ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2012. Том 19, № 3. С. 65–78

УДК 519.8

ЗАДАЧА OPEN SHOP С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ НА ДВУХВЕРШИННОЙ СЕТИ И РАЗРЕШЕНИЕМ ПРЕРЫВАНИЙ *)

А. В. Пяткин, И. Д. Черных

Аннотация. Задача open shop с разрешением прерываний и маршрутизацией является обобщением двух классических задач дискретной оптимизации: NP-трудной метрической задачи коммивояжёра и полиномиально разрешимой задачи теории расписаний open shop с разрешением прерываний. В статье рассматривается частный случай этой задачи, в котором транспортная сеть состоит из двух вершин. Показано, что задача с двумя машинами полиномиально разрешима, а для случая нефиксированного числа машин задача NP-трудна в сильном смысле.

Ключевые слова: задача open shop с маршрутизацией, прерывание операций, NP-полнота.

Введение

В классической задаче open shop с прерываниями [4] даны множества работ $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ и машин $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$, каждая работа J_j должна пройти обработку каждой машиной M_i за p_{ji} единиц времени. Машины могут прерывать выполнение операций и возобновлять их позднее. Семейства интервалов выполнения операций одной работы или одной машины не должны иметь общих внутренних точек. Требуется составить расписание выполнения всех операций, минимизирующее длину расписания $C_{\max}$, т. е. время завершения последней операции. В соответствии со стандартной трёхпольной системой обозначений (см., например, [5]), эта задача обозначается через $O|pmtn|C_{\max}$ (или $Om|pmtn|C_{\max}$, если число машин фиксированно и равно m).

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12–01–00184–а и 12–01–00093–а), EPSRC (grant EP/F064551/1) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракты 14.740.11.0362 и 14.740.11.0868).

Задача open shop с прерываниями полиномиально разрешима для произвольного, в том числе и нефиксированного числа машин [4]. Более того, длина оптимального расписания для этой задачи всегда совпадает с максимумом из наибольшей машинной нагрузки и максимальной длины работы рассматриваемого примера.

В задаче с маршрутизацией предполагается, что работы расположены в вершинах некоторой транспортной сети, заданной неориентированным рёберно-взвешенным графом $G = \langle V, E\rangle$, в котором вес ребра τ_{ij} соответствует времени, затрачиваемому машинами на передвижение между вершинами v_i и v_j. Машины изначально находятся в выделенной вершине, называемой базой, и должны доехать до соответствующей вершины, прежде чем начать выполнение операции соответствующей работы.

Каждая машина должна посетить все вершины сети и вернуться на базу после выполнения всех своих операций. Требуется построить допустимое расписание, минимизирующее время возвращения $R_{\max}$ последней машины на базу после выполнения всех её операций. Будем обозначать эту задачу через $RO|pmtn|R_{\max}$ (или $ROm|pmtn|R_{\max}$ для фиксированного числа машин m).

В $[1, 2]$ сформулирована и частично исследована задача open shop с маршрутизацией без разрешения прерываний ($RO||R_{\max}$). В [2] доказано, что задача $RO2||R_{\max}$ является NP-трудной даже для случая простейшей транспортной сети, состоящей всего из двух вершин. Для этого «простого» случая в [1] описан $\frac{6}{5}$-приближённый алгоритм. В [2] описан $\frac{7}{4}$-приближённый алгоритм для общего двухмашинного случая и $\frac{m+4}{2}$-приближённый алгоритм для задачи с m машинами. Приближённые алгоритмы с лучшими оценками точности можно найти в [3].

В нашей работе рассматривается задача open shop с разрешением прерываний и маршрутизацией на двухвершинной сети (будем обозначать её через $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ или $ROm|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ для случая нефиксированного и фиксированного числа машин m соответственно). Показано, что задача $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле, в то время как задача $RO2|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ разрешима за линейное время.

Структура работы следующая. В разд. 2 вводятся необходимые обозначения и формулируется постановка задачи. Разд. 3 посвящён случаю двух машин, в разд. 4 рассматривается задача с нефиксированным числом машин и делаются заключительные замечания.

1. Обозначения и постановка задачи

Даны множества машин $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$ и работ $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$. Каждая работа J_j состоит из m операций $O_{j1}, \ldots, O_{jm}$, операция O_{ji} выполняется машиной M_i за p_{ji} единиц времени. Машины могут прерывать выполнение операций и возобновлять их позднее. Семейства интервалов выполнения любых двух операций одной работы или одной машины не должны иметь общих внутренних точек.

Работы расположены в двух вершинах v_1 и v_2, находящихся на расстоянии τ друг от друга. Множество работ, расположенных в вершине v_k, будем обозначать через $\mathcal{J}_k$, $k = 1, 2$. Таким образом, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 = \{J_1, \ldots, J_n\}$. Изначально все машины находятся в вершине v_1, называемой *базой*, и должны вернуться туда после выполнения всех своих операций.

Через $s_S(O)$ и $c_S(O)$ будем обозначать моменты начала и завершения выполнения операции (или фрагмента операции) O в расписании S. Пусть O' и O'' — два фрагмента операций одной машины, находящихся в разных вершинах. Тогда для любого допустимого расписания S должно выполняться одно из двух неравенств:

$$s_S(O'') \geqslant c_S(O') + \tau \quad \text{или} \quad s_S(O') \geqslant c_S(O'') + \tau.$$

Если первая операция, выполняемая машиной, расположена в вершине v_2, то её выполнение должно начаться не ранее момента τ.

Моментом остановки машины M_i в расписании S называется

$$R_i(S) = \max\{\max_{J_j \in \mathcal{J}_1} c_S(O_{ji}), \max_{J_j \in \mathcal{J}_2} c_S(O_{ji}) + \tau\}.$$

Целью является построение допустимого расписания S минимальной длины $R_{\max}(S) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} R_i(S)$.

Для заданного примера I задачи $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ будем использовать следующие обозначения:

$R^*_{\max}(I)$ — длина оптимального расписания;

$\ell_i(I) \doteq \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ji}$ — нагрузка машины M_i;

$\ell_{\max}(I) \doteq \max\limits_{i=1,\ldots,m} \ell_i(I)$ — максимальная нагрузка машины;

$d_j(I) \doteq \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ji}$ — длина работы J_j;

$d^k_{\max}(I) \doteq \max\limits_{J_j \in \mathcal{J}_k} d_j(I)$ — максимальная длина работы из вершины v_k, $k = 1, 2$;

$d_{\max}(I) \doteq \max_k d^k_{\max}(I)$ — максимальная длина работы.

В [1] для задачи $RO||V| = 2|R_{\max}$ (без прерываний) вводится следующая нижняя оценка оптимума:

$$R^*_{\max}(I) \geqslant \overline{R}(I) \doteq \max\left\{\ell_{\max}(I) + 2\tau, d^1_{\max}(I), d^2_{\max}(I) + 2\tau\right\}. \qquad (1)$$

Нетрудно заметить, что она справедлива и для задачи с разрешением прерываний.

Далее в случаях, когда это не вносит разночтений, обозначение примера I будем опускать.

2. Полиномиальный алгоритм для случая двух машин

В [2] показано, что задача $RO2||V| = 2|R_{\max}$ NP-трудна, а в [1] — что оптимум этой задачи всегда лежит в интервале $\left[\overline{R}, \frac{6}{5}\overline{R}\right]$, и описан алгоритм линейной трудоёмкости, гарантированно строящий расписание, длина которого лежит в этом интервале. Таким образом, в силу (1) этот алгоритм является $\frac{6}{5}$-приближённым.

Основной целью этого раздела является описание алгоритма линейной трудоёмкости, строящего для задачи $RO2|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ расписание длины $\overline{R}$. Отсюда, в частности, следует, что эта задача полиномиально разрешима.

В основе алгоритма лежит следующая процедура склеивания работ. Пусть I — пример задачи $RO2|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$, J' — подмножество некоторых работ из примера I, расположенных в одной вершине. Будем говорить, что пример I' получен из примера I *склеиванием* множества J', если

$$\mathcal{J}(I') = (\mathcal{J}(I) \setminus J') \cup \{J_{j'}\}, \qquad \text{где } p_{j'i} = \sum_{j \in J'} p_{ji}.$$

Пример $\widetilde{I}$ называется *склейкой* примера I, если он получен из I последовательным применением операции склеивания.

Очевидно, что допустимое расписание для склейки $\widetilde{I}$ примера I можно интерпретировать как допустимое расписание примера I, рассматривая операцию склеенной работы как блок соответствующих операций примера I, выполняемых без простоев в произвольном порядке.

Лемма 1. *Для любого примера I задачи $RO2|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ существует его склейка $\widetilde{I}$, обладающая следующими свойствами*:

(i) $\overline{R}(\widetilde{I}) = \overline{R}(I)$,

(ii) *в одной из вершин примера $\widetilde{I}$ расположено не более трёх работ, в другой — не более одной работы.*

Доказательство. При склеивании работ нагрузки машин не изменяются, следовательно, для того чтобы выполнялось (i), достаточно соблюдать ограничение: склеивать работы из вершины v_1 можно тогда, когда сумма их длин не превышает $\overline{R}(I)$, а для работ из v_2 сумма их длин не должна превышать $\overline{R}(I) - 2\tau$.

Заметим, что

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} d_j = \ell_1 + \ell_2 \leqslant 2(\overline{R} - 2\tau),$$

следовательно, по крайней мере в одной вершине сумма длин всех работ не превышает $\overline{R} - 2\tau$. Проведём склеивание множества всех работ из этой вершины. По сделанному выше замечанию это не увеличит $\overline{R}$. Другую вершину обозначим v_k.

Назовём работу $J_j \in \mathcal{J}_k$ *большой*, если $d_j > \frac{\overline{R}}{2} - \tau$. Остальные работы из $\mathcal{J}_k$ будем называть *малыми*. Если в $\mathcal{J}_k$ есть по крайней мере две малые работы, то произведём их склеивание. Поскольку длина полученной работы не превосходит $\overline{R} - 2\tau$, операция склеивания не увеличит $\overline{R}$. Производим склеивание малых работ до тех пор, пока их останется не более одной.

Если в полученном семействе $\mathcal{J}_k$ имеются две большие работы J_{j_1} и J_{j_2}, то проводим склеивание множества $\mathcal{J}_k \setminus \{J_{j_1}, J_{j_2}\}$. Эта операция не увеличит $\overline{R}$, поскольку

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_k \setminus \{J_{j_1}, J_{j_2}\}} d_j \leqslant 2\ell_{\max} - d_{j_1} - d_{j_2} < 2\ell_{\max} - \overline{R} + 2\tau \leqslant \overline{R} - 2\tau.$$

После этого склеивания в вершине v_k остаётся не более трёх работ. Лемма 1 доказана.

Заметим, что склеивание, описанное в доказательстве леммы 1, может быть проделано за линейное время.

Рассмотрим теперь пример $\widetilde{I}$, состоящий не более чем из четырёх работ, причём в одной из вершин находится одна работа.

Без ограничения общности считаем, что в другой вершине имеется три работы (если меньше трёх, то добавим необходимое число фиктивных работ с нулевыми длительностями операций).

В дальнейшем для описания расписаний будем использовать так называемые *схемы расписания*, задающие такой частичный порядок предшествования на множестве фрагментов операций, в котором любые два фрагмента операций одной работы или одной машины сравнимы между собой. Эти частичные порядки будем описывать с помощью графа H, содержащего по одной вершине для каждого фрагмента плюс две фиктивные вершины α и β, обозначающие начало и конец расписания. Вершины имеют вес, равный длительности выполнения соответствующего фрагмента операции, вершины α и β имеют нулевой вес. Дуги этого графа могут иметь вес, равный 0 либо τ (если смежные вершины графа H соответствуют фрагментам операций одной машины из разных вершин графа G). Запись $O' \xrightarrow{x} O''$ означает наличие в графе H дуги (O', O'') веса x, задающей такое ограничение на расписание, что фрагмент O'' может выполняться только по завершении фрагмента O', причём $s(O'') \geqslant c(O')+x$. (Если вес дуги x равен 0, то его в такой записи указывать не будем.)

Определим раннее расписание относительно схемы H следующим образом. Для каждой вершины v графа H зададим время окончания выполнения соответствующего фрагмента как длину наибольшего пути из α в v. *Длиной пути* называется сумма весов входящих в него вершин и дуг. Тогда длина полученного раннего расписания равняется длине критического пути в графе H (т. е. пути наибольшей длины из α в β).

Рассмотрим два случая: когда имеются три работы в первой вершине и когда три работы в вершине v_2.

2.1. Случай 1. $|\mathcal{J}_1(\widetilde{I})| = 3$, $|\mathcal{J}_2(\widetilde{I})| = 1$. Обозначим работы из вершины v_1 через J_1, J_2, J_3, единственную работу из v_2 — через J_4, а их операции на первой и второй машине через a_j и b_j соответственно, $j = 1, \ldots, 4$. Длительности этих операций будем обозначать теми же буквами.

Сравним длительности операций в трёх парах: a_2 и b_1, a_3 и b_2, a_1 и b_3. По крайней мере в двух парах сравнение будет иметь одинаковый результат. При необходимости перенумеруем машины и работы в первой вершине так, чтобы выполнялись соотношения

$$a_2 \geqslant b_1, \quad a_3 \geqslant b_2. \tag{2}$$

Рассмотрим раннее расписание S_1, построенное по схеме, изображённой на рис. 1.

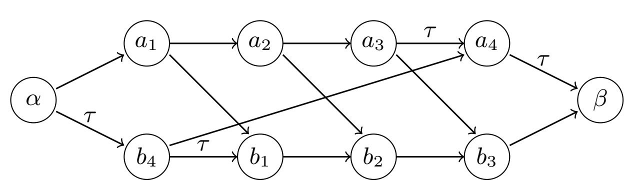

Рис. 1

Возможны шесть вариантов критического пути в этой схеме:

1) $\alpha \to a_1 \to a_2 \to a_3 \xrightarrow{\tau} a_4 \xrightarrow{\tau} \beta$;

2) $\alpha \xrightarrow{\tau} b_4 \xrightarrow{\tau} b_1 \to b_2 \to b_3 \to \beta$;

3) $\alpha \xrightarrow{\tau} b_4 \to a_4 \xrightarrow{\tau} \beta$;

4) $\alpha \to a_1 \to a_2 \to a_3 \to b_3 \to \beta$;

5) $\alpha \to a_1 \to a_2 \to b_2 \to b_3 \to \beta$;

6) $\alpha \to a_1 \to b_1 \to b_2 \to b_3 \to \beta$.

Заметим, что длины первых трёх путей не превышают $\overline{R}$, следовательно, если один из них критический, то расписание S_1 оптимально. Кроме того, в силу (2) длины пятого и шестого путей не превосходят длины четвёртого. Пусть

$$R_{\max}(S_1) > \overline{R}. \tag{3}$$

Тогда $R_{\max}(S_1) = a_1 + a_2 + a_3 + b_3$ и $b_3 \geqslant 2\tau + a_4$.

Разделим операцию b_3 на два фрагмента b'_3 и b''_3 так, что $b''_3 = 2\tau + a_4$, и построим раннее расписание S_2 по схеме, изображённой на рис. 2.

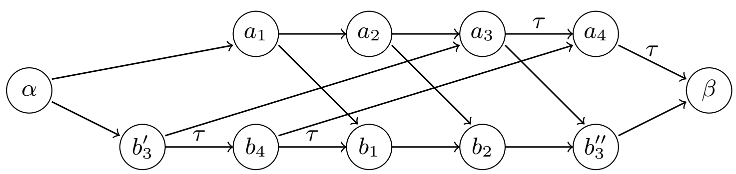

Рис. 2

В силу (2), (3) и соотношения $b'_3 + b_4 + a_4 + 2\tau = b'_3 + b_4 + b''_3 \leqslant \ell_2$ имеем

$$R_{\max}(S_2) = \max\{\ell_1 + 2\tau, \ell_2 + 2\tau, d_3\} \leqslant \overline{R}.$$

Следовательно, расписание S_2 оптимально.

2.2. Случай 2. $|\mathcal{J}_1| = 1$, $|\mathcal{J}_2| = 3$. Обозначим работы из вершины v_2 через J_2, J_3, J_4, а единственную работу из v_1 — через J_1. Как и в случае 1, перенумеруем при необходимости работы и машины так, чтобы выполнялись соотношения

$$a_2 \geqslant b_3, \quad a_3 \geqslant b_4. \tag{4}$$

Рассмотрим раннее расписание S_1, построенное по схеме, изображённой на рис. 3.

Рассмотрим варианты критических путей в этой схеме. За исключением тривиальных (длина которых не превосходит $\overline{R}$) рассмотрению подлежат следующие:

1) $\alpha \xrightarrow{\tau} b_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \xrightarrow{\tau} \beta$;

2) $\alpha \xrightarrow{\tau} b_2 \to b_3 \to a_3 \to a_4 \xrightarrow{\tau} \beta$;

3) $\alpha \xrightarrow{\tau} b_2 \to b_3 \to b_4 \to a_4 \xrightarrow{\tau} \beta$.

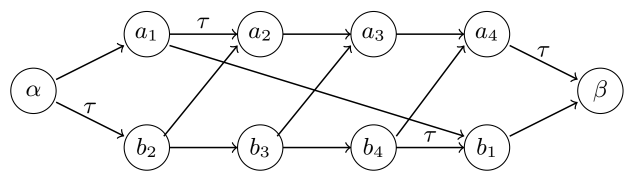

Рис. 3

С учётом (4) длины второго и третьего путей не превосходят длины первого. Пусть $R_{\max}(S_1) > \overline{R}$. Тогда

$$R_{\max}(S_1) = 2\tau + b_2 + a_2 + a_3 + a_4$$

и $b_2 > a_1$.

Это расписание несложно перестроить в расписание длины $\overline{R}$ следующим образом. Если $a_4 \geqslant b_2 - a_1$, то разделим операцию a_4 на два фрагмента a_4' и a_4'' так, что $a_4' = b_2 - a_1$. Построим расписание S_2 по схеме, изображённой на рис. 4.

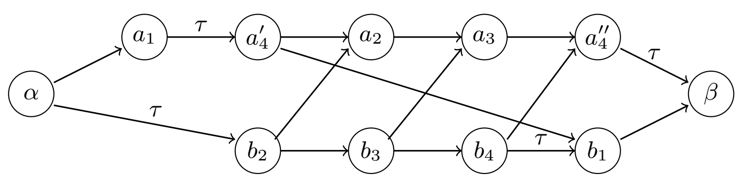

Рис. 4

В силу (4) и выбора a_4' длина расписания S_2 не больше $\ell_{\max} + 2\tau \leqslant \overline{K}$, следовательно, оно оптимально.

Если $a_4 < b_2 - a_1$, то поступаем аналогично: разделяем операцию a_3 на два фрагмента a_3' и a_3'' так, что

$$a_3' + a_4 = \min\{b_2 - a_1, a_3 + a_4\},$$

и переносим фрагмент a'_3 и операцию a_4 в интервал простоя между a_1 и a_2. Длина полученного расписания не превышает

$$\max\{\ell_{\max} + 2\tau, b_2 + a_2 + 2\tau\} \leqslant \overline{R}.$$

Значит, это расписание оптимально.

В каждом из рассмотренных случаев удалось построить расписание длины $\overline{R}$ с не более чем одним прерыванием. Трудоёмкость построения расписания совпадает с трудоёмкостью процедуры склеивания. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Длина оптимального расписания для любого примера задачи* $RO2|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ *равна* $\overline{R}$. *Такое расписание с не более чем одним прерыванием может быть построено за линейное от числа работ время.*

3. NP-трудность задачи с нефиксированным числом машин

Задача open shop с маршрутизацией на двух вершинах в форме верификации свойств выглядит следующим образом.

Задача $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max} \leqslant K$**.** *Дан пример* I *этой задачи. Определить, существует ли допустимое расписание* S *примера* I *такое, что* $R_{\max}(S) \leqslant K$.

Основной результат раздела — доказательство NP-полноты задачи $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max} \leqslant K$, когда число машин m является частью входа. Для этого сведём к ней следующую известную NP-полную задачу [6].

Задача M3V (монотонная 3-выполнимость при различных литералах). *Дан набор из* q *дизъюнкций без отрицаний над множеством из* p *переменных, причём каждая дизъюнкция содержит ровно три переменные. Существует ли назначение истинности для переменных такое, что каждая дизъюнкция содержит по крайней мере одну истинную и одну ложную переменную?*

Теорема 2. *Задача* $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max} \leqslant K$ NP-*полна в сильном смысле.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный пример I задачи M3V, содержащий q дизъюнкций над множеством из p переменных. Можно считать, что все переменные, входящие в каждую из дизъюнкций, различны. Действительно, если пример содержит дизъюнкцию вида $x \vee x \vee x$, то ответ «нет»; дизъюнкция же вида $x \vee x \vee y$ в задаче M3V эквивалентна четвёрке дизъюнкций $x \vee y \vee z$, $x \vee y \vee w$, $x \vee y \vee v$, $v \vee w \vee z$, где v, w, z — дополнительные переменные, не входящие ни в какие другие дизъюнкции.

Построим пример задачи $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ с $3(q+p)$ машинами и $3p + 7q$ работами по данному примеру I следующим образом. Каждой переменной x_i поставим в соответствие три машины M_{3i-2}, M_{3i-1} и M_{3i}, а каждой дизъюнкции C_j — машины $M_{3p+3j-2}$, $M_{3p+3j-1}$ и M_{3p+3j}. Для каждого фиксированного $i = 1, 2, \ldots, p$ зададим три работы:

работы J_i^1 и J_i^2, расположенные в вершине v_2, имеющие операции единичной длительности на машинах M_{3i-2}, M_{3i-1} и M_{3i} и нулевые операции на всех остальных машинах;

работу J_i^3, расположенную в вершине v_1, её единственная ненулевая операция выполняется машиной M_{3i-1} и имеет длительность 1.

Для каждого фиксированного $j = 1, 2, \ldots, q$ зададим четыре работы:

работу J_{p+j}^1, расположенную в вершине v_2, её ненулевые операции выполняются машинами $M_{3p+3j-2}, M_{3p+3j-1}$ и M_{3p+3j} за время 1;

работу J_{p+j}^k, $k = 2, 3, 4$, расположенную в вершине v_2 с единственной ненулевой операцией на машине $M_{3p+3j+k-4}$ длительности 1.

Кроме того, каждому вхождению переменной x_i в дизъюнкцию C_j поставим в соответствие работу $J^{i,j}$, расположенную в вершине v_1. Обозначим через $k \in \{1, 2, 3\}$ порядковый номер переменной x_i в дизъюнкции C_j, а через t_i — число вхождений переменной x_i во все дизъюнкции. Тогда работа $J^{i,j}$ имеет операцию длительности 1 на машине $M_{3p+3j-k+1}$ и операцию длительности $1/t_i$ на машине M_{3i}. Поскольку всего имеется $3q$ вхождений переменных в дизъюнкции, пример содержит $3q$ работ вида $J^{i,j}$.

Положим $K = 5$ и $\tau = 1$. Заметим, что длина записи построенного примера задачи $RO|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ не превышает полинома от длины записи примера I эталонной задачи. Действительно, число операций ограничивается полиномом от p и q, все длительности операций целые, за исключением рациональных длительностей операций работ $J^{i,j}$, в которых знаменатель не превосходит q.

Покажем, что допустимое расписание длины K для описанного примера существует тогда и только тогда, когда имеется такое назначение переменных, что каждая дизъюнкция содержит хотя бы по одной истинной и ложной переменной.

Пусть указанное назначение истинности существует. Построим расписание (без прерываний) следующим образом. Для каждой переменной x_i машина M_{3i-2} едет в вершину v_2, выполняет свою операцию работы J_i^1, простаивает в течении одной единицы времени, выполняет операцию работы J_i^2 и возвращается обратно. Машины M_{3i-1} и M_{3i} действуют поразному в зависимости от назначения переменной x_i. Если переменная x_i истинна, то машина M_{3i-1} едет в вершину v_2, выполняет свои работы в порядке J_i^2, J_i^1, возвращается в вершину v_1 и выполняет работу J_i^3, тогда как машина M_{3i} сначала выполняет все работы $J^{i,j}$ (в произвольном порядке), затем едет в вершину v_2, выполняет работы в порядке J_i^2, J_i^1 и возвращается обратно. Если же переменная x_i ложна, то машина M_{3i-1} сначала выполняет работу J_i^3, затем едет в вершину v_2, выполняет свои работы в порядке J_i^2, J_i^1 и возвращается в вершину v_1, тогда как машина M_{3i} сначала едет в вершину v_2, выполняет работы в порядке J_i^2, J_i^1, затем возвращается в вершину v_1 и выполняет все работы $J^{i,j}$ в произвольном порядке (рис. 5).

Пусть дизъюнкция C_j содержит переменные x_a, x_b и x_c, причём x_a истинна, а x_b ложна в рассматриваемом назначении. Каждая из работ $J^{a,j}$, $J^{b,j}$ и $J^{c,j}$ имеет единичную операцию на одной из машин $M_{3p+3j-2}$, $M_{3p+3j-1}$ и M_{3p+3j} в соответствии с порядком записи дизъюнкции C_j. Переобозначим эти машины через M_a, M_b и M_c так, что единичная операция работы $J^{z,j}$ выполняется машиной M_z, $z \in \{a, b, c\}$. Также каждая из этих машин выполняет операцию работы J_{p+j}^1 и операцию одной из работ J_{p+j}^2, J_{p+j}^3 и J_{p+j}^4. Переобозначим эти работы через J_{p+j}^a, J_{p+j}^b и J_{p+j}^c так, что операция работы J_{p+j}^z выполняется машиной M_z, $z \in \{a, b, c\}$.

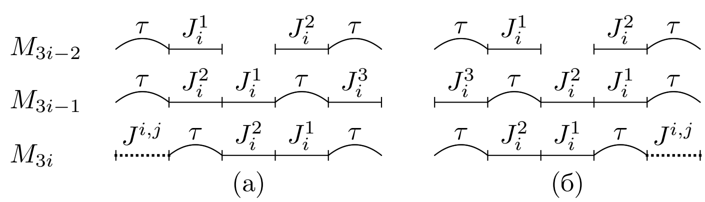

Рис. 5. Частичное расписание для машин, соответствующих переменной x_i, когда x_i (а) истинна и (б) ложна

Опишем расписание машин M_a, M_b и M_c. Машина M_a сначала едет в вершину v_2, выполняет там работы в порядке J_{p+j}^1, J_{p+j}^a, возвращается в вершину v_1 и выполняет работу $J^{a,j}$. Машина M_b сначала выполняет работу $J^{b,j}$, затем едет в вершину v_2, где выполняет свои работы в порядке J_{p+j}^b, J_{p+j}^1, после чего возвращается на базу. Расписание машины M_c строится в зависимости от значения переменной x_c. Если переменная x_c истинна, то машина M_c сначала едет в вершину v_2, выполняет там работы в порядке J_{p+j}^c, J_{p+j}^1, возвращается в вершину v_1 и выполняет работу $J^{c,j}$. В противном случае машина M_c сначала выполняет работу $J^{c,j}$, затем едет в вершину v_2, выполняет там свои работы в порядке J^1_{p+j}, J^c_{p+j}, после чего возвращается на базу. Таким образом, единичные операции работ $J^{i,j}$ выполняются либо в интервале $[0,1]$, либо в интервале $[4,5]$ в зависимости от истинности переменной x_i (рис. 6). Нетрудно проверить, что указанное расписание является допустимым длины 5.

Для доказательства в обратную сторону выведем сначала несколько свойств допустимого расписания длины 5 для построенного примера. Прежде всего заметим, что каждая машина имеет нагрузку 2 или 3 и должна выполнить хотя бы одну работу в вершине v_2. Отсюда следует, что каждая машина должна выполнить ровно две поездки (из вершины v_1 в v_2 и обратно).

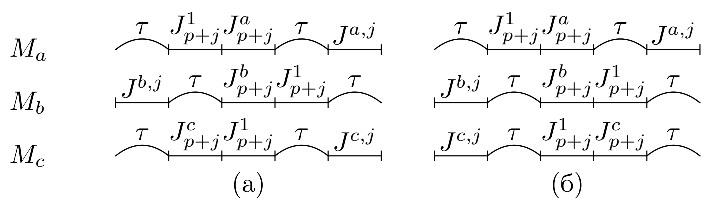

Рис. 6. Частичное расписание для машин, соответствующих дизъюнкции C_j, содержащей истинную переменную x_a и ложную x_b при условии, если третья переменная x_c (а) истинна; (б) ложна

Свойство 1. *Для каждого $i = 1, 2, \ldots, p$ в любом расписании длины 5 либо все операции работ $J^{i,j}$ на машине M_{3i} выполняются в интервале $[0,1]$, либо все они выполняются в интервале $[4,5]$.*

Действительно, работы J^1_i и J^2_i расположены в вершине v_2, и их длины равны 3. Следовательно, каждая из них полностью выполняется в интервале $[1,4]$. В частности, каждая из них выполняется на одной из машин M_{3i-2}, M_{3i-1} или M_{3i} в моменты времени 1 и 4. Ясно, что ни машина M_{3i-1}, ни M_{3i} не может быть занята во второй вершине в оба эти момента времени (иначе она не успеет выполнить свои работы в вершине v_1). Следовательно, одна из этих машин работает в вершине v_2 в момент времени 1, а другая — в момент времени 4. Но тогда первая из них должна выполнять все свои работы в вершине v_1 в интервале $[4,5]$, а вторая — в интервале $[0,1]$, откуда и вытекает требуемое свойство.

Свойство 2. *Если дизъюнкция C_j содержит переменные x_a, x_b и x_c, то в расписании длины 5 из трёх работ $J^{a,j}$, $J^{b,j}$, $J^{c,j}$ хотя бы одна выполняется в интервале $[0,1]$ и хотя бы одна — в интервале $[4,5]$.*

Действительно, работа J^1_{p+j} выполняется в вершине v_2 и имеет длину 3. Следовательно, она полностью выполняется в интервале $[1,4]$. В частности, одна из машин $M_{3p+3j-2}$, $M_{3p+3j-1}$ или M_{3p+3j} должна работать в вершине v_2 в момент времени 1, а другая — в момент времени 4 (это не может быть та же самая машина, так как иначе она не смогла бы выполнить свою работу в вершине v_1). Тогда первая из этих машин должна выполнить свою работу в вершине v_1 в интервале $[4, 5]$, а вторая — в интервале $[0, 1]$, откуда следует доказываемое свойство.

Пусть теперь для построенного примера имеется допустимое расписание длины 5. Назначим переменной x_i значение «истина», если все работы $J^{i,j}$ выполняются на машине M_{3i} в интервале $[0, 1]$, и «ложь» в противном случае. По свойству 1 для ложных переменных все работы $J^{i,j}$ выполняются на машине M_{3i} в интервале $[4, 5]$.

По свойству 2 для каждой дизъюнкции $C_j = x_a \vee x_b \vee x_c$ хотя бы одна из трёх работ $J^{a,j}$, $J^{b,j}$, $J^{c,j}$ выполняется в интервале $[0, 1]$ и хотя бы одна — в интервале $[4, 5]$. Таким образом, каждая дизъюнкция содержит как истинную, так и ложную переменную, что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана.

Наиболее интересными из открытых вопросов являются следующие.

(i) Является ли задача $ROm|pmtn, |V| = 2|R_{\max}$ полиномиально разрешимой в случае фиксированного числа машин?

(ii) Если нет, то каково наибольшее число машин, для которого задача остаётся полиномиально разрешимой? В частности, является ли полиномиально разрешимой задача с тремя машинами?

(iii) Является ли задача $RO|pmtn, |V| = 2, n = 2|\,R_{\max}$, в которой число работ равно двум, полиномиально разрешимой?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Averbakh I., Berman O., Chernykh I.** A $\frac{6}{5}$-approximation algorithm for the two-machine routing open-shop problem on a 2-node network // Eur. J. Oper. Res. — 2005. — Vol. 166, N 1. — P. 3–24.
2. **Averbakh I., Berman O., Chernykh I.** The routing open-shop problem on a network: complexity and approximation // Eur. J. Oper. Res. — 2006. — Vol. 173, N 2. — P. 531–539.
3. **Chernykh I., Dryuck N., Kononov A., Sevastyanov S.** The routing open shop problem: new approximation algorithms // Approximation and online algorithms: 7th Int. Workshop WAOA 2009 (Copenhagen, Denmark, September 10–11, 2009). Revised Papers. — Berlin: Springer-Verl., 2010. — P. 75–85. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5893).
4. **Gonzalez T., Sahni S.** Open shop scheduling to minimize finish time // J. ACM. — 1976. — Vol. 23, N 4. — P. 665–679.

5. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** Sequencing and scheduling: algorithms and complexity // Logistics of production and inventory. — Amsterdam: Elsevier, 1993. — P. 445–522. (Handb. Oper. Res. Manag.; Vol. 4.)
6. **Williamson D. P., Hall L. A., Hoogeveen J. A., Hurkens C. A. J., Lenstra J. K., Sevastianov S.V., Shmoys D. B.** Short shop schedules // Oper. Res. — 1997. — Vol. 45, N 2. — P. 288–294.

Пяткин Артём Валерьевич,
e-mail: artem@math.nsc.ru
Черных Илья Дмитриевич,
e-mail: idchern@math.nsc.ru

Статья поступила
8 августа 2011 г.

Переработанный вариант —
22 ноября 2011 г.