ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2012. Том 19, № 2. С. 75–83

УДК 519.95

ПОСТРОЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ НАПРАВЛЕНИЙ РЁБЕР В БУЛЕВОМ n-МЕРНОМ КУБЕ *)

В. Н. Потапов

Аннотация. *Спектром гамильтонова цикла* (*кода Грея*) в булевом n-мерном кубе называется набор $a = (a_1, \dots, a_n)$, где a_i — число рёбер i-го направления в цикле. Известны необходимые условия существования кода Грея со спектром a: числа a_i чётные и для любого $k = 1, \dots, n$ сумма k произвольных компонент набора a не меньше чем 2^k. Доказано существование такой размерности N, что если необходимые условия на спектр являются достаточными для существования гамильтонова цикла с таким спектром в булевом N-мерном кубе, то сформулированные выше условия являются достаточными и для всех размерностей n.

Ключевые слова: гамильтонов цикл, совершенное паросочетание, булев куб, код Грея.

Введение

В 4-м томе «Искусства программирования» [8] в разделе, посвящённом кодам Грея (гамильтоновым циклам в булевом n-кубе), Кнут указал на три нерешённые на момент издания книги задачи. Первая из них состоит в оценке числа различных кодов Грея в булевом n-кубе. Порядок логарифма этого числа найден в [1] и асимптотика логарифма этого числа (при $n \to \infty$) определена в [6]. Во второй задаче предложено ответить на вопрос, ранее поставленный Креверасом [9]: *каждое ли совершенное паросочетание в булевом n-кубе можно дополнить до гамильтонова цикла*? Положительный ответ на этот вопрос получен Финком [7]. В случае, когда паросочетание содержит рёбра малого числа направлений, дополняемость совершенного паросочетания до гамильтонова цикла доказана

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00997) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0362).

в [1]. В третьей задаче требовалось выяснить, являются ли необходимые условия (сформулированные в аннотации) на спектр гамильтонова цикла достаточными для существования кода Грея с таким спектром. В данной статье предложено асимптотическое решение последней задачи. А именно, если необходимые условия являются достаточными в булевом n-кубе для некоторого достаточно большого n, то они являются достаточными для любого n. Этот результат анонсирован в [4]. Отметим, что известно несколько способов построения кодов Грея с различными свойствами, в частности, в [5, 10] построены гамильтоновы циклы с максимально равномерным (для фиксированной размерности) спектром.

1. Определения

Булевым n-кубом называется множество Q_n двоичных слов длины n, а также граф GQ_n, вершинами которого являются элементы Q_n и пара вершин соединена ребром, если и только если соответствующие слова различаются ровно в одной позиции. Каждое ребро $\{u, v\}$ в графе GQ_n имеет направление $i \in \{1, \dots, n\}$ — номер позиции, в которой различаются слова u и v. Множество P рёбер графа G называется *совершенным паросочетанием*, если каждая вершина графа G инцидентна ровно одному ребру из множества P. *Гамильтоновым циклом* в графе G называется цикл, проходящий через все вершины графа по одному разу. В двудольном графе, в частности, в графе GQ_n, рёбра каждого гамильтонова цикла разделяются на два совершенных паросочетания. *Спектром гамильтонова цикла в булевом n-кубе* называется набор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, где a_i — число рёбер i-го направления в гамильтоновом цикле. Аналогичным образом определяется спектр совершенного паросочетания в GQ_n. Известно [2], что произвольный целочисленный набор $(a_1, \dots, a_n)$, удовлетворяющий условиям

1) a_i — неотрицательное чётное число для любого $i = 1, \dots, n$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 2^{n-1}$,

является спектром некоторого совершенного паросочетания в GQ_n. Эти условия являются не только достаточными, но и необходимыми [2]. Известны также необходимые условия того, что целочисленный набор $(a_1, \dots, a_n)$ — спектр некоторого гамильтонова цикла в GQ_n [8]:

$(*)$ a_i — неотрицательное чётное число для любого $i = 1, \dots, n$;

$(**)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 2^n$;

$(***)$ $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{\pi(i)} \geqslant 2^k$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и $k = 1, \dots, n-1$.

Условия $(*)$ и $(**)$ очевидны, а $(***)$ следует из связности цикла.

Без ограничения общности можно полагать, что спектр гамильтонова цикла упорядочен: $a_i \leqslant a_j$ при $i \leqslant j$. Тогда условие $(***)$ приобретает более простой вид: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \geqslant 2^k$ при $k \leqslant n$. Для упорядоченного спектра a определим неотрицательную функцию μ_a равенством $\mu_a(k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i - 2^k$.

Целочисленный набор будем называть *допустимым*, если он удовлетворяет указанным выше необходимым условиям $(*)$–$(***)$. Множество допустимых n-мерных наборов будем обозначать через $\mathbb{D}_n$. Очевидно, что любой гамильтонов цикл в GQ_n содержит рёбра всех направлений, в то время как совершенное паросочетание в GQ_n может содержать рёбра от одного до n направлений включительно. Паросочетание в GQ_n, содержащее рёбра всех n направлений, будем называть *паросочетанием полного ранга*. Гамильтоновы циклы, содержащие совершенные паросочетания полного ранга, будем называть *циклами, имеющими полный ранг*.

Утверждение 1. *Если для некоторого n любой допустимый целочисленный набор является спектром некоторого гамильтонова цикла в GQ_n, то это же верно при любых m, $2 \leqslant m \leqslant n$.*

Доказательство. Действительно, пусть $(a_1, \ldots, a_m)$ — некоторый допустимый набор, тогда набор $(a_1, \ldots, a_m, 2^m, \ldots, 2^{n-1})$ также допустим. При этом проекция гамильтонова цикла со спектром $(a_1, \ldots, a_m, 2^m, \ldots, 2^{n-1})$ на первые m направлений порождает гамильтонов цикл со спектром $(a_1, \ldots, a_m)$. Утверждение 1 доказано.

Каждому простому (в частности гамильтонову) циклу C в графе GQ_n можно поставить в соответствие циклическое *переходное слово* X в алфавите $\{1, \ldots, n\}$, в котором j-я буква x_j определяется как направление j-го ребра в цикле C. Через $S(X) = (s_1, \ldots, s_n)$ будем обозначать *набор состава* слова X по модулю 2, т. е. $s_i = 0$, если буква $i \in \{1, \ldots, n\}$ встречается в слове $S(X)$ чётное число раз, и $s_i = 1$ в противном случае.

Утверждение 2 [3]. *Циклическое слово X в алфавите $\{1, \ldots, n\}$ определяет простой цикл в графе GQ_n тогда и только тогда, когда $S(X) = \overline{0}$ и для любого его подслова $Y \neq X$ имеем $S(Y) \neq \overline{0}$.*

Отсюда немедленно получаем

Следствие 1. *Циклическое слово X в алфавите $\{1, \ldots, n\}$ определяет гамильтонов цикл в графе GQ_n тогда и только тогда, когда длина*

слова X равна 2^n, $S(X)=0$ и для любого его подслова $Y \neq X$ имеем $S(Y) \neq \overline{0}$.

2. Конструкция гамильтонова цикла

Цель статьи — доказательство того, что любой допустимый набор является спектром гамильтонова цикла в любом булевом n-кубе, если это верно для булева N-куба при некотором достаточно большом N. В доказательстве применяется конструкция гамильтонова цикла, использующая представление булева n-куба как декартова произведения кубов размерности k и $n-k$.

Рассмотрим некоторый гамильтонов цикл в GQ_k, состоящий из рёбер непересекающихся совершенных паросочетаний P_1 и P_2. Естественным образом вложим паросочетание P_1 в GQ_n. Поскольку каждой вершине из GQ_k в декартовом произведении $GQ_k \times GQ_{n-k}$ соответствует булев $(n-k)$-куб, каждому ребру из P_1 можно поставить в соответствие пару параллельных $(n-k)$-кубов, т. е. один $(n-k+1)$-куб. Заменим каждое ребро $v \in P_1$ гамильтоновым циклом H_v в $(n-k+1)$-кубе, проходящим через это ребро. Удалив P_1 из объединения P_2 и циклов H_v, $v \in P_1$, получим новый гамильтонов цикл в $GQ_k \times GQ_{n-k} = GQ_n$. Сформулируем описанную выше конструкцию в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть паросочетания в GQ_k со спектрами $(b_1,\ldots,b_k)$ и $(b'_1,\ \ldots,b'_k)$, составляют гамильтонов цикл и имеется 2^{k-1} гамильтоновых циклов в GQ_{n-k+1} со спектрами $\left(a^i_1,\ldots,a^i_{n-k},c^i\right)$, $i=1,\ldots,2^{k-1}$. Тогда в GQ_n имеется гамильтонов цикл со спектром $(d_1,\ldots,d_n)$, где $d_{k+j} = \sum\limits_{i=1}^{2^{k-1}} a^i_j$ при $j=1,\ldots,n-k$ и $d_j = b_j + \sum\limits_{p=s_j+1}^{s_{j+1}} (c^p-1)$ при $j=1,\ldots,k$, $s_j = \sum\limits_{p=1}^{j-1} b'_p$.*

Доказательство. Пусть $X = x_1y_1x_2\ldots x_{2^{k-1}}y_{2^{k-1}}$ — переходное слово гамильтонова цикла в GQ_k, где паросочетания, соответствующие словам $x_1x_2\ldots x_{2^{k-1}}$ и $y_1y_2\ldots y_{2^{k-1}}$, имеют спектры $(b_1,\ldots,b_k)$ и $(b'_1,\ldots,b'_k)$ соответственно. Обозначим через y_iZ^i переходное слово гамильтонова цикла в GQ_{n-k+1} в алфавите $\{k+1,\ldots,n,y_i\}$ со спектром $(a^i_1,\ldots,a^i_{n-k},c^i)$, $i=1,\ldots,2^{k-1}$, причём буква y_i встречается c^i-1 раз в слове Z^i.

Рассмотрим слово Z, полученное заменой в X букв y_i словами Z^i, т. е. $Z = x_1Z^1x_2Z^2\ldots x_{2^{k-1}}Z^{2^{k-1}}$. Покажем, что Z является переходным словом некоторого гамильтонова цикла в GQ_n. Рассмотрим произвольное подслово $W = U_ix_{i+1}Z^{i+1}\ldots Z^{j-1}x_jV_j$ слова Z, где U_i — суф-

фикс слова Z^i и V_j — префикс слова Z^j (префикс и суффикс могут быть пустыми). Если $i = j$, то $S(W) \neq \overline{0}$, поскольку W — подслово переходного слова $y_i Z^i$. Пусть $i < j$, без ограничения общности будем полагать, что $y_i = 1$, $y_j \in \{1, 2\}$. Рассмотрим случай, когда $y_j = 1$. Пусть $0 = S(W)_t = S(x_{i+1}y_{i+1}\dots x_j)_t = S(y_i x_{i+1} y_{i+1} \dots x_j)_t$ при любом $t = 2, \dots, k$. Поскольку всегда либо $S(x_{i+1}y_{i+1}\dots x_j)_1 = 0$, либо $S(y_i x_{i+1} y_{i+1} \dots x_j)_1 = 0$, приходим к противоречию с тем, что X — переходное слово гамильтонова цикла. Случай, когда $y_j = 2$, рассматривается аналогично. Нетрудно видеть, что $S(Z) = S(X) = \overline{0}$. Следовательно, для слова Z выполнены условия следствия 1 и Z является переходным словом гамильтонова цикла в GQ_n. Соответствующий слову Z гамильтонов цикл имеет требуемый спектр по построению. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Если паросочетание со спектром $(b'_1, \dots, b'_k)$ и хотя бы один из использованных в конструкции циклов в GQ_{n-k+1} имеют полный ранг, то в результате конструкции (лемма 1) можно получить гамильтонов цикл полного ранга.

3. Основной результат

Докажем две леммы о спектрах гамильтоновых циклов, которые можно построить посредством описанной выше конструкции.

Лемма 2. *Если любой допустимый целочисленный набор длины $n - k + 1$ является спектром гамильтонова цикла в GQ_{n-k+1} и имеется гамильтонов цикл со спектром $(b_1, \dots, b_k)$ в GQ_k, то любой допустимый целочисленный набор $(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ является спектром гамильтонова цикла в GQ_n.*

Доказательство. На множестве упорядоченных допустимых целочисленных наборов $A = \{a \in \mathbb{D}_n \mid a_i = b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ рассмотрим лексикографический порядок. Минимальный в этом порядке набор $(b_1, \dots, b_k, 2^k, \dots, 2^{n-1})$ является спектром гамильтонова цикла в GQ_n. Действительно, в приведённой выше конструкции достаточно выбрать $(2, 4 \dots, 2^{n-k}, 2)$ в качестве спектра $\left(a^i_1, \dots, a^i_{n-k}, c^i\right)$ для любого $i = 1, \dots, 2^{k-1}$. Предположим некоторые допустимые наборы из множества A не являются спектрами гамильтоновых циклов, построенных посредством конструкции из леммы 1, выберем из таких наборов лексикографически минимальный набор $d \in A$. Рассмотрим предыдущий в лексикографическом порядке набор $d' \in A$. Очевидно, что наборы d и d' отличаются в двух позициях $i, j \in \{k + 1, \dots, n\}$, $i < j$, причём $d'_i = d_i - 2$, $d'_j = d_j + 2$, $d'_j \geqslant d'_i + 4$. Тогда для спектра f одного из гамильтоно-

вых циклов в GQ_{n-k+1}, использованных при построении цикла со спектром d', верно неравенство $f_j - f_i \geqslant 4$ (или $f_j - f_i = 2$ в спектрах двух циклов). Очевидно, что если в целочисленном наборе f заменить f_i на f_i+2 и f_j на f_j-2, то новый набор f' также будет спектром гамильтонова цикла в GQ_{n-k+1} по условию леммы. При замене в конструкции из леммы 1 цикла со спектром f на цикл со спектром f' получим, что набор d является спектром гамильтонова цикла; противоречие. В случае, когда $f_j - f_i = 2$ в двух спектрах, нужно в каждом из них поменять количества рёбер направлений i и j местами и применить ту же конструкцию. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $4 \leqslant s < k < n-1$, любые допустимые целочисленные наборы длины $n-s+1$ являются спектрами гамильтоновых циклов,* (i) *для некоторого допустимого упорядоченного набора $b \in \mathbb{D}_n$ имеется допустимый набор, являющийся спектром гамильтонова цикла полного ранга $b' \in \mathbb{D}_s$, такой, что $b'_i \leqslant b_i$ при $i = 1, \ldots, s$ и справедливы неравенства* (ii) *$b_s \leqslant 2^{n-s-1}$ и* (iii) *$\sum\limits_{i=s+1}^{k} b_i \geqslant 2^k - 2^s$ при таких k, что $2^{k-s-1} \leqslant b_s$. Тогда набор b является спектром гамильтонова цикла.*

Доказательство. Пусть $d_i = b_i - b'_i$ при $i = 1, \ldots, s$ и $d = \sum\limits_{i=1}^{s} d_i$. Из доказательства леммы 2 следует, что целочисленный набор $(b'_1, \ldots, b'_s, 2^s, \ldots, 2^{n-1})$ является спектром гамильтонова цикла в GQ_n, построенного посредством описанной выше конструкции с $s = k$. Пусть m — наименьшее целое число такое, что $2^{m-s-1} > b_s$. Поскольку $d_i \leqslant b_s < 2^{m-s-1}$, набор $(2, \ldots, 2^{m-s-1}, 2^{m-s} - d_i, 2^{m-s+1}, \ldots, 2^{n-s}, 2 + d_i)$ является допустимым для любого $i = 1, \ldots, s$.

Теперь заменим в этой конструкции s гамильтоновых циклов (по одному на каждое направление) со спектром $(2, 4, \ldots, 2^{n-s}, 2)$ гамильтоновым циклом со спектром $(2, \ldots, 2^{m-s} - d_i, 2^{m-s+1}, \ldots, 2^{n-s}, 2+d_i)$ так, что в итоге получится цикл со спектром $(b_1, \ldots, b_s, 2^s, \ldots, 2^m - d, 2^{m+1}, \ldots, 2^{n-1})$. Рассмотрим теперь множество упорядоченных допустимых целочисленных наборов

$$A = \{a \in \mathbb{D}_n \mid a_i = b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ \text{спектр } a \text{ удовлетворяет условию (iii)}\}.$$

Выше доказано, что лексикографически наименьший спектр из A принадлежит гамильтонову циклу, построенному с помощью нашей конструкции (лемма 1). Предположим, что некоторые из наборов $a \in A$ не являются спектрами гамильтоновых циклов, которые могут быть полу-

чены посредством нашей конструкции. Тогда среди таких спектров имеется лексикографически наименьший. Аналогично доказательству леммы 2 приходим к противоречию. Лемма 3 доказана.

Утверждение 3. *Пусть* $2 \leqslant s \leqslant k \leqslant n$, $a \in \mathbb{D}_n$ *и* k *таково, что* $\sum\limits_{i=s+1}^{k} a_i < 2^k - 2^s$ *и* $2^{k-s-1} \leqslant a_s$. *Тогда* $\mu_a(s) - \mu_a(k) \geqslant 2$ *и* $k \leqslant 2s + \log \mu_a(s)$.

Доказательство. Поскольку $2^{k-s-1} \leqslant a_s \leqslant 2^{s-1} + \mu_a(s) \leqslant 2^{s-1}\mu_a(s)$, имеем $k \leqslant 2s + \log \mu_a(s)$. Если $\sum\limits_{i=s+1}^{k} a_i < 2^k - 2^s$, то $\sum\limits_{i=s+1}^{k} a_i \leqslant 2^k - 2^s - 2$. Тогда

$$\mu_a(k) = \sum_{i=1}^{k} a_i - 2^k = \sum_{i=1}^{s} a_i - 2^s + \sum_{i=s+1}^{k} a_i - 2^k + 2^s \leqslant \mu_a(s) - 2.$$

Утверждение 3 доказано.

Теорема 1. *Существует такое число* N, *что если любой допустимый целочисленный набор длины* N *является спектром некоторого гамильтонова цикла (полного ранга в случае, когда* $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i > 2^k$ *при любом* $k < N$*), то для любого целого* $n \geqslant 2$ *любой допустимый целочисленный набор длины* n *является спектром некоторого гамильтонова цикла в* GQ_n.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{D}_n$. Простым перебором упорядоченных допустимых наборов нетрудно установить, что $a_2 \geqslant 4$ и $a_4 \geqslant 6$ за исключением случаев, когда $a_1 = a_2 = 2$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4$. Гамильтонов цикл в GQ_4 с переходной последовательностью 1213414243212343 имеет спектр $(4,4,4,4)$. Существование гамильтонова цикла со спектром $a \in \mathbb{D}_n$ при $n \geqslant 5$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 4$ $(a_1 = a_2 = 2)$ следует из леммы 2.

Пусть $a_2 \geqslant 4$, $a_4 \geqslant 6$. Нетрудно видеть, что в любом упорядоченном допустимом наборе $a_1 \geqslant 2$ и $a_3 \geqslant 4$. Имеется гамильтонов цикл полного ранга GQ_4 с переходной последовательностью 4212312141312313 и спектром $(2,4,4,6)$. Таким образом, при $s = 4$ выполнено условие (i) леммы 3 или условие леммы 2. Рассмотрим условия (ii) и (iii) леммы 3 при $s = 4$. Пусть $n \geqslant 35$, тогда $a_4 \leqslant \frac{2^n}{n-3} \leqslant 2^{n-5}$. Предположим, что условие (iii) не выполнено, т. е. для некоторого $k \geqslant 5$ имеем $2^{k-5} \leqslant a_4$ и $\sum\limits_{i=5}^{k} a_i < 2^k - 2^4$. Тогда $(k-4)2^{k-5} \leqslant (k-4)a_4 < 2^k - 2^4$, откуда $k \leqslant 35$ и $a_4 < \frac{2^{35}-2^4}{31}$. Тем самым $\mu_a(4) < \mu^* = 4 \cdot \frac{2^{35}-2^4}{31}$.

Пусть $n \geqslant N = 2^{2^{\mu^*/2}(4+\log\mu^*)}$. Далее доказательство будем проводить по индукции. Предположим, что при $m < n$ любой допустимый набор является спектром гамильтонова цикла (I), причём если $m > 4$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i > 2^k$ при любом $k < m$, то набор $a \in \mathbb{D}_m$ является спектром гамильтонова цикла полного ранга (II). Для обоснования шага индукции проверим выполнение условий лемм 2 и 3. Условие (i) леммы 3 выполнено по предположению индукции. Нетрудно видеть, что $a_s \leqslant \frac{2^n}{n-s+1}$. Поэтому неравенство (ii) $a_s \leqslant 2^{n-s-1}$ справедливо при $s \leqslant 2^{\mu^*/2}(4+\log\mu^*)-1$. Если $\mu_a(4) \geqslant \mu^*$, то, как было показано выше, условие (iii) выполнено. Пусть $\mu_a(4) < \mu^*$. Определим последовательность чисел s_i рекуррентно. Пусть $s_0 = 4$. Если уже выбрано s_i, то в качестве s_{i+1} выберем такое минимальное k, для которого не выполнено условие (iii) леммы 3, т. е. $\sum\limits_{i=s_i+1}^{s_{i+1}} a_i < 2^{s_{i+1}} - 2^{s_i}$. Из утверждения 3 следует, что найдётся не более $M = \mu^*/2$ таких элементов последовательности $s_1 < s_2 < \dots < s_M$, для которых $\mu_a(s_i) > 0$. Кроме того, из утверждения 3 следует, что $s_M \leqslant 2^M(4+\log\mu^*)-1$. Если невозможно выбрать очередной s_j, то для построения искомого гамильтонова цикла применяем лемму 3, а если $\mu_a(s_j) = 0$, то применяем лемму 2. Таким образом, предположение индукции (I) обоснованно; предположение (II) вытекает из замечания 1. Для завершения доказательства теоремы достаточно применить утверждение 1. Теорема 1 доказана.

Для полного решения задачи о спектрах кодов Грея нужно обеспечить базу индукции для применения теоремы 1. Для построения гамильтоновых циклов в GQ_n при $n \leqslant N$ со всевозможными допустимыми спектрами можно использовать как описанную выше конструкцию, так и другие известные конструкции, в частности, конструкцию Бакоша [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пережогин А. Л., Потапов В. Н.** О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 52–62.
2. **Пережогин А. Л., Потапов В. Н.** О совершенных паросочетаниях в двоичном кубе // Дискретные модели в теории управляющих систем: VII междунар. конф. (Покровское, 4–6 марта 2006 г.): тр. М.: МАКС Пресс, 2006. — С. 272–277.
3. **Пережогин А. Л.** Об автоморфизмах циклов в n-мерном булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 67–79.

4. **Потапов В. Н.** О спектрах гамильтоновых циклов в булевом n-кубе // Мат. XVII междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» им. академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября–1 ноября 2008 г.). — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. — С. 137–140.
5. **Bhat G. S., Savage C. D.** Balanced Gray codes // Electron. J. Comb. — 1996. — Vol. 3, paper 25.
6. **Feder T., Subi C.** Nearly tight bounds on the number of Hamiltonian circuits of the hypercube and generalizations // Inform. Process. Lett. — 2009. — Vol. 109, N 5. — P. 267–272.
7. **Fink J.** Perfect matchings extend to Hamilton cycles in hypercubes // J. Comb. Theory, Ser. B. — 2007. — Vol. 97, N 6. — P. 1074–1076.
8. **Knuth D. E.** The art of computer programming. Vol. 4. — New-Jersey: Addison–Wesley, 2009. — 944 p.
9. **Kreweras G.** Matchings and Hamiltonian cycles on hypercubes // Bull. Inst. Comb. Appl. — 1996. — Vol. 16. — P. 87–91.
10. **Suparta I. N.** A simple proof for the existence of exponentially balanced Gray codes // Electron. J. Comb. — 2005. — Vol. 12, note 19.

Потапов Владимир Николаевич,
e-mail: vpotapov@math.nsc.ru

Статья поступила
6 июня 2011 г.

Переработанный вариант —
22 ноября 2011 г.