) \cup B(x'_2, |V(G)| + 1) \cup B(x'_3, |V(G)| + 1)$$

(множество вершин с такими свойствами обязательно непусто), рассмотрим вершину y, имеющую в пути P_1 наибольший номер. Степень вершины y равна 3. Шар $B(y, 2) \subset B(y, 2|V(G)| + 5)$ в графе H порождает некоторый подграф H'. Подграф H' должен принадлежать классу $\widehat{\mathcal{T}}$. Поэтому он содержит цикл C_4, которому принадлежат ровно две вершины степени 3, одной из которых является вершина y. Другая такая вершина z тоже принадлежит пересечению P_1 и P_2. Но тогда H' обязательно содержит вершину $u \in V(P_1) \cap V(P_2)$,

$$u \notin B(x'_1, |V(G)| + 1) \cup B(x'_2, |V(G)| + 1) \cup B(x'_3, |V(G)| + 1)$$

(u смежна либо с y, либо с z), номер которой в пути P_1 больше, чем номер у вершины y. Получаем противоречие с выбором y. Значит, предположение неверно.

Итак, существуют такие основные вершины $y_1, y_2, \ldots, y_{|V(G)|}$, что шары $B(y_1, |V(G)|+2), B(y_2, |V(G)|+2), \ldots, B(y_{|V(G)|}, |V(G)|+2)$ попарно не пересекаются и каждая из сфер

$$S(y_1, |V(G)|+2),\ S(y_2, |V(G)|+2), \ldots,\ S(y_{|V(G)|}, |V(G)|+2)$$

содержит не менее чем 2 вершины. Но тогда некоторое подмножество множества вершин

$$B(y_1, |V(G)|+2) \cup B(y_2, |V(G)|+2) \cup \ldots \cup B(y_{|V(G)|}, |V(G)|+2)$$

заведомо порождает в графе H подграф G. Это следует из того, что для каждой компоненты графа G найдется такой шар из

$$\{B(y_1, |V(G)|+2), B(y_2, |V(G)|+2), \ldots, B(y_{|V(G)|}, |V(G)|+2)\},$$

для которого часть его вершин порождают в H данную компоненту. Получаем противоречие с предположением о числе основных вершин в графе H.

Итак, из результатов предыдущего абзаца и леммы 4 следует, что класс $\mathrm{Free}(\mathcal{M}^* \cup \{G\})$ является *poly*-классом. А из теоремы 4 следует, что данный класс PCP-прост. Поэтому по критерию граничности (теорема 5) класс $\widehat{\mathcal{T}}$ PCP-граничный. Теорема 6 доказана.

Класс $\widehat{\mathcal{D}}$ тоже PCP-граничный. Это можно показать, рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 6.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 5. *Пусть G — произвольный граф, не содержащий подграфа K_3, x — вершина графа G степени не менее 3 и $S(x, i+2)$ — непустая сфера в графе G. Тогда подграф G, порождённый шаром $B(x, i+2)$, содержит $T(1,1,i)$ в качестве порождённого подграфа.*

Доказательство. Рассмотрим вершину x, её окрестность $S(x,1)$ и произвольный путь P, соединяющий x и $y \in S(x, i+2)$. Занумеруем вершины числами от 1 до $i+3$ в порядке их следования в пути P. Ясно, что никакая вершина окрестности $S(x,1)$ не может быть смежна ни с какой вершиной пути P с номером 4 и более (иначе расстояние между x и y меньше $i+2$). Также понятно, что никакая вершина окрестности не может быть смежна с вершиной пути P с номером 2 (так как иначе образовался бы треугольник, что невозможно). Таким образом, если нет вершин из $S(x,1)$, смежных с вершиной пути P с номером 3, то любые две вершины из $S(x,1)$ и вершины пути P, кроме последних двух, порождают подграф $T(1,1,i)$. С другой стороны, если такая вершина существует, то она и все вершины пути P, кроме первых двух, порождают подграф $T(1,1,i)$. Лемма 5 доказана.

По аналогии с доказательством леммы можно доказать справедливость следующего утверждения. Если в графе $G \in \mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$ для некоторой вершины x, принадлежащей хотя бы одному треугольнику, сфера $S(x,i+2)$ непуста, то подграф G, порождённый шаром $B(x,i+2)$, содержит $D(0,0,i)$ в качестве порождённого подграфа.

Обозначим через $R(n_1,n_2)$ *число Рамсея*, т. е. наименьшее количество вершин в графе, обязательно содержащем либо подграф $\overline{K}_{n_1}$, либо подграф K_{n_2}.

Лемма 6. *Связный граф из* $\mathrm{Free}(\{K_3, K_{1,i}, jT_{1,1,j}\})$ *при любых фиксированных* i *и* j *имеет не более чем* $\frac{(j-1)([R(i,2)-1]^{2j+8}-1)}{R(i,2)-2}$ *основных вершин.*

Доказательство. Предположим, что $G \in \mathrm{Free}(\{K_3, K_{1,i},\ jT_{1,1,j}\})$ имеет не менее $\frac{(j-1)([R(i,2)-1]^{2j+8}-1)}{R(i,2)-2}+1$ основных вершин. Заметим, что окрестность каждой вершины графа G порождает граф без K_2 и $\overline{K}_i$, поэтому степень каждой вершины G не превосходит $R(i,2)-1$. Любой шар радиуса $2j+7$ в графе G содержит не более чем $\frac{[R(i,2)-1]^{2j+8}-1}{R(i,2)-2}$ вершин. Поэтому существуют такие основные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_j \in V(G)$, что каждая из них принадлежит ровно одному шару из

$$\{B(x_1,2j+7), B(x_2,2j+7), \ldots, B(x_j,2j+7)\}.$$

Отсюда следует, что шары $B(x_1,j+3),\ B(x_2,j+3),\ldots,B(x_j,j+3)$ попарно не пересекаются. Поэтому нет таких вершин $y_1 \in B(x_{i_1},j+2)$ и $y_2 \in B(x_{i_2},j+2)$ $(i_1 \neq i_2)$, что $(y_1,y_2) \in E(G)$. Некоторые вершины каждого из шаров $B(x_1,j+2),\ B(x_2,j+2),\ldots,B(x_j,j+2)$ порождают подграф $T(1,1,j)$ (лемма 5), поэтому некоторое подмножество множества $\bigcup\limits_{k=1}^{j} B(x_k,j+2)$ порождает в графе G подграф $jT_{1,1,j}$. Лемма 6 доказана.

По аналогии с доказательством леммы 6 можно показать, что при любых фиксированных i и j каждый связный граф из $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, K_i, jD_{0,0,j}\})$ имеет не более чем $\frac{(j-1)([R(3,i-1)-1]^{2j+8}-1)}{R(3,i-1)-2}$ основных вершин.

Лемма 7 [12, утверждение 9.4.1]. *Для любого натурального r существует натуральное n_0 такое, что любой связный граф с не менее $n \geqslant n_0$ вершинами содержит либо K_r, либо $K_{1,r}$, либо P_r в качестве порождённого подграфа.*

Из леммы 7 следует, что при любых p, q, r класс $\mathrm{Free}(\{K_{1,p}, K_q, P_r\})$ является PCP-простым.

Лемма 8. *Классы* $\mathrm{Free}(\{K_3, K_{1,i}, jT(1,1,j)\})$ *и* $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, K_i, jD(0,0,j)\})$ PCP-*просты при любых фиксированных* i *и* j.

Доказательство. Для любых i и j существует такая константа $C_{i,j}$, что любые два связных графа из классов $\mathrm{Free}(\{K_3, K_{1,i}, jT(1,1,j)\})$ и $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, K_i, jD(0,0,j)\})$ имеют степени всех вершин не более чем $C_{i,j}$ и содержат не более чем $C_{i,j}$ основных вершин. Отсюда и из леммы 4 следует, что оба эти класса PCP-просты. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Класс* $\mathrm{Free}(\{K_3, K_{2,i}, T(1,1,2) \oplus iK_1\})$ PCP-*прост для любого фиксированного* $i \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть граф $G \in \mathrm{Free}(\{K_3, K_{2,i}, T(1,1,2) \oplus iK_1\})$ связный. Очевидно, что окрестность любой его вершины порождает в G пустой граф. Удалим все листья из графа G. Получившийся граф обозначим через H. Ясно, что H связный. Покажем, что степени всех вершин графа H не превосходят $(i-1)(R(5(i-1)(i+2)+2,3))-1$. Предположим противное. Тогда существует вершина $x \in V(H)$, имеющая степень не менее чем $(i-1)(R(5(i-1)(i+2)+2,3))$. Пусть V_1 — окрестность вершины x в графе H. Тогда

$$|V_1| \geqslant (i-1)(R(5(i-1)(i+2)+2,3)) \geqslant R(22,3)(i-1) \geqslant i+2.$$

Никакие две вершины из V_1 не смежны и каждая вершина из этого множества имеет в графе G хотя бы одну смежную вершину. Более того, окрестности любых двух несмежных вершин графа H пересекаются не более чем по $i-1$ элементам (в противном случае граф G содержит порождённый подграф $K_{2,i}$). Пусть V_2 — всевозможные вершины графа G, смежные хотя бы с одной вершиной из V_1 и отличные от x. Очевидно, что никакая вершина из V_2 не может быть смежна с более чем $i-1$ вершинами из V_1. Поэтому $|V_2| \geqslant R(5(i-1)(i+2)+2,3)$. Поскольку $R(5(i-1)(i+2)+2,3) > i$ (пустой граф с i вершинами не содержит ни K_3, ни $\overline{K}_{5(i-1)(i+2)+2}$), никакие две вершины из V_1 не могут быть смежными сразу со всеми вершинами из V_2 (в противном случае G содержит порождённый подграф $K_{2,i}$).

Покажем, что каждая вершина из V_1 (кроме, быть может, одной) в графе H имеет степень не больше чем $5i-5$. Предположим противное. Тогда существует вершина $y \in V_1$ такая, что в H она несмежна хотя бы с одной вершиной $z \in V_2$ и её степень в этом графе не менее $5i-4$. Пусть y' — произвольная вершина из V_1, смежная с z. Поскольку $|V_1| \geqslant i+2$ и z смежна с не более $i-1$ вершинами из V_1, то $V_1 \setminus \{y\}$ содержит несмежные с z вершины y'_1 и y'_2. Вместе с тем, пересечения окрестностей вершин y и y'_1, y и y'_2, y и z, y и y' содержат не более $i-1$ элементов. Поэтому окрестность y содержит i вершин, не смежных ни с y'_1, ни с y'_2, ни с z, ни с y'. Но тогда эти i вершин вместе с z, y', x, y'_1, y'_2 порождают в графе G подграф $T(1,1,2) \oplus iK_1$; противоречие.

Из принадлежности графа G классу $\mathrm{Free}(\{K_3\})$ следует, что подграф графа G, порождаемый множеством вершин V_2, содержит независимое множество V'_2 мощности не менее чем $5(i-1)(i+2)+2$. Рассмотрим двудольный подграф графа H, порождённый множеством вершин $V_1 \cup V'_2$. Поскольку степень каждой его вершины (за исключением, быть может, одной) из доли V_1 не менее чем $5(i-1)$, этот граф содержит порождённое паросочетание мощности $i+3$. Но тогда вершина x и некоторые вершины этого паросочетания обязательно порождают в графе H подграф $T(1,1,2) \oplus iK_1$; противоречие. Значит, предположение о степенях вершин графа H неверно.

Если граф H не содержит вершин степени 3 и выше, то H — простой путь или цикл. Легко проверить, что в этом случае G содержит не более чем $2i+5$ основных вершин. Если в графе H есть хотя бы одна вершина x степени не менее 3, то каждая вершина графа H отстоит от x на расстояние не более чем $2i+5$ (в противном случае сфера $S(x, 2i+6)$ непуста, по лемме 5 граф H содержит порождённый подграф $T(1,1,2i+4)$, а следовательно, граф G содержит $T(1,1,2) \oplus iK_1$ в качестве порождённого подграфа). Поэтому радиус графа H не превосходит $2i+5$ и H содержит не более чем $\frac{d^{2i+6}-1}{d-1}$ вершин, где $d = (i-1)(R(5(i-1)(i+2)+2, 3)) - 1$.

Итак, граф G содержит либо не более чем $\frac{d^{2i+6}-1}{d-1}$ нелистовых вершин, либо не более чем $2i+5$ основных вершин. Известно [10], что для любого фиксированного C задача РСР полиномиально разрешима в классе графов, имеющих не более чем C нелистовых вершин. Отсюда и из леммы 4 следует справедливость утверждения. Лемма 9 доказана.

4. Полная характеризация 3-определённых PCP-простых классов и смежные с ней результаты

Один из способов преодоления «труднорешаемости» задач на графах в семействе наследственных классов графов состоит в рассмотрении классов графов, определяемых небольшим количеством запрещённых порождённых подграфов. Для такой суженной совокупности классов графов можно надеяться на получение критериев эффективной разрешимости тех или иных задач. В некоторых случаях такие условия действительно удаётся выявить. Так, в [2] проведена полная классификация классов графов вида $\mathrm{Free}(\{G\})$ по сложности решения задачи о доминирующем множестве. В [13] полностью выявлены случаи полиномиальной разрешимости задачи о хроматическом числе для совокупности классов графов того же вида.

Результаты работ [2, 13] можно сформулировать в несколько иных терминах. Речь идёт о рассмотрении частичного порядка R_k на всевозможных наборах из k графов $(G_1, G_2, \ldots, G_k)$, определяемого следующим образом. Набор $(H_1, H_2, \ldots, H_k)$ находится в отношении R_k с набором $(G_1, G_2, \ldots, G_k)$, если для любого $i \in \overline{1, k}$ граф H_i является порождённым подграфом графа G_i. Подход к описанию границы состоит в выявлении тех минимальных (максимальных) относительно R_k наборов, для которых рассматриваемая задача NP-полна (полиномиально разрешима). Это оказывается особенно полезным, когда таких «минимумов» («максимумов») конечное число, поскольку сразу же приводит к возможности полиномиального распознавания для класса $\mathcal{X}$ вычислительного статуса задачи Π по множеству $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$. Такая идея рассмотрена в [14], где для задачи о доминирующем множестве и $k = 2$ показано существование конечного числа «минимумов». Конечное число «минимумов» для заданного k означает, что для полной классификации тех классов $\mathcal{X}$, у которых $|\mathrm{Forb}(\mathcal{X})| \leqslant k$, достаточно знать конечное множество Π-граничных классов. Однако, в [14] не выявлено ни множества необходимых «минимумов», ни множества соответствующих граничных классов. Для задачи PCP удаётся полностью охарактеризовать случаи полиномиальной разрешимости в совокупности классов графов $\{\mathcal{X} \mid |\mathrm{Forb}(\mathcal{X})| \leqslant 3\}$. Этот результат является одним из основных в настоящей работе.

Теорема 7. *Класс* $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S}), |\mathcal{S}| \leqslant 3$, PCP-*простой тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия*: $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{C}lique, \mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{S}tar, \mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{C}amomile, \mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{BC}, \mathcal{X} \not\supseteq \widetilde{\mathcal{T}}, \mathcal{X} \not\supseteq \widetilde{\mathcal{D}}, \mathcal{X} \not\supseteq \widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{X} \not\supseteq \widehat{\mathcal{D}}$.

Доказательство. Поскольку классы $\mathcal{C}lique, \mathcal{BC}, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile, \widetilde{\mathcal{T}}$,

$\widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}$ PCP-граничные, согласно теореме 3 необходимым условием PCP-простоты класса $\mathcal{X}$ является невыполнение ни одного из включений $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{C}lique, \mathcal{X} \supseteq \mathcal{B}C, \mathcal{X} \supseteq \mathcal{S}tar, \mathcal{X} \supseteq \mathcal{C}amomile, \mathcal{X} \supseteq \widetilde{\mathcal{T}}, \mathcal{X} \supseteq \widetilde{\mathcal{D}}, \mathcal{X} \supseteq \widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{X} \supseteq \widehat{\mathcal{D}}$.

Теперь предположим, что ни одно из данных включений не выполняется. Докажем полиномиальную разрешимость задачи PCP в $\mathcal{X}$. Поскольку $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{C}lique$, множество $\mathcal{S}$ содержит клику K_i. Можно считать, что $i \geqslant 3$ (так как в противном случае $\mathcal{X}$ состоит только из пустых графов). Множество $\mathcal{S}$ также содержит граф $G \in \mathcal{B}C$. Можно считать, что G отличен от графов K_2 и $K_{1,2}$ (если $G = K_{1,2}$, то $\mathcal{X}$ состоит только из графов, каждая компонента связности которых является кликой размера не более чем $i-1$). Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Выполнено неравенство $i > 3$. Если $G \in \{K_{2,2}, K_{2,3}, K_{2,4}, \ldots\}$, то в $\mathcal{S}$ обязательно существует третий граф

$$H \in \mathcal{S}tar \cap \mathcal{C}amomile \cap \widetilde{\mathcal{T}} \cap \widetilde{\mathcal{D}} \cap \widehat{\mathcal{D}}.$$

Легко проверить, что H — порождённый подграф пути P_3. Но тогда класс $\mathcal{X}$ состоит из графов, каждая компонента связности которых является кликой размера не более чем $i-1$. Если $G \in \{K_{1,4}, K_{1,5}, \ldots\}$, то третий граф H должен принадлежать множеству $\widetilde{\mathcal{T}} \cap \widetilde{\mathcal{D}} \cap \widehat{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{D}}$. Но тогда H — порождённый подграф некоторого простого пути. Отсюда и из леммы 7 следует, что класс $\mathcal{X}$ PCP-прост. Наконец, если $G = K_{1,3}$, то $H \in \widetilde{\mathcal{D}} \cap \widehat{\mathcal{D}}$. Поэтому H — порождённый подграф графа $iD(0,0,i)$ при некотором i. Из леммы 8 следует, что соответствующий класс $\mathcal{X}$ прост.

Случай 2. Выполнено равенство $i = 3$. Если $G = K_{1,3}$, то $\mathcal{X}$ состоит из графов, каждая компонента связности которых является либо простым путём, либо простым циклом. В этом случае ни один граф из $\mathcal{X}$ не содержит основных вершин. Отсюда, из леммы 4 и теоремы 4 следует, что $\mathcal{X}$ PCP-простой. Если $G \in \{K_{2,2}, K_{2,3}, K_{2,4}, \ldots\}$, то множество $\mathcal{S}$ содержит третий граф H, который принадлежит множеству $\mathcal{S}tar \cap \widetilde{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}$. Легко проверить, что H является порождённым подграфом графа $T(1,1,2) \oplus iK_1$ при некотором i. Из леммы 9 следует PCP-простота класса $\mathcal{X}$. Если $G \in \{K_{1,4}, K_{1,5}, \ldots\}$, то $H \in \widetilde{\mathcal{T}} \cap \widehat{\mathcal{T}}$. Поэтому H — порождённый подграф простого пути. Из леммы 7 следует, что $\mathcal{X}$ PCP-простой.

Таким образом, если одновременно выполняются условия $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{C}lique$, $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{B}C, \mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{S}tar, \mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{C}amomile, \mathcal{X} \not\supseteq \widetilde{\mathcal{T}}, \mathcal{X} \not\supseteq \widetilde{\mathcal{D}}, \mathcal{X} \not\supseteq \widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{X} \not\supseteq \widehat{\mathcal{D}}$, то класс $\mathcal{X}$ является PCP-простым. Теорема 7 доказана.

Легко проверить, что задача распознавания принадлежности графа каждому из классов $\mathcal{C}lique, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile, \mathcal{BC}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}$ полиномиально разрешима. Поэтому для любого множества графов $\mathcal{S}$, $|\mathcal{S}| \leqslant 3$, можно за полиномиальное время определить вычислительный статус задачи PCP в классе $\mathrm{Free}(\mathcal{S})$.

При помощи теоремы 7 легко показать, что $\mathcal{BC}$ является единственным 3-определённым минимальным PCP-сложным классом. Действительно, если существует 3-определённый минимальный PCP-сложный класс $\mathcal{X} \neq \mathcal{BC}$, то по теореме 7 должен существовать такой PCP-граничный класс $\mathcal{B} \in \{\mathcal{C}lique, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}\}$, что $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{B}$ не является 3-определённым классом, существует граф $G \in \mathcal{X}$, для которого $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{G\}) \supseteq \mathcal{B}$. Отсюда и из теоремы 3 следует, что класс $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$ PCP-сложный. Получаем противоречие с минимальностью $\mathcal{X}$.

По аналогии с доказательством леммы 1 [14] можно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Если существуют такие* Π-*граничные классы* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_{l_1}$, *что*

(i) *ни один из классов* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_{l_1}$ *не содержит бесконечных антицепей по отношению* R_1;

(ii) *любой класс* $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ *является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда для некоторого* $i = i(\mathcal{X})$ *справедливо включение* $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{B}_i$,

то существуют такие Π-*граничные классы* $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2, \ldots, \mathcal{B}'_{l_2}$, *что любой класс* $\mathcal{Y} = \mathrm{Free}(\{G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1}\})$ *является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда для некоторого* $j = j(\mathcal{Y})$ *справедливо включение* $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{B}'_j$.

Покажем, что для задачи PCP и $k = 3$ классы $\mathcal{C}lique, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile, \mathcal{BC}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 8. Для этого достаточно показать, что каждый из этих восьми классов не содержит антицепей по отношению R_1. Все графы из класса $\mathcal{C}lique$ образуют цепь по отношению R_1. Пусть $\mathcal{X}$ — совокупность графов, являющихся подграфами (не обязательно порождёнными) в графах из $\mathcal{S}tar \cup \mathcal{C}amomile \cup \mathcal{BC} \cup \widetilde{\mathcal{T}} \cup \widetilde{\mathcal{D}} \cup \widehat{\mathcal{T}} \cup \widehat{\mathcal{D}}$. Ясно, что $\mathcal{X}$ замкнут как относительно удаления вершин, так и относительно удаления рёбер. В [11] показано, что замкнутый относительно удаления вершин и рёбер класс $\mathcal{Y}$ не содержит антицепей по отношению R_1 тогда и только тогда, когда существует такое $s = s(\mathcal{Y})$, что $\mathcal{Y} \subseteq \mathrm{Free}(\{C_s, C_{s+1}, \ldots) \cap \mathrm{Free}(B_s, B_{s+1}, \ldots\})$ (под графом B_s понимается результат соединения простым путём длины s двух вершин степени 2 в двух экземплярах графа P_3). Заметим, что при $s = 5$

это условие выполняется и для класса $\mathcal{X}$. Поскольку каждый из классов $\mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile, \mathcal{BC}, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}$ включается в класс $\mathcal{X}$, ни один из этих классов тоже не содержит бесконечных антицепей по отношению R_1.

Таким образом, для полной классификации 4-определённых классов графов по сложности решения задачи PCP достаточно конечного множества PCP-граничных классов. Отсюда также следует, что совокупность 4-определённых минимальных PCP-сложных классов конечна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 3–10.
2. **Коробицын Д. В.** О сложности определения числа доминирования в моногенных классах графов // Дискрет. математика. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 90–96.
3. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных классах графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 43–51.
4. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных элементах решетки наследственных классов графов // Мат. VII молодёж. научн. школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 18–23 мая 2009 г.), часть II. — М: Изд-во ИПМ РАН, 2009. — С. 12–17.
5. **Малышев Д. С.** Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т, 2009. — 113 с.
6. **Малышев Д. С.** Последовательные минимумы решётки наследственных классов графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. — 2010. — № 4(1). — С. 133–136.
7. **Малышев Д. С.** Минимальные сложные классы графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 1. — С. 70–76.
8. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Граничные классы для задач о списковом ранжировании относительно лесов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 1. — С. 70–76.
9. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 132. — P. 17–26.

10. **Dereniowski D.** The complexity of list ranking of trees // Ars Combin. — 2008. — Vol. 86. — P. 97–114.
11. **Ding G.** Subgraphs and well-quasi-ordering // J. Graph Theory. — 1992. — Vol. 16. — P. 489–502.
12. **Distel R.** Graph Theory. — New York: Springer-Verl., 2000. — 322 p.
13. **Kral D., Kratochvil J., Tuza T., Woeginger G.** Complexity of coloring of graphs without forbidden induced subgraphs // Graph-theoretic concepts in computer science. Proc. 27th Int. Workshop (Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001). — Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 2001. — P. 254–262. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2204.)
14. **Lozin V. V.** A decidability results for the dominating set problem // Theor. Comput. Sci. — 2011. — doi: 10.1016/j.tcs.2010.08.027.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
31 мая 2011 г.

Переработанный вариант —
2 ноября 2011 г.