ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2012. Том 19, № 3. С. 79–99

УДК 519.95

О МИНИМАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ ГРАНЕЙ В ЕДИНИЧНОМ КУБЕ

И. П. Чухров

Аннотация. Рассматривается задача построения минимальных комплексов граней в единичном n-мерном кубе относительно класса мер сложности, для которых сложность комплекса не изменяется при замене некоторых граней гранями, изоморфными относительно перестановки координат. Этот класс содержит все известные меры сложности, используемые при минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (д.н.ф.). Показано, что число комплексов из граней размерности не более k, которые являются минимальными для всех мер сложности из этого класса, совпадает по порядку логарифма с числом комплексов из не более 2^{n-1} различных граней размерности не более k при $1 \leqslant k \leqslant c \cdot n$ и $c < 0.5$. Число функций с «большим» числом минимальных комплексов совпадает по порядку логарифма с числом всех функций. Аналогичные оценки справедливы для максимального числа д.н.ф. булевой функции, которые являются минимальными для всех мер сложности из указанного класса. Полученные результаты показывают, что проблемы трудоёмкости при минимизации булевых функций определяются структурными свойствами множества вершин булевой функции в единичном кубе, т. е. свойствами области, на которой минимизируется функционал, а не свойствами функционала меры сложности.

Ключевые слова: грань, интервал, комплекс граней в n-мерном единичном кубе, булева функция, мера сложности, минимальное покрытие, число минимальных комплексов граней.

Введение

Задача минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (далее д.н.ф.) [1, 4, 6], т. е. построения для функции её минимальной д.н.ф. относительно некоторой меры сложности, обычно рассматривается в двух эквивалентных моделях: аналитической и геометрической. В аналитической используются понятия булевой функции, импликанты, д.н.ф. и т. д., зависящие от n переменных. В геометрической модели эквивалентными понятиями являются подмножества вершин, грани, комплексы граней и т. д. в n-мерном единичном кубе [9, с. 307]. Дадим ряд определений для уточнения понятий изоморфизма и сложности в аналитической и геометрической моделях.

Гранью единичного n-мерного куба B^n называется множество вершин $B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \sigma_1,\ldots,x_{i_k} = \sigma_k\}$, $\sigma_s \in \{0,1\}$ при $s = 1,\ldots,k$. Множество координат $\{i_1,\ldots,i_k\}$ называется *направлением*, числа k и $(n-k)$ — *рангом* и *размерностью* грани $B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k}$ соответственно.

Комплексом граней называется неупорядоченный набор различных граней единичного куба. Множество вершин куба, содержащихся в гранях комплекса $M = \{I_r,\ r = 1,\ldots,l\}$, обозначается через N_M. Два комплекса граней называются *эквивалентными*, если они покрывают одно множество вершин единичного куба B^n.

Обозначим через π^n множество перестановок координат в единичном кубе B^n. Для перестановки $\pi \in \pi^n$ обозначим через $\pi\,(I)$ грань, полученную из грани I перестановкой координат π, т. е.

$$\pi\bigl(B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k}\bigr) = B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_k)},$$

и через $\pi(M) = \{\pi(I_r),\ r = 1,\ldots,l\}$ — комплекс граней, полученный перестановкой координат π во всех гранях комплекса M.

Комплексы граней называются *изоморфными* в кубе B^n, если один комплекс может быть получен из другого перестановкой координат, т. е. для комплексов граней M_1 и M_2 существует перестановка координат $\pi \in \pi^n$ такая, что $M_1 = \pi(M_2)$. При этом грани являются *изоморфными* только тогда, когда они имеют одинаковую размерность и одинаковое число координат направления, для которых в вершинах грани значение равно 0, и, следовательно, одинаковое число координат направления, для которых в вершинах грани значение равно 1.

Д.н.ф. называются *изоморфными*, если одна д.н.ф. может быть получена из другой подстановкой переменных без отождествлений. При этом импликанты являются *изоморфными* только тогда, когда в них одинаковое число переменных без отрицания и с отрицанием, т. е. они имеют одинаковый ранг и размерность.

Изоморфизм аналитической и геометрической моделей основан на изоморфизме элементарных конъюнкций и граней единичного куба B^n. Элементарная конъюнкция $K = x^{\sigma_1}_{i_1}\ldots x^{\sigma_r}_{i_r}$ изоморфна грани $B^n_K = B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_r}_{i_1,\ldots,i_r}$, д.н.ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_s$ изоморфна комплексу граней $\bigl\{B^n_{K_j},$

$j = 1, \ldots, s\big\}$. Таким образом, представление в виде д.н.ф. функции f из множества P_n всех булевых функций от n переменных эквивалентно покрытию гранями комплекса подмножества N_f вершин единичного куба B^n, т. е. наборов значений переменных, на которых функция равна 1.

Переход к геометрической модели позволяет абстрагироваться от конкретного набора переменных д.н.ф. и перейти к размерности, т. е. числу переменных, и нумерации координат единичного куба. Это позволяет существенно упростить понятие изоморфизма структур и определение меры сложности в геометрической модели.

Определение 1. Функционал $\mathcal{L}$, определённый на множестве всех комплексов граней, называется *мерой сложности*, если он удовлетворяет следующим аксиомам [9, с. 298]:

Аксиома неотрицательности. $\mathcal{L}(M) \geqslant 0$ для любого комплекса M.

Аксиома монотонности. $\mathcal{L}(M \cup \{I\}) \geqslant \mathcal{L}(M \cup \{I'\})$ для любых комплекса M и граней I, I', $I \subset I'$.

Аксиома выпуклости. $\mathcal{L}(M_1 \cup M_2) \geqslant \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$ для любого представления комплекса $M = M_1 \cup M_2$ в виде прямого объединения комплексов M_1 и M_2, не имеющих общих членов.

Аксиома инвариантности относительно изоморфизма. $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\pi(M))$ для любых комплекса M и перестановки координат π.

В силу аксиом выпуклости и неотрицательности $\mathcal{L}(M \cup \{I\}) \geqslant \mathcal{L}(M)$, т. е. при удалении грани из комплекса мера сложности оставшейся части не увеличивается.

Примерами простых мер сложности могут служить следующие функционалы (в терминах д.н.ф.): $\mathcal{L}_\vee$ — число дизъюнкций, $\mathcal{L}_\&$ — число конъюнкций или $\mathcal{L}_\neg$ — число отрицаний в д.н.ф. Мера сложности, равная числу граней в комплексе M, что соответствует числу импликант в д.н.ф. (функционал $\mathcal{L}_\vee + 1$), называется *длиной* и обозначается через $l(M)$. Мера сложности, равная сумме рангов граней в комплексе M, что соответствует числу переменных в д.н.ф. (функционал $\mathcal{L}_\vee + \mathcal{L}_\& + 1$), называется *сложностью* и обозначается через $L(M)$. Мера сложности, соответствующая функционалу $\alpha \cdot \mathcal{L}_\& + \beta \cdot \mathcal{L}_\vee$, где $\alpha + \beta > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, называется *линейной сложностью* и обозначается через $L_{\alpha,\beta}(M)$

Определение 2. Комплекс граней называется $\mathcal{L}$-*минимальным*, если он имеет наименьшую меру сложности $\mathcal{L}$ среди всех эквивалентных комплексов граней. $\mathcal{L}$-минимальному комплексу граней изоморфна $\mathcal{L}$-минимальная д.н.ф. *Кратчайшим* называется l-минимальный комплекс, и *минимальным* называется L-минимальный комплекс. Величина

$\mathcal{L}(Q) = \min\limits_{M|N_M=Q} \mathcal{L}(M)$ называется *$\mathcal{L}$-сложностью множества* $Q \subset B^n$ при покрытии его комплексом граней для булевой функции f такой, что $N_f = Q$, эта величина называется *$\mathcal{L}$-сложностью функции* f при реализации в классе д.н.ф. и обозначается через $\mathcal{L}(f)$.

Множества $\mathcal{L}$-минимальных комплексов граней, $\mathcal{L}$-минимальных комплексов граней размерности не более k и комплексов нулевой $\mathcal{L}$-сложности в единичном кубе B^n обозначим через $\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{M}^{n,k}_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}=0}$ соответственно. Их мощности обозначим через $M_{\mathcal{L}}(n) = \left|\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}}\right|$, $M_{\mathcal{L}}(n,k) = \left|\mathcal{M}^{n,k}_{\mathcal{L}}\right|$ и $M_{\mathcal{L}=0}(n) = \left|\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}=0}\right|$.

Для функции $f \in P_n$ через $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ будем обозначать множество $\mathcal{L}$-минимальных комплексов граней функции f, т. е. таких комплексов M, для которых $N_M = N_f$, через $\mu_{\mathcal{L}}(f) = |\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)|$ — число $\mathcal{L}$-минимальных комплексов функции f и через $\mu_{\mathcal{L}}(n)$ — максимальное значение этого параметра по множеству функций P_n. Очевидно, что $\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}} = \bigcup\limits_{f\in P_n} \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$.

Для произвольной меры сложности минимальный комплекс может быть «избыточным» по числу граней, что возможно только при существовании комплексов нулевой сложности. Если $\mathcal{L}$-минимальный комплекс M не является неприводимым (т. е. $M = M_1 \cup M_0$, где комплекс M_1 эквивалентен M), то $\mathcal{L}(M_0) = 0$. Действительно, так как комплекс M_1 эквивалентен M, который является $\mathcal{L}$-минимальным комплексом, то $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1)$. Тогда в силу аксиом неотрицательности и выпуклости

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1 \cup M_0) \geqslant \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_0) \geqslant 0,$$

т. е. $\mathcal{L}(M_0) = 0$. Все комплексы, которые могут быть получены из комплекса нулевой $\mathcal{L}$-сложности уменьшением ранга граней, удалением граней и перестановкой координат во всех гранях, имеют нулевую $\mathcal{L}$-сложность. В силу аксиомы неотрицательности комплекс граней, имеющий меру сложности $\mathcal{L}$, равную 0, $\mathcal{L}$-минимален, т. е. $\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}=0} \subseteq \mathcal{M}^n_{\mathcal{L}}$.

Взаимоотношение между множествами д.н.ф. булевой функции, минимальных относительно различных мер сложности, изучалось в ряде работ. Ю. И. Журавлев [3] построил функцию от 11 переменных, имеющую минимальную д.н.ф., которая не является кратчайшей. В [5] показано, что для функций с числом переменных $n < 4$ множества кратчайших тупиковых и минимальных д.н.ф. совпадают. При $n = 4$ эти множества либо совпадают, либо множество кратчайших содержит множество минимальных д.н.ф. При $n > 5$ множества кратчайших и минимальных д.н.ф. могут не пересекаться. Вебер рассматривал аналогичные вопросы для линейных мер сложности. В [2] показано, что для множеств $\mathcal{M}_L(f)$

и $\mathcal{M}_{L_{\alpha,\beta}}(f)$ осуществимы все логические возможности: пересечение множеств может быть пустым, совпадать с одним из множеств или обоими или не совпадать ни с одним из них. Соответствующие примеры реализуются на функциях с числом переменных от 5 до 7.

Таким образом, в задаче минимизации булевых функций исследовались эффекты, возникающие при изменении функционала меры сложности. Однако, как представляется, проблемы трудоёмкости задачи минимизации определяются структурой множества единичных вершин булевой функции в n-мерном единичном кубе, т. е. областью, на которой минимизируется функционал, а не сложностью функционала.

Определение 3. Комплекс граней M для произвольного класса мер сложности $\mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-*минимальным комплексом* (минимальным относительно класса мер сложности $\mathbb{C}$) в единичном кубе B^n, если для любой меры сложности из класса $\mathbb{C}$ он $\mathcal{L}$-минимальный, т. е. $M \in \bigcap\limits_{\mathcal{L}\in\mathbb{C}} \mathcal{M}^n_{\mathcal{L}}$.

Для класса мер сложности $\mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{M}^n_{\cap\mathbb{C}}$ множество $\mathbb{C}$-минимальных комплексов, а через $\mathcal{M}^{n,k}_{\cap\mathbb{C}}$ — множество $\mathbb{C}$-минимальных комплексов из граней размерности не более k в кубе B^n. Мощности этих множеств обозначим через $M_{\cap\mathbb{C}}(n) = \left|\mathcal{M}^n_{\cap\mathbb{C}}\right|$ и $M_{\cap\mathbb{C}}(n,k) = \left|\mathcal{M}^{n,k}_{\cap\mathbb{C}}\right|$.

Для функции $f \in P_n$ будем обозначать через $\mathcal{M}_{\cap\mathbb{C}}(f) = \bigcap\limits_{\mathcal{L}\in\mathbb{C}} \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ множество $\mathbb{C}$-минимальных комплексов булевой функции f. Множество $\mathcal{M}_{\cap\mathbb{C}}(f)$ может быть пусто, но если в этом множестве имеется некоторый комплекс, то он является минимальным комплексом функции относительно любой меры сложности из $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mu_{\cap\mathbb{C}}(f) = |\mathcal{M}_{\cap\mathbb{C}}(f)|$ число $\mathbb{C}$-минимальных комплексов функции f, а через $\mu_{\cap\mathbb{C}}(n)$ — максимальное значение этого параметра по множеству функций P_n.

Определение 4. Будем говорить, что мера сложности удовлетворяет *усиленному свойству инвариантности относительно изоморфизма*, если при замене в комплексе произвольного набора граней изоморфными гранями сложность комплекса не изменяется.

Обозначим через Λ множество всех функционалов, являющихся мерами сложности на множестве комплексов граней, и через Λ_π — класс мер сложности, удовлетворяющих усиленному свойству инвариантности. Отметим, что все приведённые выше в качестве примеров функционалы являются мерами сложности, удовлетворяющими усиленному свойству инвариантности.

Используемые, но не определяемые в статье понятия и определения можно найти в [1, 4, 9]. Через $\lfloor x \rfloor$ (соответственно $\lceil x \rceil$) будем обозначать целую часть (соответственно верхнюю целую часть) числа x. Под log всюду понимается логарифм по основанию 2.

Кратчайшие и минимальные комплексы граней известны для следующих случаев: любые ядровые комплексы, в том числе для линейных и монотонных функций, неядровые комплексы для симметрических, цепных и циклических функций [4, с. 95–97], неядровые комплексы, получаемые конструированием из минимальных комплексов, с использованием свойств компонент связности и регулярных множеств вершин. Обзор известных оценок для числа минимальных и кратчайших комплексов в единичном кубе представлен в [8].

В нашей статье предлагаются методы построения Λ_π-минимальных комплексов, основанные на развитии результатов работ [7, 8]. С использованием экстремальных ядровых комплексов граней заданной размерности получены нижние оценки числа Λ_π-минимальных комплексов граней в кубе B^n. Показано, что для комплексов, состоящих из граней размерности не более k, число Λ_π-минимальных комплексов совпадает по порядку логарифма с общим числом комплексов из не более чем 2^{n-1} различных граней размерности не более k при $1 \leqslant k \leqslant c \cdot n$ и $c < 0.5$. Для числа Λ_π-минимальных комплексов граней получена нижняя оценка

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) > c \cdot n \cdot 2^n \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $c > 0.5307 \cdot 2^{-5}$. Аналогичные нижние оценки справедливы для максимального числа Λ_π-минимальных д.н.ф. булевых функций. При этом множество функций от n переменных, для которых $\log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(f) \asymp n \cdot 2^n$, имеет мощность не менее $2^{\sigma \cdot 2^n}$ при $n \to \infty$, где $0 < \sigma < 1$. Существенное увеличение, т. е. по порядку роста логарифма, числа минимальных комплексов граней для меры сложности из класса Λ_π может произойти только за счёт комплексов нулевой сложности.

1. Описание конструкции

Множество вершин грани размерности k может быть представлено в виде $\{\widetilde{x} \in B^n \mid \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{x} \leqslant \widetilde{\beta}\}$, где $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — минимальная и максимальная вершины грани, при этом расстояние Хэмминга $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ равно k. В таком представлении грань называется *интервалом* размерности k. Будем использовать следующие обозначения:

$I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ — наименьшая грань, содержащая вершины $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in B^n$;

$\widetilde{\delta}_{\min}(I)$ и $\widetilde{\delta}_{\max}(I)$ — минимальная и максимальная вершины грани I;

$B^n_m = \{\widetilde{x} \in B^n \mid \rho(\widetilde{0}, \widetilde{x}) = \|\widetilde{x}\| = m\}$ — m-й слой куба B^n;

$S^n_{m-k,m} = \{\widetilde{x} \in B^n \mid m-k \leqslant \|\widetilde{x}\| \leqslant m\}$ — пояс ширины k в кубе B^n, состоящий из слоёв с номерами $m-k, \ldots, m$, где $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$.

Для множества вершин $Q \subseteq B^n$ любая грань $I \subseteq Q$ называется *допустимой*. Допустимая грань I для множества вершин $Q \subseteq B^n$ называется *максимальной*, если не существует грани $I' \neq I$ такой, что $I \subset I' \subseteq Q$.

Определение 5. Множество $C \subseteq Q$ для $Q \subseteq B^n$ называется *интервально независимым множеством вершин* для Q, если любая допустимая грань для Q содержит не более одной вершины из C, т. е. $I(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \nsubseteq Q$ для любых $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ из C.

Определение 6. Комплекс граней M называется *неприводимым*, если после удаления из него любой грани получается комплекс граней, неэквивалентный M, т. е. $N_M \neq N_{M\setminus\{I\}}$ для любой грани $I \in M$.

Определение 7. Грань I называется *ядровой для множества вершин* $Q \subset B^n$, если она максимальна для Q и существует вершина $\widetilde{\alpha} \in I$, не принадлежащая никакой другой грани, максимальной для Q. Вершины ядровой грани, которые не содержатся в других максимальных для Q гранях, называются *собственными вершинами ядровой грани*.

Определение 8. Комплекс граней M в кубе B^n, называется *ядровым*, если любая грань комплекса M является ядровой для множества вершин N_M.

Обозначим через C_M множество собственных вершин граней ядрового комплекса M, которое содержит по одной произвольной, если их несколько, собственной вершине для каждой ядровой грани комплекса, и через $I_{M,\widetilde{x}}$ — интервал ядрового комплекса M, содержащий вершину $\widetilde{x} \in C_M$. Очевидно, что для ядрового комплекса M множество собственных вершин C_M является интервально независимым множеством вершин для множества N_M.

Пусть параметры k_0, k, p, r такие, что $0 < 2p < k < k_0$, $p < r < n-p$, и M — произвольный ядровой комплекс k_0-мерных граней в единичном кубе B^n. Для вершины $\widetilde{x} \in C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$ положим

$$P_{\min}(\widetilde{x}) = \begin{cases} B^n_{r-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \cap I(\widetilde{\delta}_{\min}(I_{M,\widetilde{x}}), \widetilde{x}), & \text{если } \|\widetilde{\delta}_{\min}(I_{M,\widetilde{x}})\| \leqslant r - \lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor, \\ \{\widetilde{\delta}_{\min}(I_{M,\widetilde{x}})\} & \text{в противном случае} , \end{cases}$$

$$P_{\max}(\widetilde{x}) = \begin{cases} B^n_{r+\lceil \frac{k}{2} \rceil} \cap I(\widetilde{x}, \widetilde{\delta}_{\max}(I_{M,\widetilde{x}})), & \text{если } \|\widetilde{\delta}_{\max}(I_{M,\widetilde{x}})\| \geqslant r + \lceil \frac{k_0}{2} \rceil, \\ \{\widetilde{\delta}_{\max}(I_{M,\widetilde{x}})\} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и определим пучок интервалов

$$P(\widetilde{x}) = \left\{ I \mid \widetilde{\delta}_{\min}(I) \in P_{\min}(\widetilde{x}),\ \widetilde{\delta}_{\max}(I) \in P_{\max}(\widetilde{x}) \right\}.$$

Будем рассматривать комплексы $\left\{ I_j \mid I_j \in P(\widetilde{x}_j),\ \widetilde{x}_j \in C_M \cap S^n_{r-p,r+p} \right\}$, т. е. для каждой вершины $\widetilde{x} \in C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$ в комплекс входит по одному интервалу из пучка $P(\widetilde{x})$ (рис. 1).

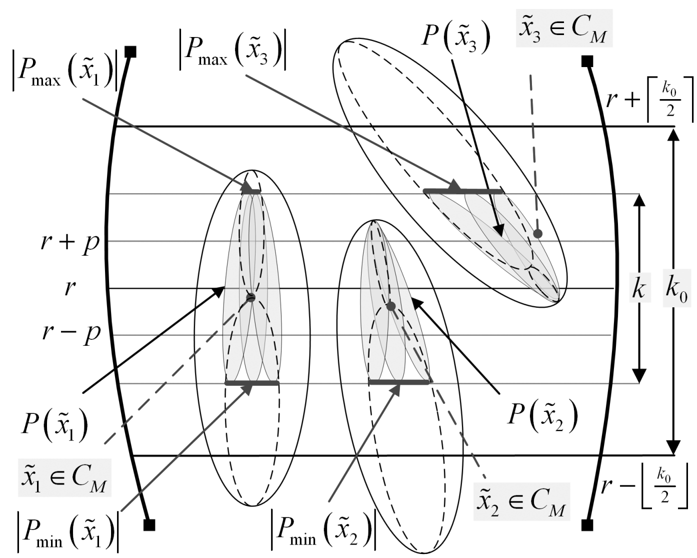

Рис. 1. Построение множества комплексов $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$

Обозначим через $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$ множество комплексов, построенных по пучкам интервалов $P(\widetilde{x})$ для вершин из множества $C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$ ядрового комплекса M, состоящего из граней размерности k_0.

Для любого комплекса $w \in \Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$ и любой вершины $\widetilde{x} \in C_M \cap S^n_{r-p,r+p} \subset N_w$ выполняются следующие свойства:

(i) все интервалы из $P(\widetilde{x})$ содержатся в интервале $I_{M,\widetilde{x}}$ и изоморфны, следовательно, имеют одинаковую размерность $d_{\widetilde{x}}$ и $\lfloor k/2 \rfloor - p \leqslant d_{\widetilde{x}} \leqslant k$;

(ii) в пучок $P(\widetilde{x})$ входят все максимальные интервалы для множества N_w, содержащие вершину $\widetilde{x}$. Любой интервал, допустимый для множества N_w и содержащий вершину $\widetilde{x}$, содержится в некотором интервале из $P(\widetilde{x})$;

(iii) множество вершин $C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$ интервально независимо для множества $N_w \subset B^n$;

(iv) для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$ все комплексы имеют одинаковую сложность.

Доказательство Λ_π-минимальности построенных комплексов выполняется в терминах нестрогого предпочтения (сложность не больше) и неразличимости (сложность одинаковая) сравниваемых комплексов граней, а значение функционала сложности несущественно.

Лемма 1. *Имеет место включение* $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r) \subset \mathcal{M}^{n,k}_{\cap\Lambda_\pi}$, *т. е. любой комплекс из этого множества является* Λ_π*-минимальным комплексом граней размерности не более* k.

Обозначим через $\Omega^n_{t-k,t}$ множество комплексов k-мерных граней в поясе $S^n_{t-k,t} \subset B^n$ таких, что для каждой вершины из слоя B^n_t берётся одна произвольная k-мерная грань, максимальная для множества $S^n_{t-k,t}$. Для подмножества $S^n_{0,t} \subset B^n$ все t-мерные грани образуют ядровой комплекс M и $C_M = B^n_t$ — множество собственных вершин ядровых граней. Тогда $\Omega^n_{t-k,t} \equiv \Omega^n(M, C_M, t, 2k, 0, t)$ и из леммы 1 вытекает

Следствие 1. $\Omega^n_{t-k,t} \subset \mathcal{M}^{n,k}_{\cap\Lambda_\pi}$ *и* $\log\left|\Omega^n_{t-k,t}\right| = \binom{n}{t}\log\binom{t}{k}$ *при* $1 \leqslant k < t$.

Лемма 2. *Имеют место неравенства*

$$\min_{\widetilde{x}\in C_M\cap S^n_{r-p,r+p}} |P(\widetilde{x})| \geqslant \min\left\{\binom{\lfloor k_0/2\rfloor - p}{\lfloor k/2\rfloor - p}, \binom{\lceil k_0/2\rceil - p}{\lceil k/2\rceil - p}\right\},$$

$$|\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)| \geqslant \min\left\{\binom{\lfloor k_0/2\rfloor - p}{\lfloor k/2\rfloor - p}, \binom{\lceil k_0/2\rceil - p}{\lceil k/2\rceil - p}\right\}^{\left|C_M\cap S^n_{r-p,r+p}\right|}.$$

Замечание 1. Обозначим через $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p_1, p_2, r)$ множество различных комплексов граней, построенных аналогично по ядровому комплексу k_0-мерных граней M для собственных вершин из множества $C_M \cap S^n_{r-p_1,r+p_2}$, где $0 < 2\cdot\max\{p_1, p_2\} < k < k_0$ и $p_1 < r < n - p_2$. Тогда справедливы утверждения, аналогичные леммам 1 и 2, т. е. любой комплекс из этого множества Λ_π-минимален, при этом для любой вершины $\widetilde{x} \in C_M \cap S^n_{r-p_1,r+p_2}$ размерность граней в пучке $P(\widetilde{x})$ удовлетворяет неравенству $\lfloor k/2\rfloor - \max\{p_1, p_2\} \leqslant d_{\widetilde{x}} \leqslant k$ и

$$|P(\widetilde{x})| \geqslant \min\left\{\binom{\lfloor k_0/2\rfloor - p_1}{\lfloor k/2\rfloor - p_1}, \binom{\lceil k_0/2\rceil - p_2}{\lceil k/2\rceil - p_2}\right\}.$$

Определение 9. Подмножество $S \subseteq B^n$ называется *связным в* B^n, если для любых вершин $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in S$ существует последовательность интервалов $\{I_j, j = 1, \ldots, t\}$, допустимых для S, такая, что $\widetilde{x} \in I_1$, $\widetilde{y} \in I_t$

и $I_j \cap I_{j+1} \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, t-1$. Подмножества $S_j \subset B^n$, $j = 1, \ldots, r$, называются *компонентами связности в* B^n, если S_j связны в B^n и не существует грани, допустимой для множества $\bigcup\limits_{j=1}^{r} S_j$, которая содержит вершины из различных множеств S_i и S_j.

Известно, что кратчайшие и минимальные комплексы обладают свойством «суммируемости» для компонент связности: при объединении любых кратчайших (минимальных) комплексов граней для компонент связности получается кратчайший (минимальный) комплекс [1, с. 117]. Для произвольных мер сложности такое утверждение в общем случае неверно. Однако комплексы граней вида $\Omega^n\left(M, C_M, k_0, k, p, r\right)$ из различных множеств, являющихся компонентами связности в кубе B^n, обладают свойством «суммируемости» для мер сложности из класса Λ_π. Для этого достаточно интервальной независимости подмножества вершин $C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$ и изоморфизма граней в пучках, из которых получаются комплексы граней.

Обозначим через $\Omega^n\big(S^n_{t-k,t}\big)$ произвольное множество комплексов граней вида $\Omega^n\left(M, C_M, k_0, k, p, r\right)$, где $t = r + \lceil k/2 \rceil$, т. е. грани любого комплекса содержатся в поясе $S^n_{t-k,t}$.

Лемма 3. *Пусть множества* $S^n_{i-k_i,i}$ *и* $S^n_{j-k_j,j}$ *— компоненты связности в* B^n. *Тогда объединение произвольных комплексов* $w_i \in \Omega^n\big(S^n_{i-k_i,i}\big)$ *и* $w_j \in \Omega^n\big(S^n_{j-k_j,j}\big)$ *является* Λ_π*-минимальным комплексом.*

Нижние оценки $M_{\cap\Lambda_\pi}\left(n, k\right)$ основаны на леммах 1–3 и получаются при построении множеств минимальных комплексов по ядровому комплексу с максимальным числом граней определённой размерности. Обозначим через $c_{k_0}\left(n\right)$ максимальное число k_0-мерных граней ядрового комплекса в кубе B^n. В [8] при $1 \leqslant k_0 < \frac{n}{2}$ и $n \to \infty$ получена оценка

$$\frac{2^{n-1}}{e}\varphi\left(\frac{k_0}{n}\right) \lesssim c_{k_0}\left(n\right) \leqslant 2^{n-1}, \qquad \text{где } \varphi\left(x\right) = \frac{1-2x}{1-x} \cdot \max\left\{1, \frac{2x}{1-x}\right\}.$$

При рациональном выборе параметров k_0, r и p получается нижняя оценка $M_{\cap\Lambda_\pi}\left(n, k\right)$ порядка $n \cdot 2^n$ для $k \sim x \cdot n$, где $0 < x < 0.5$, и порядка $k \log \frac{n}{k} \cdot 2^n$ для $1 \leqslant k = o\left(n\right)$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $\mathcal{G}^n\left(m\right)$ множество комплексов из не более чем m граней и через $\mathcal{G}^{n,k}\left(m\right)$ — множество комплексов из не более чем m граней размерности не более чем k в единичном кубе B^n. Мощности этих множеств обозначим через $G_n\left(m\right) = \left|\mathcal{G}^n\left(m\right)\right|$ и $G_{n,k}\left(m\right) = \left|\mathcal{G}^{n,k}\left(m\right)\right|$.

Лемма 4. *При $n \to \infty$ имеют место следующие оценки*:

$$\log G_n(m) \lesssim n \cdot m \cdot \log \frac{3}{2}, \quad \textit{если } \log \frac{m}{2^n} = o\,(n)\,,$$

$$\log G_n\,(m) \leqslant n \cdot m \cdot \log \tfrac{3}{2} + O\,(2^n)\,, \quad \textit{если } m \sim c \cdot 2^n \textit{ и } c > 0,$$

$$\log G_{n,k}\,(m) \lesssim m \cdot k \cdot \log \tfrac{n}{k}, \quad \textit{если } 1 \leqslant k = o\,(n) \textit{ и } \log \tfrac{m}{2^n} = o\left(k \log \tfrac{n}{k}\right).$$

Верхние оценки $M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n)$ и $M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n,k)$ основаны на лемме 4. Так как Λ_π-минимальные комплексы кратчайшие, число граней в них не превосходит 2^{n-1}. Поэтому

$$\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi} \subset \mathcal{G}^n(2^{n-1}), \quad \mathcal{M}^{n,k}_{\cap\Lambda_\pi} \subset \mathcal{G}^{n,k}(2^{n-1})$$

и при $n \to \infty$ справедливы оценки

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) < \log G_n(2^{n-1}) < 2^{n-1} \cdot n \cdot \log \tfrac{3}{2} + O\,(2^n),$$

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n,k) < \log G_{n,k}(2^{n-1}) \lesssim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log \tfrac{n}{k}, \quad \text{где } 1 \leqslant k = o\,(n)\,.$$

Такие верхние оценки совпадают по порядку логарифма с нижними оценками, т. е. оказываются достаточными для получения порядка роста логарифма параметров $M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n,k)$, $M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n)$ и $\mu_{\cap\Lambda_\pi}\,(n)$.

2. Формулировка основных результатов

Количественные оценки числа Λ_π-минимальных комплексов граней основаны на леммах 1–4 и зависят от размерности граней в комплексах.

Теорема 1. *Если $k \sim x \cdot n$, где $0 < x < 0.5$, то при $n \to \infty$*

$$c\,(x) \cdot n \cdot 2^n \lesssim \log M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n,k) < \log \tfrac{3}{2} \cdot n \cdot 2^{n-1} + O\,(2^n)\,,$$

где $c\,(x) = \max\limits_{y | x<y<0.5} \frac{y}{4e} \cdot \varphi(y) \cdot H(\frac{x}{y})$ *и* $H\,(t) = -t \cdot \log\, t - (1-t) \cdot \log\,(1-t)$.

Из теоремы 1 следует, что $\log M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n,k) \asymp n \cdot 2^n$, если $k \sim x \cdot n$ и $0 < x < 0.5$ при $n \to \infty$. При оптимальном выборе параметров получаются нижние оценки числа Λ_π-минимальным комплексов в кубе B^n и максимального числа Λ_π-минимальным комплексов для функций из P_n.

Теорема 2. *Для $c_\pi > 0.5307 \cdot 2^{-4}$ при $n \to \infty$*

$$c_\pi \cdot n \cdot 2^{n-1} < \log \mu_{\cap\Lambda_\pi}\,(n) < \log M_{\cap\Lambda_\pi}\,(n) < \log \tfrac{3}{2} \cdot n \cdot 2^{n-1} + O\,(2^n)\,.$$

Из теоремы 2 следует, что $\log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) \sim \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) \asymp n \cdot 2^n$ при $n \to \infty$, т. е. существуют функции, для которых число Λ_π-минимальных комплексов по порядку роста логарифма равно $n \cdot 2^n$.

Обозначим через

$$Q^n_{\cap\Lambda_\pi}(t) = \{f \in P_n \mid \log M_{\cap\Lambda_\pi}(f) \geqslant t \cdot c_\pi \cdot n \cdot 2^{n-1}\}$$

множество функций с «большим» числом Λ_π-минимальных комплексов.

Теорема 3. *При $n \to \infty$ верна оценка*

$$\left|Q^n_{\cap\Lambda_\pi}(t)\right| \geqslant 2^{\sigma \cdot \hbar(t) \cdot 2^n},$$

где $\sigma > 0.0868$, $\hbar(t) = 1$ для $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ и $\hbar(t) = H(t)$ для $\frac{1}{2} < t < 1$.

Для произвольной меры сложности $\mathcal{L}$-минимальный комплекс не обязательно неприводим. Однако существенное увеличение числа $\mathcal{L}$-минимальных комплексов для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$ может произойти только за счёт комплексов нулевой сложности.

Теорема 4. *Для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$ при $n \to \infty$ имеет место* $\log \mu_{\mathcal{L}}(n) \asymp n \cdot 2^n + \log M_{\mathcal{L}=0}(n)$.

В случае $k = o(n)$, а именно для $k = o(\sqrt{n})$, получение высоких нижних оценок основано на возможности объединения Λ_π-минимальных комплексов граней, содержащихся в узких и несвязных поясах куба B^n, с сохранением свойства Λ_π-минимальности.

Теорема 5. *Для $1 \leqslant k = o(n)$ при $n \to \infty$ выполнена оценка*

$$c_k \cdot 2^{n-1} \cdot k \cdot \log \tfrac{n}{k} \lesssim \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n,k) \lesssim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log \tfrac{n}{k},$$

где $c_k = \frac{1}{2e}$ при $\frac{k}{\sqrt{n}} \to \infty$, $c_k = \frac{1}{8e}$ при $n_0 \leqslant k = O(\sqrt{n})$ и $c_k = \frac{2}{k+2}$ при $1 \leqslant k < n_0$, $n_0 = \lceil 16e - 2 \rceil = 42$.

3. Оценки числа минимальных комплексов граней

Доказательство леммы 1. Обозначим $C = C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$. Во-первых, для комплексов $w_1 = \{I_{w_1,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in C\}$, $w_2 = \{I_{w_2,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in C\}$ из $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$ и любой вершины $\widetilde{x} \in C$ интервалы $I_{w_1,\widetilde{x}}$ и $I_{w_2,\widetilde{x}}$ принадлежат $P(\widetilde{x})$ и являются изоморфными гранями. Поэтому заменой в комплексе w_1 каждой грани $I_{w_1,\widetilde{x}}$ изоморфной гранью $I_{w_2,\widetilde{x}}$ можно получить комплекс w_2, следовательно, $\mathcal{L}(w_1) = \mathcal{L}(w_2)$ для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$.

Во-вторых, для любого комплекса v, эквивалентного $w \in \Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$, множество вершин C интервально независимо для множества

$N_v = N_w$. Поэтому для каждой вершины $\widetilde{x} \in C$ должен быть хотя бы один интервал, содержащий эту вершину, и этот интервал не может содержать ни одной другой вершины из множества C. Представим $v = \left\{I_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in C\right\} \cup v_0$, где $I_{v,\widetilde{x}}$ — интервал комплекса v, содержащий вершину $\widetilde{x} \in C$, и v_0 — некоторый комплекс (возможно, пустой). Тогда для любой вершины $\widetilde{x} \in C$ интервал $I_{v,\widetilde{x}}$ содержится в некотором максимальном интервале $\widehat{I}_{v,\widetilde{x}} \in P\,(\widetilde{x})$. Следовательно, комплекс $\widehat{w} = \left\{\widehat{I}_{v,\widetilde{x}},\ \widetilde{x} \in C\right\}$ принадлежит $\Omega^n\,(M, C_M, k_0, k, p, r)$ и

$$\mathcal{L}(v) \geqslant \mathcal{L}(\{I_{v,\widetilde{x}}, \widetilde{x} \in C\}) \geqslant \mathcal{L}\,(\widehat{w}) = \mathcal{L}\,(w)\,.$$

Поэтому все комплексы из множества $\Omega^n\,(M, C_M, k_0, k, p, r)$ имеет одинаковую и минимальную $\mathcal{L}$-сложность для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$, т. е. Λ_π-минимальны. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Для любой вершины $\widetilde{x} \in C_M \cap S^n_{r-p,r+p}$ верно или (i) $\|\widetilde{\delta}_{\min}(I_{M,\widetilde{x}})\| \leqslant r - \lfloor k_0/2 \rfloor$, или (ii) $\|\widetilde{\delta}_{\max}(I_{M,\widetilde{x}})\| \geqslant r + \lceil k_0/2 \rceil$, так как интервал $I_{M,\widetilde{x}}$ имеет размерность k_0 и

$$r + \lceil k_0/2 \rceil - (r - \lfloor k_0/2 \rfloor) = k_0.$$

Если (i) верно, то $|P_{\min}(\widetilde{x})| = \left|B^n_{r-\lfloor k/2 \rfloor} \cap I(\widetilde{\delta}_{\min}(I_{M,\widetilde{x}}), \widetilde{x})\right|$ и $\|\widetilde{x}\| \geqslant r - p$. Следовательно,

$$|P_{\min}(\widetilde{x})| = \binom{\|\widetilde{x}\| - \|\widetilde{\delta}_{\min}(I_{M,\widetilde{x}})\|}{\|\widetilde{x}\| - (r - \lfloor k/2 \rfloor)} \geqslant \binom{\lfloor k_0/2 \rfloor + \|\widetilde{x}\| - r}{\lfloor k/2 \rfloor + \|\widetilde{x}\| - r} \geqslant \binom{\lfloor k_0/2 \rfloor - p}{\lfloor k/2 \rfloor - p},$$

так как последовательность $D_i = \dbinom{a - p + i}{b - p + i}$ не убывает для $i = 0, 1, \ldots,$ где $p \leqslant b < a$, т. е. $D_i \geqslant D_0$.

Если (ii) верно, то

$$|P_{\max}\,(\widetilde{x})| = \left|B^n_{r+\lceil k/2 \rceil} \cap I(\widetilde{x}, \widetilde{\delta}_{\max}(I_{M,\widetilde{x}}))\right|$$

и $\|\widetilde{x}\| \leqslant r + p$. Аналогично получаем

$$|P_{\max}(\widetilde{x})| = \binom{\|\widetilde{\delta}_{\max}(I_{M,\widetilde{x}})\| - \|\widetilde{x}\|}{(r + \lceil k/2 \rceil) - \|\widetilde{x}\|} \geqslant \binom{\lceil k_0/2 \rceil + r - \|\widetilde{x}\|}{\lceil k/2 \rceil + r - \|\widetilde{x}\|} \geqslant \binom{\lceil k_0/2 \rceil - p}{\lceil k/2 \rceil - p}.$$

Поскольку $|P\,(\widetilde{x})| = |P_{\min}\,(\widetilde{x})| \cdot |P_{\max}\,(\widetilde{x})|$, $|P_{\min}\,(\widetilde{x})| \geqslant 1$ и $|P_{\max}\,(\widetilde{x})| \geqslant 1$,

$$|P\,(\widetilde{x})| \geqslant \min\left\{|P_{\min}\,(\widetilde{x})|\,, |P_{\max}\,(\widetilde{x})|\right\} = \min\left\{\binom{\lfloor k_0/2 \rfloor - p}{\lfloor k/2 \rfloor - p}, \binom{\lceil k_0/2 \rceil - p}{\lceil k/2 \rceil - p}\right\}.$$

Тогда очевидно, что $|\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)| = \prod\limits_{\widetilde{x}\in C_M\cap S^n_{r-p,r+p}} |P(\widetilde{x})|$ и

$$|\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)| \geqslant \min\left\{\binom{\lfloor k_0/2\rfloor - p}{\lfloor k/2\rfloor - p}, \binom{\lceil k_0/2\rceil - p}{\lceil k/2\rceil - p}\right\}^{\left|C_M\cap S^n_{r-p,r+p}\right|}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Схема доказательства аналогична доказательству леммы 1. Во-первых, при объединении все комплексы граней $w = w_i \cup w_j$ имеют одинаковую $\mathcal{L}$-сложность для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$, так как один комплекс может быть получен из другого заменой граней изоморфными. Во-вторых, любой комплекс v, эквивалентный $w_i \cup w_j$, однозначно представляется в виде прямого объединения комплексов $v = v_i \cup v_j$, где комплекс v_i эквивалентен w_i и $N_{v_i} \subseteq S^n_{i-k_i,i}$, а v_j эквивалентен w_j и $N_{v_j} \subseteq S^n_{j-k_j,j}$. Для каждой компоненты связности уменьшением ранга граней и удалением граней могут быть получены эквивалентные комплексы граней $\widehat{w}_i \in \Omega^n\big(S^n_{i-k_i,i}\big)$ для v_i и $\widehat{w}_j \in \Omega^n\big(S^n_{j-k_j,j}\big)$ для v_j, при этом $\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(v_i \cup v_j) \geqslant \mathcal{L}(\widehat{w}_i \cup \widehat{w}_j)$. С другой стороны, комплексы $\widehat{w}_i$ и $\widehat{w}_j$ могут быть получены из комплексов w_i и w_j заменой граней изоморфными. Поэтому $\mathcal{L}(\widehat{w}_i \cup \widehat{w}_j) = \mathcal{L}(w_i \cup w_j)$ и, следовательно, $\mathcal{L}(v) \geqslant \mathcal{L}(w_i \cup w_j)$ для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Для единичного куба B^n обозначим через $I_{n,k} = \sum\limits_{s=0}^{k} i_{n,s}$ число граней размерности не более k, где $i_{n,s} = \binom{n}{s}2^{n-s}$ — число s-мерных граней. Тогда

$$G_{n,k}(m) = \sum_{s=0}^{m}\binom{I_{n,k}}{s} \quad \text{и} \quad G_n(m) = G_{n,n}(m) = \sum_{s=0}^{m}\binom{3^n}{s},$$

так как $I_{n,n} = \sum\limits_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\cdot 2^{n-s} = 3^n$. При получении оценок используем неравенство $\log\sum\limits_{j=0}^{q}\binom{p}{j} < p\cdot H\big(\frac{q}{p}\big)$, где $q < p/2$.

Если $m = 2^{n+o(n)}$ при $n \to \infty$, то

$$\log G_n(m) < 3^n\cdot H\left(\frac{m}{3^n}\right) = m\cdot n\cdot\log\tfrac{3}{2} + m\cdot\log\frac{2^n}{m} + O(m).$$

Поэтому $\log G_n(m) \lesssim m\cdot n\cdot\log\frac{3}{2}$ при $n\to\infty$, а если $m \sim c\cdot 2^n$, то $\log G_n(m) < m\cdot n\cdot\log\frac{3}{2} + O(2^n)$.

Если $1 \leqslant k = o(n)$ и $m = 2^{n+o\left(k\cdot\log\frac{n}{k}\right)}$, то $I_{n,k} \sim i_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ и $\log\binom{n}{k} \sim k \cdot \log\frac{n}{k}$ при $n \to \infty$. Поэтому $m = o(i_{n,k})$ при $n \to \infty$ и

$$\log G_{n,k}(m) < I_{n,k} \cdot H\left(\frac{m}{I_{n,k}}\right) \sim m \log(i_{n,k}/m)$$
$$\sim m \cdot \left(k \cdot \log\frac{n}{k} + n - k - \log m\right) \sim m \cdot k \cdot \log\frac{n}{k}.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если* $m \leqslant c_{k_0}(n) - \left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right|$, *то существует ядровой комплекс* M *из* m *граней размерности* k_0, *для которого все собственные вершины множества* C_M *принадлежат* $S^n_{r-p,r+p}$.

Доказательство. Обозначим через M_0 ядровой комплекс с максимальным числом k_0-мерных граней в единичном кубе B^n, т. е. $|C_{M_0}| = c_{k_0}(n)$. Тогда

$$m \leqslant c_{k_0}(n) - \left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right| = |C_{M_0}| - \left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right| \leqslant \left|C_{M_0} \cap S^n_{r-p,r+p}\right|.$$

Тем самым из множества C_{M_0} можно выбрать подмножество вершин мощности m, содержащееся в поясе $S^n_{r-p,r+p}$. При этом требуемый ядровой комплекс M состоит из ядровых граней комплекса M_0, для которых выбранные m вершин являются собственными. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $k_0 = \lfloor y \cdot n \rfloor$, $0 < x < y < 0.5$, $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $p = \lfloor \sqrt{n} \cdot \log n \rfloor$. Тогда

$$c_{k_0}(n) - \left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right| \sim c_{k_0}(n),$$

так как $p/\sqrt{n} \to \infty$, $\left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right| = o(2^n)$ и $c_{k_0}(n) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e}\varphi(y) \gtrsim 2^n$ при $n \to \infty$. По лемме 5 существует ядровой комплекс M из k_0-мерных граней такой, что $C_M \subset S^n_{r-p,r+p}$ и $|C_M| = m \sim c_{k_0}(n)$. Для комплекса M и параметров k_0, k, r, p может быть определено множество комплексов $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$. Так как $p = o(n)$, $k \sim x \cdot n$ и $k_0 \sim y \cdot n$, то

$$\log\min\left\{\binom{\lfloor k_0/2\rfloor - p}{\lfloor k/2\rfloor - p}, \binom{\lceil k_0/2\rceil - p}{\lceil k/2\rceil - p}\right\} \sim \frac{k_0}{2} \cdot H(k/k_0) \sim \frac{ny}{2} \cdot H(x/y)$$

при $n \to \infty$. Поэтому в силу леммы 1

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}(n,k) \geqslant \log|\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)|$$
$$\gtrsim m\frac{ny}{2}H(x/y) \sim n \cdot 2^n \cdot C(x,y)$$

при $n \to \infty$, где $C(x,y) = \frac{y}{4e} \cdot \varphi(y) \cdot H(x/y)$ и $0 < x < y < 0.5$. Значение k_0, т. е. параметр y, выбирается из условия максимизации функции $C(x,y)$ в области $\{y \mid 0 < x < y < 0.5\}$.

Верхняя оценка следует из соотношения $M_{\cap\Lambda_\pi}(n,k) < G_n(2^{n-1})$ и леммы 4. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Используем оценку из теоремы 1:

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}(n,k) \gtrsim n \cdot 2^n \cdot C(x,y),$$

где $C(x,y) = \frac{y}{4e} \cdot \varphi(y) \cdot H(x/y)$, $k/n \sim x$ и $0 < x < y < 0.5$ при $n \to \infty$. Значения x и y определим из условия максимизации функции $C(x,y)$ в области $\{(x,y) \mid 0 < x < y < 0.5\}$. Численная оптимизация этой функции двух переменных позволяет получить $C(0.1909, 0.3819) > 1.06149 \cdot 2^{-6}$. Поэтому при $k = \lfloor 0.1909 \cdot n \rfloor$

$$1.06149 \cdot n \cdot 2^{n-6} < \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n,k) \leqslant \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) < \log G_n(2^{n-1}).$$

Из соотношения $2^{-2^n} \cdot M_{\cap\Lambda_\pi}(n) < \mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) < M_{\cap\Lambda_\pi}(n)$ следует, что

$$c_\pi \cdot n \cdot 2^{n-1} < \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) - 2^n \leqslant \log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) < \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n),$$

где $c_\pi > 0.5307 \cdot 2^{-4}$ при достаточно больших n. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Положим $k = \lfloor x \cdot n \rfloor$ и $k_0 = \lfloor y \cdot n \rfloor$, где $x = 0.1909$, $y = 0.3819$, $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $p = \lfloor \sqrt{n} \cdot \log n \rfloor$. Из оценок теорем 1 и 2 следует существование ядрового комплекса M из $m \sim \frac{2^{n-1}}{e}\varphi(y)$ граней размерности k_0 такого, что при $n \to \infty$

$$\log |\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)| \gtrsim m \cdot \frac{n \cdot y}{2} \cdot H(x/y) \sim n \cdot 2^n \cdot C(x,y),$$

где $C(x,y) > \frac{c_\pi}{2}$ и $C_M \subset S^n_{r-p,r+p}$. Для $0 < t < 1$ положим $r_{m,t} = \sum\limits_{s \geqslant t \cdot m}^{m} \binom{m}{s}$ и обозначим через

$$R_t(M) = \{M_i \subset M \mid t \cdot |M| \leqslant |M_i|,\ i = 1, \ldots, r_{m,t}\}$$

множество ядровых комплексов, которые могут быть получены из ядрового комплекса M выбором произвольных s граней, где $s \geqslant t \cdot |M|$. Для $i = 1, \ldots, r_{m,t}$ по ядровому комплексу $M_i \in R_t(M)$ определим множество комплексов $\Omega^n(M_i, C_{M_i}, k_0, k, p, r)$. По лемме 1 комплексы из такого множества Λ_π-минимальны, поэтому существует функция $f_i \in P_n$, для которой $\mu_{\cap\Lambda_\pi}(f_i) \geqslant 2^{-2^n} \cdot |\Omega^n(M_i, C_{M_i}, k_0, k, p, r)|$, т. е.

$$\log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(f_i) \gtrsim t \cdot m \cdot \tfrac{n \cdot y}{2} \cdot H(x/y) - 2^n \\ \sim t \cdot n \cdot 2^n \cdot C(x, y) > t \cdot c_\pi \cdot n \cdot 2^{n-1}.$$

Ядровые комплексы для различных подмножеств $M_i \in R_t(M)$ отличаются набором собственных вершин ядровых граней C_{M_i}. Поэтому функции f_i различны и $f_i \in Q^n_{\cap\Lambda_\pi}(t)$ для $i = 1, \ldots, r_{m,t}$, т. е. $\left|Q^n_{\cap\Lambda_\pi}(t)\right| \geqslant r_{m,t}$. Для фиксированного t, где $0 < t < 1$, обозначим

$$\hbar(t) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log \sum_{s \geqslant t \cdot m}^{m} \binom{m}{s} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t \leqslant \frac{1}{2}, \\ H(t) & \text{при } \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases}$$

Тогда $\log r_{m,t} \sim m \cdot \hbar(t)$, где $m \sim \frac{2^{n-1}}{e}\varphi(0.3819) > \sigma \cdot 2^n$ и $\sigma > 0.0868$, при $n \to \infty$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. С одной стороны, $\mathcal{M}^n_{\cap\Lambda_\pi} \subseteq \mathcal{M}^n_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{M}^n_{\mathcal{L}=0} \subseteq \mathcal{M}^n_{\mathcal{L}}$. Поэтому существует функция из P_n, для которой не менее $2^{-2^n} \cdot \max\{M_{\cap\Lambda_\pi}(n), M_{\mathcal{L}=0}(n)\}$ комплексов граней являются $\mathcal{L}$-минимальными. С другой стороны, любой $\mathcal{L}$-минимальный комплекс представляется в виде прямого объединения неприводимого комплекса из не более чем 2^n граней и комплекса нулевой $\mathcal{L}$-сложности. Поэтому

$$2^{-2^n} \cdot \max\{M_{\cap\Lambda_\pi}(n), M_{\mathcal{L}=0}(n)\} < \mu_{\mathcal{L}}(n) < G_n(2^n) \cdot M_{\mathcal{L}=0}(n).$$

Если $\log M_{\mathcal{L}=0}(n) = O(n \cdot 2^n)$, то $\log \mu_{\mathcal{L}}(n) \asymp n \cdot 2^n$ при $n \to \infty$, так как

$$n \cdot 2^n \lesssim \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) - 2^n \\ < \log \mu_{\mathcal{L}}(n) < n \cdot 2^n \cdot \log \frac{3}{2} + O(2^n) + O(n \cdot 2^n).$$

Если $n \cdot 2^n = o(\log M_{\mathcal{L}=0}(n))$, то $\log \mu_{\mathcal{L}}(n) \sim \log M_{\mathcal{L}=0}(n)$ при $n \to \infty$, так как

$$\log M_{\mathcal{L}=0}(n) - 2^n < \log \mu_{\mathcal{L}}(n) \\ < n \cdot 2^n \cdot \log \frac{3}{2} + O(2^n) + \log M_{\mathcal{L}=0}(n).$$

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Верхняя оценка. В кратчайших комплексах число граней не превосходит 2^{n-1}. Поэтому по лемме 4 для $1 \leqslant k = o\,(n)$ при $n \to \infty$

$$\log M_{\cap \Lambda_\pi}(n,k) < \log G_{n,k}\left(2^{n-1}\right) \lesssim 2^{n-1} \cdot k \cdot \log \frac{n}{k}.$$

Нижняя оценка. Положим $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $k_0 = \left\lfloor n/\log \frac{n}{k} \right\rfloor$. Тогда

$$\log \binom{k_0}{k} \sim k \log \frac{k_0}{k} \sim k \log \frac{n}{k} - k \log\log \frac{n}{k} \sim k \log \frac{n}{k} \sim \log \binom{n}{k},$$

так как $1 \leqslant k = o\,(n)$, $k_0 = o\,(n)$ и $k = o\,(k_0)$ при $n \to \infty$. Параметр p выберем так, чтобы $\left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right| = o\,(2^n)$ при $n \to \infty$ и, следовательно,

$$c_{k_0}(n) - \left|B^n \setminus S^n_{r-p,r+p}\right| \sim c_{k_0}(n) \sim 2^{n-1}/e.$$

В случае $k/\sqrt{n} \to \infty$ положим $p = \left\lfloor k/\log \frac{k}{\sqrt{n}} \right\rfloor$, тогда $p = o\,(k)$ и $p/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$. По лемме 5 существует ядровой комплекс M из $m \sim 2^{n-1}/e$ граней размерности k_0 такой, что $C_M \subset S^n_{r-p,r+p}$. Для комплекса M и параметров k_0, k, r, p может быть определено множество комплексов $\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)$. Так как $p = o\,(k)$ и $k = o\,(k_0)$, имеем

$$\log \min\left\{ \binom{\lfloor k_0/2 \rfloor - p}{\lfloor k/2 \rfloor - p}, \binom{\lceil k_0/2 \rceil - p}{\lceil k/2 \rceil - p} \right\} \sim \frac{k_0}{2} \cdot H\left(\frac{k}{k_0}\right) \sim \frac{k}{2} \cdot \log \frac{k_0}{k}$$

при $n \to \infty$. Поэтому в силу леммы 1

$$\log M_{\cap \Lambda_\pi}(n,k) \geqslant \log \left|\Omega^n(M, C_M, k_0, k, p, r)\right| \gtrsim \frac{mk}{2} \cdot \log \frac{k_0}{k} \sim \frac{2^{n-1}}{2e} \cdot k \cdot \log \frac{n}{k}.$$

В случае $n_0 \leqslant k = O\,(\sqrt{n})$ положим $p = \lfloor \sqrt{n} \log n \rfloor$. Тогда по лемме 5 существует ядровой комплекс M из $m \sim 2^{n-1}/e$ граней размерности k_0 такой, что $C_M \subset S^n_{r-p,r+p}$. Определим в кубе B^n множества вершин

$$S_1 = \bigcup_{j \in J} S^n_{m_j, m_j + \lfloor k/2 \rfloor} \quad \text{и} \quad S_2 = \bigcup_{j \in J} S^n_{m_j + \lceil k/2 \rceil + 1, m_j + k + 1},$$

где $J = \{ j \mid -\lceil p/(k+2) \rceil \leqslant j \leqslant \lceil p/(k+2) \rceil \}$ и $m_j = r + j(k+2)$. Так как $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ и $C_M \subset S^n_{r-p,r+p} \subseteq S_1 \cup S_2$, имеем

$$\max\left\{ |C_M \cap S_1|, |C_M \cap S_2| \right\} \geqslant |C_M|/2.$$

Обозначим через $S = \bigcup\limits_{j \in J} S^n_{t_j, t_j+h}$ множество S_1 или S_2, для которого $|C_M \cap S| \geqslant |C_M|/2$, где $h = \lfloor k/2 \rfloor$ или $h = \lceil k/2 \rceil$. Обозначим через M_j ядровой комплекс граней, составленный из граней комплекса M, собственными вершинами которого являются вершины из $C_{M_j} = C_M \cap S^n_{t_j, t_j+h}$. Для $j \in J$ по ядровому комплексу M_j в поясе куба $\widehat{S}_j = S^n_{t_j - \lfloor \frac{k}{4} \rfloor, t_j + h + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor}$ определим множество комплексов

$$\Omega^n_j = \Omega^n \left(M_j, C_{M_j}, k_0, h + 2 \left\lfloor \tfrac{k}{4} \right\rfloor, p_{1,j}, p_{2,j}, r_j \right),$$

где $r_j = t_j + \left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor$ — средний слой пояса $S^n_{t_j, t_j+h}$, $p_{1,j} = r_j - t_j = \left\lfloor \frac{h}{2} \right\rfloor$ и $p_{2,j} = t_j + h - r_j = \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil$. Так как $\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \leqslant p_{1,j} \leqslant p_{2,j} \leqslant \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil$ и $k = o(k_0)$, имеем

$$\log \left| \Omega^n_j \right| \geqslant |C_{M_j}| \cdot \log \binom{\lfloor k_0/2 \rfloor - \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil}{\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor} \gtrsim |C_{M_j}| \cdot \frac{k}{4} \cdot \log \frac{2k_0}{k} \sim \frac{1}{4} \cdot |C_{M_j}| \cdot k \log \frac{n}{k}.$$

Для множества $\widehat{S} = \bigcup\limits_{j \in J} \widehat{S}_j$ подмножества $\widehat{S}_j$ являются компонентами связности, так как $h + 2 \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor < k + 1$.

Прямым объединением множеств комплексов граней $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ в кубе B^n, не имеющих общих граней, т. е. принадлежащих одновременно некоторым комплексам из множеств $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, будем называть множество комплексов $\{M \mid M = M_1 \cup M_2,\ M_1 \in \mathcal{G}_1,\ M_2 \in \mathcal{G}_2\}$.

Обозначим через $\Omega^n(\widehat{S})$ множество комплексов, получающихся прямым объединением множеств комплексов Ω^n_j для $j \in J$. Тогда

$$\log |\Omega^n(\widehat{S})| = \sum_{j \in J} \log \left| \Omega^n_j \right| \gtrsim \frac{1}{4} \cdot k \log \frac{n}{k} \cdot \sum_{j \in J} |C_{M_j}| \geqslant \frac{1}{8} \cdot |C_M| \cdot k \log \frac{n}{k}.$$

Из леммы 3 следует, что $\Omega^n(\widehat{S}) \subset \mathcal{M}^{n,k}_{\cap \Lambda_\pi}$. Поэтому

$$\log M_{\cap \Lambda_\pi}(n, k) \geqslant \log |\Omega^n(\widehat{S})| \gtrsim \frac{2^{n-1}}{8e} \cdot k \log \frac{n}{k} \quad \text{при } n \to \infty.$$

В случае $1 \leqslant k \leqslant n_0$ используем Λ_π-минимальные комплексы граней размерности k из множества комплексов $\Omega^n_{t-k,t}$ в поясе $S^n_{t-k,t}$ единичного куба B^n (см. следствие 1). Для множества $S = \left\{ S^n_{m_j - k, m_j},\ j = 0, \ldots, m \right\}$, где $m_j = \lfloor \frac{n}{2} - \sqrt{n} \cdot \log n \rfloor + j \cdot (k+2)$ и $m = \left\lfloor \frac{2\sqrt{n}}{k+2} \cdot \log n \right\rfloor$, подмножества $S^n_{m_j - k, m_j}$ являются компонентами связности в единичном кубе B^n.

Обозначим через $\Omega^n(S)$ множество комплексов, получающихся прямым объединением множеств комплексов $\Omega^n_{m_j-k,m_j}$, $j=0,\ldots,m$. Тогда

$$\log\left|\Omega^n(S)\right| = \sum_{j=0}^{m}\log\left|\Omega^n_{m_j-k,m_j}\right| = \sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m_j}\log\tbinom{m_j}{k},$$

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m_j} = \sum_{i}\binom{n}{q+i\,(k+2)} - o\left(2^n\right) \sim \frac{2^n}{k+2},$$

где $0\leqslant q<k+2$, и $\log\binom{m_j}{k}\sim k\log\frac{n}{k}$ для $m_j\sim n/2$. Из леммы 3 следует, что $\Omega^n(S)\subset\mathcal{M}^{n,k}_{\cap\Lambda_\pi}$. Поэтому

$$\log M_{\cap\Lambda_\pi}(n,k)\gtrsim\frac{2^n}{k+2}\cdot k\log\frac{n}{k}\qquad\text{при } n\to\infty.$$

Теорема 5 доказана.

4. Открытые проблемы

Для кратчайших комплексов граней во всех известных случаях обоснованием l-минимальности комплекса M является предъявление интервально независимого множества вершин C для множества N_M такого, что число вершин в C совпадает с числом граней в комплексе M. Очевидно, что в любом комплексе, эквивалентном M, число граней не может быть меньше числа вершин в C. Поэтому возникает вопрос о справедливости следующего утверждения.

Утверждение. *В единичном n-мерном кубе мощность максимального интервально независимого множества для подмножества вершин куба совпадает с числом граней в кратчайшем комплексе граней, которые покрывают это подмножество вершин.*

В случае несправедливости этого утверждения представляются интересными для исследования вопросы о мощности максимального интервально независимого множества вершин для почти всех булевых функций и сложности алгоритма построения максимального интервально независимого множества вершин для произвольного подмножества вершин в единичном кубе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискрет. математика и мат. вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 99–148.

2. **Вебер К.** О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм // Проблемы кибернетики. — 1979. — Т. 36. — С. 129–158.
3. **Журавлев Ю. И.** О различных понятиях минимальности д.н.ф. // Сиб. мат. журн. — 1960. — Т. 1, № 4. — С. 609–611.
4. **Журавлев Ю. И.** Алгоритмы построения минимальных д.н.ф. // Дискрет. математика и мат. вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. — С. 67–98.
5. **Лин Син-Лян.** О сравнении сложностей минимальных и кратчайших дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. — 1967. — Т. 18. — С. 11–44.
6. **Сапоженко А. А., Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятности. Мат. статистика. Теор. кибернетика. — 1987. — Т. 25. — С. 68–116.
7. **Чухров И. П.** О числе минимальных дизъюнктивных нормальных форм // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 6. — С. 1335–1339.
8. **Чухров И. П.** О ядровых и кратчайших комплексах граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 75–94.
9. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. — М.: Высш. шк., 2003. — 384 с.

Чухров Игорь Петрович,
e-mail: chip@icad.org.ru

Статья поступила
18 июня 2011 г.