ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 15–34

УДК 333.1:519.86

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВАЛЬРАСОВСКОГО РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ МЕЖРЕГИОНАЛЬНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ *)

В. А. Васильев

Аннотация. Устанавливаются достаточно общие условия существования равновесия Вальраса для моделей межрегионального взаимодействия, изучавшихся в ряде исследований по многорегиональным экономическим системам. В отличие от сложных технических предположений, фигурирующих в анонсированной ранее теореме существования, найденные условия представляют собой простые модификации стандартных требований равновесного анализа — отсутствие регионального «рога изобилия» и строгая автаркичность всех участников модели. При этом строгая автаркичность является прямым аналогом известного условия положительности начальных запасов для классической модели обмена. Помимо доказательства основного результата обсуждается его приложение к сравнительному анализу неблокируемых и равновесных по Вальрасу и Эджворту состояний рассматриваемых многорегиональных экономических систем.

Ключевые слова: модель межрегионального взаимодействия, вальрасовское равновесие, ядро, k-дробление модели, равновесие Эджворта.

Введение

Устанавливаются достаточно общие условия существования равновесия Вальраса для моделей межрегионального взаимодействия, изучавшихся в ряде работ по многорегиональным экономическим системам (см., например, [4, 5, 8, 11]). В отличие от сложных предположений, фигурирующих в теореме существования, анонсированной в [11], вышеуказанные условия представляют собой упрощённые версии традиционных

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН «Развитие теории, методологии и прикладных экономико-математических исследований» и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10–06–00168).

требований отсутствия «рога изобилия» и выполнения условия Слейтера для допустимых множеств участников. Отметим сразу же, что в терминологии работ [4, 5] используемый аналог условия Слейтера означает некоторое усиление требования автаркичности регионов рассматриваемой системы.

Помимо теоремы существования вальрасовского равновесия в работе приводится и одно из её наиболее интересных следствий — новая теорема существования равновесия Эджворта, введённого для моделей межрегионального взаимодействия в [5]. Наряду с относительной простотой и наличием естественной экономической интерпретации к числу важных достоинств новых условий существования равновесия Эджворта относится их сопоставимость с полученными ранее [4, 5] признаками реализуемости неблокируемых состояний. Последнее обстоятельство значительно облегчает сравнительный анализ ядер, вальрасовских равновесий и равновесий Эджворта в исследуемом классе моделей межрегионального взаимодействия.

Как и в одной из традиционных схем равновесного анализа, ключевую роль в предлагаемом подходе к изучению условий существования играет известная геометрическая лемма Гейла (см. [12], а также [3, 9]). При этом в отличие от [11] большое внимание уделяется такой особенности рассматриваемых моделей, как полиэдральность допустимых множеств и линейность целевых функций их участников. Учёт этой особенности и позволяет получить достаточно общие условия существования изучаемых вальрасовских равновесий.

1. Модель $\mathcal{M}$

Рассматриваемая в дальнейшем модель экономического взаимодействия регионов, обменивающихся n транспортабельными видами продукции, имеет вид

$$\mathcal{M} = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R}\rangle,$$

где $R = \{1, \ldots, r\}$ — множество номеров регионов, A^s — матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$, G^s и H^s — матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$, b^s — вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$, d^s — вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Подробное обсуждение интерпретации и ряда важных приложений этой модели и некоторых её обобщений можно найти в [8, 11] (см. так-

же краткую, но достаточно ёмкую и детально структурированную конкретизацию параметров модели $\mathcal{M}$, приведённую в [4]). Отметим лишь, что в отличие от более общей постановки из [8] предполагается, что рассматриваемый далее межрегиональный обмен осуществляется через некоторый единый для всех участников центр. Именно поэтому в приводимом ниже описании ресурсно-технологических возможностей Z_s регионов $s \in R$ их внешние связи представлены лишь переменными вывоза и ввоза без разделения по регионам-контрагентам. Отметим ещё, что возможности региона s модели $\mathcal{M}$ по ввозу (вывозу) k-го продукта из единого для всех регионов списка $\{1, \ldots, n\}$ транспортабельных видов продукции характеризуются k-м столбцом матрицы H^s (G^s), имеющим лишь две ненулевые компоненты: 1 на k-й позиции и $-c_s^v$ на позиции, отвечающей внешнеторговым перевозкам, где c_s^v — транспортные издержки по ввозу единицы продукта k в регион s (k-й столбец матрицы G^s также имеет две ненулевые компоненты: -1 и $-c_s^u$, стоящие на тех же позициях, что и ненулевые элементы в k-м столбце матрицы H^s; здесь c_s^u — транспортные издержки по вывозу единицы продукта k из региона s). Таким образом, каждая из матриц G^s и H^s за вычетом строк транспортных издержек получена из единичной матрицы вычеркиванием столбцов, отвечающих отраслям с нетранспортабельной продукцией (с последующим умножением на -1 для G^s). Подробности, касающиеся других параметров модели $\mathcal{M}$, можно найти в [4].

Упоминавшиеся множества Z_s ресурсно-технологических возможностей регионов $s \in R$ имеют вид

$$Z_s = \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^{l_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \mid \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geqslant b^s + \lambda_s d^s\},$$

где для каждого $s \in R$ неотрицательные вектор-стобцы $x^s = \left(x_i^s\right)_{i=1}^{l_s}$, $u^s = \left(u_j^s\right)_{j=1}^n$, $v^s = \left(v_j^s\right)_{j=1}^n$ определяют объёмы производства, вывоза и ввоза соответственно, а число $\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ — степень достижения целей регионального развития для $s \in R$ (здесь и далее $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле: $x \geqslant y \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i,\ i = 1, \ldots, m$, для любых $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$).

Для оценки качества ресурсно-технологических возможностей (планов) $z^s \in Z_s$ в дальнейшем используются функции t_s, сопоставляющие каждому вектору $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ его последнюю компоненту λ_s:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) = \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R$$

(другими словами, отображения $t_s : Z_s \to \mathbb{R}$ — целевые функции участников $s \in R$, характеризующие степень достижения целей их регионального развития).

Положим $Z = Z_{\mathcal{M}} = \prod_{s \in R} Z_s$ и через $Z(R) = Z_{\mathcal{M}}(R)$ обозначим совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \Big\{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}} \mid \sum_{s \in R} u^s \geqslant \sum_{s \in R} v^s\Big\}$$

(в дальнейшем, когда рассматриваемая модель $\mathcal{M}$ однозначно восстанавливается из контекста, опускаем символ $\mathcal{M}$ и используем сокращения Z, $Z(R)$ и т. п.). В рамках принятой интерпретации из [4] условие сбалансированности $\sum\limits_{s \in R} u^s \geqslant \sum\limits_{s \in R} v^s$ означает, что по каждому из n транспортабельных продуктов k, участвующих в описываемом моделью $\mathcal{M}$ обмене, должно выполняться стандартное условие баланса: суммарный импорт $\sum\limits_{s \in R} v_k^s$ не должен превышать суммарного экспорта $\sum\limits_{s \in R} u_k^s$ (напомним, что согласно принятому в модели $\mathcal{M}$ предположению списки $N_s \subseteq \{1, \ldots, n_s\}$ транспортабельных продуктов регионов $s \in R$ совпадают между собой и содержат ровно n элементов: $N_s = \{1, \ldots, n\},\ s \in R$).

По аналогии с множеством R всех регионов рассматриваются и сбалансированные планы непустых частей R, называемых *коалициями.* Для каждой коалиции $T \subseteq R$ полагаем $Z_T = Z_{\mathcal{M},T} = \prod_{s \in T} Z_s$ и под $Z(T) = Z_{\mathcal{M}}(T)$ будем понимать совокупность сбалансированных планов этой коалиции

$$Z_{\mathcal{M}}(T) = \Big\{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in T} \in Z_{\mathcal{M},T} \mid \sum_{s \in T} u^s \geqslant \sum_{s \in T} v^s\Big\}.$$

Особое место в формулировке ряда утверждений, касающихся коалиционной стабильности равновесных планов, занимают одноэлементные коалиции. Отвечающие им множества сбалансированных планов

$$Z(s) = Z_{\mathcal{M}}(s) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \geqslant v^s\}, \quad s \in R,$$

будем называть также *множествами автаркических планов* соответствующих регионов (здесь и далее используются стандартные сокращения, при которых фигурные скобки при записи одноэлементных множеств опускаются: $Z(s) = Z(\{s\})$, $Z_{\mathcal{M}}(s) = Z_{\mathcal{M}}(\{s\})$ и т. д.). Кроме того, важную роль играет такая характеристика модели $\mathcal{M}$, как множество

сбалансированных планов $Z^0_{\mathcal{M}}(R) = Z_{\mathcal{M}_0}(R)$ её однородной составляющей

$$\mathcal{M}_0 = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s\in R}\rangle,$$

которая отличается от $\mathcal{M}$ только тем, что её начальный ресурсно-технологический потенциал равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

В заключение раздела приведём формулировки некоторых условий из [5], используемых в дальнейшем при сравнительном анализе теорем существования неблокируемых и равновесных планов рассматриваемых моделей: $(M1)$ $Z_{\mathcal{M}}(s) \neq \varnothing$ для каждого $s \in R$; $(M2a)$ $Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}$. Напомним [5], что условие $(M1)$ означает автаркичность регионов $s \in R$ (наличие автономных — сбалансированных по ввозу и вывозу — планов развития регионов $s \in R$), а условие $(M2a)$ — отсутствие системного «рога изобилия» (невозможность ненулевого выпуска при нулевом ресурсно-технологическом потенциале многорегиональной системы $\mathcal{M}$). Для полноты изложения сформулируем также одно из основных условий существования рассматриваемых далее равновесий Эджворта, установленное в [5]:

$$(M3)\ \ \forall z \in Z_{\mathcal{M}}(R)\ \{\ t_j(z^j) > 0 \Rightarrow \exists\, \widetilde{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)\ [\ t_s(\widetilde{z}^s) > t_s(z^s) \quad \text{для каждого } s \in R \setminus j\ ]\}.$$

Содержательный смысл условия $(M3)$, называемого в [5] *ограниченной трансферабельностью модели* $\mathcal{M}$, заключается в том, что для любого плана $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ и состоятельного по этому плану региона $j \in R$ (т. е. такого, что $t_j(z^j) > 0$) существует другой сбалансированный план $\widetilde{z}$, обеспечивающий (быть может, ценой падения $t_j(\widetilde{z}^j) < t_j(z^j)$ уровня региона j) более высокие уровни достижения целей развития всех остальных регионов модели $\mathcal{M}$: $t_s(\widetilde{z}^s) > t_s(z^s)$, $s \in R \setminus j$.

2. Вальрасовское равновесие модели $\mathcal{M}$. Условия существования

Переходя к рассмотрению вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия $\mathcal{M}$, дадим сначала определение бюджетных множества $B_s(p)$ регионов s при ценах $p \in \mathbb{R}^n_+$:

$$B_s(p) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid p \cdot u^s \geqslant p \cdot v^s\}, \quad s \in R$$

(как обычно, через $x \cdot y$ здесь и далее обозначается скалярное произведение $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$). Согласно

упоминавшейся интерпретации региональных составляющих модели $\mathcal{M}$ неравенство $p \cdot u^s \geqslant p \cdot v^s$ формализует стандартное требование торгового баланса для плана $(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$: при указанных ценах p стоимость ввоза не должна превышать стоимости вывоза.

Определение 1 [11]. Будем говорить, что сбалансированный план $\overline{z} = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s)_{s \in R}$ и ненулевой вектор цен $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+$ образуют *равновесие Вальраса* модели $\mathcal{M}$, если для каждого региона $s \in R$ выполняются условия индивидуальной рациональности: $(W1)$ $\overline{p} \cdot \overline{u}^s \geqslant \overline{p} \cdot \overline{v}^s$, $(W2)$ $\overline{\lambda}_s \geqslant \lambda_s$ для каждого $(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in B_s(\overline{p})$.

Таким образом, пара $(\overline{z}, \overline{p})$ является равновесием Вальраса модели $\mathcal{M}$, если $\overline{z}$ — сбалансированный план этой модели (т. е. $\overline{z}$ — элемент множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$), а $\overline{p} = (\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)$ — ненулевой неотрицательный вектор цен, при котором региональные составляющие $\overline{z}^s = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s)$ плана $\overline{z}$ являются решениями задач оптимизации региональных целевых функций t_s на бюджетных множествах $B_s(\overline{p})$: $(W2a)$ для каждого $s \in R$ и $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ справедлива импликация[1)]

$$\lambda_s > \overline{\lambda}_s \Rightarrow \overline{p} \cdot u^s < \overline{p} \cdot v^s.$$

Определение 2. Пусть $(\overline{z}, \overline{p})$ — равновесие Вальраса модели $\mathcal{M}$. Первую компоненту пары $(\overline{z}, \overline{p})$ будем называть *вальрасовским планом* модели $\mathcal{M}$, вторую $(\overline{p})$ — *равновесными ценами* этой модели. Совокупность вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $W(\mathcal{M})$. Следуя терминологии, принятой в [1], элементы множества $W(\mathcal{M})$ будем называть также *вальрасовскими равновесиями* модели $\mathcal{M}$.

Предполагаем, не уменьшая общности и учитывая однородность по ценам бюджетных неравенств $p \cdot u^s \geqslant p \cdot v^s,\ s \in R$, что рассматриваемые в дальнейшем цены p принадлежат стандартному единичному симплексу

$$P = \left\{ p \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}.$$

Оказывается, что простейшие условия, гарантирующие существование вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$, представляют собой достаточно естественное усиление требований $(M1)$ и $(M2a)$, приведённых в разд. 1.

[1)] Характеризация оптимальных региональных планов $\overline{z}^s \in B_s(\overline{p})$ в форме $(W2a)$ удобна для дальнейшего анализа коалиционной устойчивости вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$ (см. далее разд. 3).

Дадим развёрнутую формулировку этих условий, используя вводимые далее определения.

Строго автаркическими планами региона s будем называть элементы множества

$$\widehat{Z}(s) = \widehat{Z}_{\mathcal{M}}(s) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R$$

(как обычно, сокращение $x \gg y$ для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ означает выполнение строгих неравенств $x_i > y_i,\ i = 1, \ldots, m$). Регион $s \in R$ будем называть *строго автаркическим*, если $\widehat{Z}(s) \neq \varnothing$.

Напомним [5], что для однородной составляющей $\{A^s,\ G^s, H^s, 0, d^s\}$ региона $s \in R$ (при $b^s = 0$) $Z_s^0 = Z_s(\mathcal{M}_0)$ определяется формулой

$$Z_s^0 = \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^{l_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \mid \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geqslant \lambda_s d^s\}, \quad s \in R.$$

В принятых обозначениях упоминавшиеся усиления условий $(M1)$ и $(M2a)$ имеют вид

$(M1^*)$ $\widehat{Z}(s) \neq \varnothing$ для каждого $s \in R$;

$(M2^*)$ $Z_s^0 = \{0\}$ для каждого $s \in R$.

Убедимся, что условия $(M1^*)$ и $(M2^*)$ являются естественным усилением условий $(M1)$ и $(M2a)$, обеспечивая строгую автаркичность всех регионов $s \in R$ и отсутствие региональных (а не только системных) «рогов изобилия» соответственно. Действительно, условие $(M1^*)$ получается из $(M1)$ простой заменой неравенств $u^s \geqslant v^s,\ s \in R$, более сильными соотношениями $u^s \gg v^s,\ s \in R$. Что касается условия $(M2^*)$, то его выполнение, как нетрудно убедиться, гарантирует отсутствие системного «рога изобилия» в модели $\mathcal{M}$. В самом деле, допуская, что для модели $\mathcal{M}$ нарушается требование $(M2a)$, имеем существование плана $\overline{z} \in Z_{\mathcal{M}_0}(R)$ и региона $s \in R$ таких, что $\overline{z}^s \neq 0$. Но $\overline{z}^s \in Z_s^0$ по определению множества $Z_{\mathcal{M}_0}(R)$, что противоречит предположению $(M2^*)$, состоящему в том, что все региональные множества Z_s^0 содержат лишь нулевые планы развития.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Если $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям $(M1^*)$ и $(M2^*)$, то $W(\mathcal{M}) \neq \varnothing$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на формулируемую далее геометрическую лемму Гейла [12] (см. также [2, 3, 9], где приводится как сама лемма, так и некоторые её обобщения). Напомним необходимые

определения. Будем предполагать, что рассматриваемые далее множества X и Y — непустые подмножества конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$, а $\varphi : X \to 2^Y$ — многозначное отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ некоторое подмножество $\varphi(x) \subseteq Y$. Как обычно [1, 2], отображение φ будем называть *полунепрерывным сверху* (или *замкнутым* — в более общей терминологии [6]), если в $X \times Y$ замкнут его график $\Gamma(\varphi) =: \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y,\ y \in \varphi(x)\}$. Таким образом, полунепрерывность сверху многозначного отображения φ означает, что для любых точек $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и сходящихся последовательностей $\{x_m\}_1^\infty$, $\{y_m\}_1^\infty$ справедлива импликация

$$[x_m \to x_0,\ y_m \to y_0]\,\&\,[\forall m (y_m \in \varphi(x_m))] \Rightarrow y_0 \in \varphi(x_0).$$

Напомним, что многозначное отображение $\varphi : X \to 2^Y$ называется *полунепрерывным снизу,* если для любых точек $x_0 \in X$, $y_0 \in \varphi(x_0)$ и сходящейся к x_0 последовательности $\{x_m\}_1^\infty$ существует сходящаяся последовательность $\{y_m\}_1^\infty$ такая, что $\lim y_m = y_0$ и $y_m \in \varphi(x_m)$ для всех $m \geqslant 1$. Многозначные отображения, являющиеся полунепрерывными и сверху, и снизу, будем называть *непрерывными.*

Лемма Гейла [12]. *Пусть многозначное отображение $\varphi : P \to 2^Y$, определённое на стандартном единичном симплексе $P \subseteq \mathbb{R}^n$ и действующее в компактное выпуклое множество $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, удовлетворяет следующим требованиям:*

(i) *φ полунепрерывно сверху, и для каждого $p \in P$ множество $\varphi(p)$ непусто и выпукло*;

(ii) *для φ выполняется закон Вальраса в широком смысле, т. е. $p \cdot e \geqslant 0$ для любых $p \in P$ и $e \in \varphi(p)$.*

Тогда существует такой вектор $\overline{p} \in P$, что $\varphi(\overline{p}) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$.

Переходя к доказательству теоремы 1, введём необходимые обозначения и сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся свойств бюджетных отображений B_s и отображений спроса D_s, определяемых (по аналогии с классическими моделями конкурентной экономики) формулой

$$D_s(p) = \big\{\overline{z}^s \in B_s(p) \mid t_s(\overline{z}^s) = \max_{z^s \in B_s(p)} t_s(z^s)\big\}, \quad p \in P,\ s \in R.$$

Предложение 1. *При выполнении условия $(M1^*)$ бюджетное отображение $p \mapsto B_s(p)$, $p \in P$, непрерывно для каждого региона $s \in R$.*

Доказательство. Для произвольного $s \in R$ проверка справедливости предложения разбивается на две части: проверку замкнутости B_s (имеющей место для любой модели региональных отношений) и доказательство полунепрерывности снизу отображения B_s при выполнении условия $(M1^*)$.

Для обоснования замкнутости B_s достаточно отметить замкнутость множества Z_s и то, что линейные неравенства $p_m \cdot u_m^s \geqslant p_m \cdot v_m^s,\ m \geqslant 1$, сохраняются в пределе: при выполнении этих неравенств из сходимости последовательностей $p_m \to p_0$ и $z_m^s = \big(x_m^s, u_m^s, v_m^s, \lambda_s^m\big) \to z_o^s = \big(x_0^s, u_0^s, v_0^s, \lambda_s^0\big)$ вытекает справедливость предельного линейного неравенства $p_0 \cdot u_0^s \geqslant p_0 \cdot v_0^s$.

Что касается полунепрерывности снизу отображения B_s при наличии автаркического плана $\overline{z}^s = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s)$ такого, что $\overline{u}^s \gg \overline{v}^s$, согласно определению полунепрерывности снизу необходимо убедиться в справедливости импликации

$$[p_m \to p_0]\ \&\ \big[z_0^s \in B_s(p_0)\big] \Rightarrow \forall m\ \exists z_m^s \in B_s(p_m)\ \big[z_0^s = \lim z_m^s\big].$$

Рассмотрим два возможных случая, которые могут реализоваться для предельного плана $z_o^s = \big(x_0^s, u_0^s, v_0^s, \lambda_s^0\big)$: (a) $p_0 \cdot u_0^s > p_0 \cdot v_0^s$ и (b) $p_0 \cdot u_0^s = p_0 \cdot v_0^s$. Ясно, что в случае (a) ввиду сходимости $p_m \to p_0$ имеем $p_m \cdot u_0^s > p_m \cdot v_0^s$ при всех m, превышающих некоторое достаточно большое натуральное число m_0. Поэтому, определяя для натуральных $m \geqslant 1$ элементы последовательности z_m^s по формуле $z_m^s = \overline{z}^s$ при $m \leqslant m_0$ и $z_m^s = z_0^s$ при $m > m_0$, имеем $z_m^s \to z_0^s$, при этом планы z_m^s принадлежат бюджетным множествам $B_s(p_m)$ при всех $m \geqslant 1$ (ясно, что включения $z_m^s \in B_s(p_m)$ при $m \leqslant m_0$ вытекают непосредственно из неотрицательности цен p_m и неравенства $\overline{u}^s \gg \overline{v}^s$, выполняющегося для строго автаркического плана $\overline{z}^s = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s)$).

Переходя к случаю (b), рассмотрим планы $z^s(t) = z_0^s + t(\overline{z}^s - z_0^s)$ при $t \in [0,1]$ и выберем произвольную монотонно убывающую последовательность $\{t_m\} \subseteq (0,1]$ такую, что $\lim t_m = 0$. Тогда по построению $z^s(t)$ имеем $\lim z^s(t_m) = z_0^s$, при этом

$$p_0 \cdot u^s(t) > p_0 \cdot v^s(t) \quad \text{для всех } t \in (0,1]. \tag{1}$$

Справедливость последних неравенств вытекает непосредственно из вида составляющих $u^s(t)$ и $v^s(t)$, входящих в планы $z^s(t) = (x^s(t), u^s(t), v^s(t), \lambda_s(t))$. А именно, согласно определению $z^s(t)$ имеем $u^s(t) = u_0^s + t(\overline{u}^s - u_0^s)$ и $v^s(t) = v_0^s + t(\overline{v}^s - v_0^s)$. Поэтому в силу условий $\overline{u}^s \gg \overline{v}^s,\ p_0 \in P$

и соотношения $p_0 \cdot (u_0^s - v_0^s) = 0$ и получаются требуемые неравенства:

$$p_0 \cdot (u^s(t) - v^s(t)) = tp_0 \cdot (\overline{u}^s - \overline{v}^s) > 0 \quad \text{при всех } t \in (0, 1].$$

Используя соотношение (1) и сходимость $p_m \to p_0$, построим строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $m_1 > 1$ и $p_m \cdot w^s(t_k) > 0$ для всех $m \geqslant m_k$ и $k \geqslant 1$. Здесь, как и всюду далее, полагаем

$$w^s(t) = u^s(t) - v^s(t), \quad t \in [0, 1].$$

Числа m_k будем строить индукцией по k. Выбирая m_1, отметим, что из соотношений (1) вытекает неравенство $p_0 \cdot w^s(t_1) > 0$. Следовательно, ввиду сходимости $p_m \to p_0$ существует число $n(t_1) > 1$ такое, что $p_m \cdot w^s(t_1) > 0$ для всех $m \geqslant n(t_1)$. Положим $m_1 = n(t_1)$ и, предполагая искомые числа $m_1, \ldots, m_k$ уже построеными, выберем m_{k+1} из условий $m_{k+1} > m_k$, при этом $p_m \cdot w^s(t_{k+1}) > 0$ для всех $m \geqslant m_{k+1}$. Существование такого числа m_{k+1} вытекает (на основании той же аргументации, что и при $k = 1$) из неравенства $p_0 \cdot w^s(t_{k+1}) > 0$ и из сходимости $p_m \to p_0$.

Возвращаясь к доказательству полунепрерывности снизу бюджетного отображения B_s, воспользуемся сконструированной последовательностью $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ для построения искомой последовательности планов z_m^s, сходящихся к z_0^s. Положим

$$z_m^s = \begin{cases} \overline{z}^s, & m \in [1, m_1 - 1], \\ z^s(t_k), & m \in [m_k, m_{k+1} - 1],\ k \geqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\lim\limits_{m\to\infty} z_m^s = \lim\limits_{k\to\infty} z^s(t_k) = z_0^s$, при этом для всех $m \geqslant 1$ по построению $z_m^s \in B_s(p_m)$. Следовательно, условие полунепрерывности снизу выполняется и в случае (b). Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *При выполнении условий* $(M1^*)$ *и* $(M2^*)$ *отображения спроса* $p \mapsto D_s(p),\ p \in P$, *замкнуты для всех* $s \in R$.

Доказательство опирается на предложение 1, гарантирующее, что в рассматриваемом случае бюджетное соответствие $p \mapsto B_s(p)$ каждого региона $s \in R$ непрерывно. Отметим сначала, что в силу условия $(M1^*)$ бюджетное множество $B_s(p)$ непусто при любой системе цен из P, поскольку в силу неотрицательности векторов из P имеем $p \cdot \overline{u}^s > p \cdot \overline{v}^s$ для всех $p \in P$ и для любого $\overline{z}^s = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s)$ из $\widehat{Z}(s)$. Далее, в силу полиэдральности множества Z_s бюджетное множество $B_s(p)$ полиэдрально и, следовательно, замкнуто. Наконец, в силу полиэдральности Z_s и условия $(M2^*)$ множество $B_s(p)$ ограничено при всех $p \in P$. Действительно,

в силу известного критерия ограниченности полиэдральных множеств (см., например, [7, 10]) условие $(M2^*)$ гарантирует ограниченность множества Z_s, а тем самым и ограниченность его подмножеств $B_s(p),\ p \in P$. Итак, для любого вектора $p \in P$ бюджетное множество $B_s(p)$ непусто и компактно. Значит, в силу непрерывности целевой функции t_s региона s её максимумы на $B_s(p)$ достигаются при всех $p \in P$, и, следовательно, множества $D_s(p)$ непусты для любой системы цен $p \in P$.

Пусть $p_m \to p_0$ и $z^s_m = \big(x^s_m, u^s_m, v^s_m, \lambda_{sm}\big) \to z^s_0 = \big(x^s_0, u^s_0, v^s_0, \lambda_{s0}\big)$ — произвольные сходящиеся последовательности из P и Z_s соответственно такие, что $z^s_m \in D_s(p_m)$ для каждого $m \geqslant 1$. Покажем, что z^s_0 принадлежит $D_s(p_0)$, что ввиду общности рассматриваемой ситуации и докажет требуемую замкнутость отображения спроса. Допустим напротив, что z^s_0 не принадлежит множеству $D_s(p_0)$. Выберем произвольный элемент $\widetilde{z}^s_0 = \big(\widetilde{x}^s_0, \widetilde{u}^s_0, \widetilde{v}^s_0, \widetilde{\lambda}_{s0}\big)$ из $D_s(p_0)$. Ввиду условия $(M1^*)$ и предложения 1 бюджетное отображение в условиях доказываемого предложения является полунепрерывным снизу. Поэтому найдётся последовательность элементов $\widetilde{z}^s_m = \big(\widetilde{x}^s_m, \widetilde{u}^s_m, \widetilde{v}^s_m, \widetilde{\lambda}_{sm}\big)$, сходящаяся к $\widetilde{z}^s_0$, такая, что $\widetilde{z}^s_m \in B_s(p_m)$ для всех $m \geqslant 1$. В силу включения $\widetilde{z}^s_0 \in D_s(p_0)$ и сделанного предположения $z^s_0 \notin D_s(p_0)$ имеем $t_s\big(\widetilde{z}^s_0\big) > t_s\big(z^s_0\big)$ и, следовательно, $t_s\big(\widetilde{z}^s_m\big) > t_s\big(z^s_m\big)$ при достаточно больших m. Действительно, полагая $\delta = t_s\big(\widetilde{z}^s_0\big) - t_s\big(z^s_0\big)$ и выбирая m_0 так, чтобы $|\lambda_{sm} - \lambda_{s0}| < \delta/2$ и $|\widetilde{\lambda}_{sm} - \widetilde{\lambda}_{s0}| < \delta/2$ при всех $m \geqslant m_0$ (что возможно ввиду условий $z^s_m \to z^s_0$, $\widetilde{z}^s_m \to \widetilde{z}^s_0$ и непрерывности функции t_s), получаем $\widetilde{\lambda}_{sm} > \lambda_{sm}$ при всех $m \geqslant m_0$; противоречие с предположениями, что $\widetilde{z}^s_m \in B_s(p_m)$ и $z^s_m \in D_s(p_m)$ при всех $m \geqslant 1$. Предложение 2 доказано.

Переходя непосредственно к доказательству теоремы существования вальрасовских равновесий для моделей межрегиональных отношений, рассмотрим некоторые дополнительные характеристики этих моделей. С этой целью для каждого $s \in R$ введём оператор проекции K_s, определяемый формулой

$$K_s(z^s) = (u^s, v^s), \quad z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{l_s} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Далее, наряду с отображениями спроса D_s введём в рассмотрение модифицированные отображения регионального спроса

$$\widehat{D}_s(p) = \{K_s(z^s) \mid z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in D_s(p)\}, \quad p \in P,\ s \in R.$$

Наконец, определяя отображение агрегированного модифицированного спроса формулой $\widehat{D}(p) = \sum\limits_{s \in R} \widehat{D}_s(p)$, $p \in P$, введём основной объект даль-

нейшего исследования — аналог отображения избыточного спроса в классических моделях типа Эрроу — Дебре:

$$\widehat{E}(p) = \{u - v \mid (u, v) \in \widehat{D}(p)\}, \quad p \in P.$$

Ближайшая задача заключается в проверке того, что в условиях теоремы 1 отображение $\widehat{E} : P \to 2^{\mathbb{R}^n}$ удовлетворяет всем требованиям упоминавшейся леммы Гейла. Отметим сразу же, что выполнение расширенного закона Вальраса для этого отображения вытекает без каких-либо дополнительных предположений непосредственно из определения бюджетных отображений B_s и отображений спроса D_s модели $\mathcal{M}$. А именно, ввиду того, что $p \cdot u^s \geqslant p \cdot v^s$ для любых $s \in R$, $p \in P$ и $(u^s, v^s) \in \widehat{D}_s(p)$, имеем $p \cdot \sum\limits_{s \in R} (u^s - v^s) \geqslant 0$ для всех $p \in P$ и $(u^s, v^s) \in \widehat{D}_s(p)$, $s \in R$. Последние неравенства в силу очевидного соотношения

$$\widehat{E}(p) = \sum_{s \in R} \widehat{E}_s(p), \quad p \in P, \tag{2}$$

где $\widehat{E}_s(p) = \{u^s - v^s \mid (u^s, v^s) \in \widehat{D}_s(p)\}$, $p \in P$, $s \in R$, и означают выполнение расширенного закона Вальраса:

$$p \cdot e \geqslant 0 \quad \text{для любых } p \in P \text{ и } e \in \widehat{E}(p).$$

Ясно, что при выполнении условия $(M1^*)$ гарантируется непустота бюджетных множеств $B_s(p)$ при всех $p \in P$. В силу линейности операторов K_s и целевых функций $t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) = \lambda_s$ при выполнении дополнительного требования $(M2^*)$, обеспечивающего ограниченность множеств Z_s, имеет место непустота, выпуклость и компактность множеств $\widehat{D}_s(p)$, $p \in P$. Значит, как нетрудно проверить, в условиях $(M1^*)$ и $(M2^*)$ при всех $p \in P$ непустыми выпуклыми компактами будут множества $\widehat{E}_s(p)$, $s \in R$. Отсюда в силу (2) множества $\widehat{E}(p)$ являются непустыми выпуклыми компактами при всех $p \in P$.

Продолжая проверку того, что отображение $\widehat{E}$ удовлетворяет требованиям леммы Гейла, покажем, что при выполнении условий $(M1^*)$ и $(M2^*)$ имеет место замкнутость этого отображения. Убедимся сначала, что при указанных условиях замкнуты все отображения $\widehat{D}_s$ и $\widehat{E}_s$, $s \in R$.

Лемма 1. *Пусть для модели $\mathcal{M}$ выполняются предположения $(M1^*)$ и $(M2^*)$. Тогда отображения $\widehat{D}_s$ замкнуты для всех $s \in R$.*

Доказательство. Рассмотрим какой-либо регион $s \in R$ и две сходящиеся последовательности $p_m \to p_0$, $\left(u^s_m, v^s_m\right) \to \left(u^s_0, v^s_0\right)$, для которых выполняются соотношения $p_m \in P$ и $\left(u^s_m, v^s_m\right) \in \widehat{D}_s(p_m)$ для

каждого $m \geqslant 1$. Покажем, что предельная точка $\left(u_0^s, v_0^s\right)$ содержится в $\widehat{D}_s(p_0)$. Действительно, по определению отображения $\widehat{D}_s$ для каждого $m \geqslant 1$ элементы u_m^s и v_m^s являются составляющими некоторого плана $z_m^s = \left(x_m^s, u_m^s, v_m^s, \lambda_{sm}\right) \in Z_s$, принадлежащего множеству спроса $D_s(p_m)$. Но при каждом $m \geqslant 1$ множество $D_s(p_m)$ принадлежит совокупности допустимых планов Z_s, а множество Z_s, будучи полиэдральным и ограниченным (в силу предположения $(M2^*)$ и отмечавшегося уже известного критерия ограниченности полиэдральных множеств [7, 10]), является компактом. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что последовательность $\{z_m^s\}_1^\infty$ сходящаяся. Положим $\widetilde{z}^s := \lim z_m^s$. В силу замкнутости отображения D_s, вытекающей в условиях доказываемой леммы из предложения 2, план $\widetilde{z}^s = \left(\widetilde{x}^s, \widetilde{u}^s, \widetilde{v}^s, \widetilde{\lambda}_s\right)$ принадлежит множеству $D_s(p_0)$. Отсюда в силу равенства $\left(u_0^s, v_0^s\right) = \left(\widetilde{u}^s, \widetilde{v}^s\right)$, вытекающего из построения планов $z_m^s = \left(x_m^s, u_m^s, v_m^s, \lambda_{sm}\right)$ и предположения $\left(u_m^s, v_m^s\right) \to \left(u_0^s, v_0^s\right)$, получаем требуемое: $\left(u_0^s, v_0^s\right)$ принадлежит множеству $\widehat{D}_s(p_0)$, что и доказывает замкнутость многозначного отображения $\widehat{D}_s$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть для модели $\mathcal{M}$ выполняются предположения $(M1^*)$ и $(M2^*)$. Тогда отображения $\widehat{E}_s$ замкнуты для каждого $s \in R$.*

Доказательство. Зафиксируем какой-либо регион $s \in R$. Пусть $p_m \to p_0$, $w_m^s \to w_0^s$ и при этом для каждого $m \geqslant 1$ выполняются включения $p_m \in P$ и $w_m^s \in \widehat{E}_s(p_m)$. Согласно определению отображения $\widehat{E}_s$ для каждого w_m^s существует элемент $\left(u_m^s, v_m^s\right) \in \widehat{D}_s(p_m)$, для которого выполняется представление $w_m^s = u_m^s - v_m^s$. Учитывая, что все множества $\widehat{D}_s(p_m)$ содержатся в проекции $K_s(Z_s)$ ограниченного (в силу предположения $(M2^*)$) множества Z_s, без уменьшения общности можно считать, что последовательность $\left\{\left(u_m^s, v_m^s\right)\right\}_1^\infty \subseteq K_s(Z_s)$ сходящаяся. Отсюда, полагая $u_0^s = \lim u_m^s$ и $v_0^s = \lim v_m^s$, из равенств $w_m^s = u_m^s - v_m^s$ получаем $w_0^s = \lim w_m^s = u_0^s - v_0^s$. С другой стороны, ввиду леммы 1 в условиях доказываемого утверждения отображения $\widehat{D}_s$ замкнуты. Поэтому в силу включений $\left(u_m^s, v_m^s\right) \in \widehat{D}(p_m)$, $m \geqslant 1$, и сходимости $\left(u_m^s, v_m^s\right) \to \left(u_0^s, v_0^s\right)$ имеем $\left(u_0^s, v_0^s\right) \in \widehat{D}_s(p_0)$. Последнее включение вместе с установленным ранее равенством $w_0^s = u_0^s - v_0^s$ и означает справедливость искомого соотношения $w_0^s \in \widehat{E}_s(p_0)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть для модели $\mathcal{M}$ выполняются предположения $(M1^*)$ и $(M2^*)$. Тогда отображение $\widehat{E}$ замкнуто.*

Доказательство. Поскольку отображение $\widehat{E}$ является алгебраической суммой отображений $\widehat{E}_s$, $s \in R$, каждое из которых замкнуто (на

основании предыдущей леммы) и компактнозначно (в силу предположения $(M2^*)$), требуемое утверждение является следствием общего результата, относящегося к замкнутым многозначным отображениям (см., например, утверждение 5 из части I разд. С в [6]). Для полноты изложения приведём короткое доказательство, используя дополнительную информацию о том, что все значения отображения $\widehat{E} = \sum\limits_{s\in R} \widehat{E}_s$ содержатся в компактном множестве $\bigl\{u-v \mid (u,v) \in \sum\limits_{s\in R} K_s(Z_s)\bigr\}$. Итак, пусть $p_m \to p_0$, $w_m = \sum\limits_{s\in R} w_m^s \to w_0$ и при этом $p_m \in P$ и $w_m^s \in \widehat{E}_s(p_m)$ для всех $m \geqslant 1$. В силу предположения $(M2^*)$ и непрерывности операторов K_s все множества $L_s = \{u^s - v^s \mid (u^s, v^s) \in K_s(Z_s)\}, s \in R$, будучи непрерывными образами соответствующих компактов $K_s(Z_s)$, $s \in R$, являются компактами. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что последовательности $\bigl\{w_m^s\bigr\}_{m=1}^{\infty}$, $s \in R$, сходящиеся. Положим $w_0^s = \lim w_m^s$, $s \in R$. В силу леммы 2 имеем $w_0^s \in \widehat{E}_s(p_0)$, $s \in R$. Тогда на основании равенств $w_m = \sum\limits_{s\in R} w_m^s$, $m \geqslant 1$, и предположения $\lim w_m = w_0$ элемент $\lim w_m = w_0$ принадлежит множеству $\sum\limits_{s\in R} \widehat{E}_s(p_0) = \widehat{E}(p_0)$. Лемма 3 доказана.

Используя лемму 3, приведём заключительную аргументацию, обосновывающую справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Ранее указывалось, что в условиях $(M1^*)$ и $(M2^*)$ множества $\widehat{E}(p)$ непусты, выпуклы и компактны при всех $p \in P$. Кроме того, ясно, что эти множества содержатся в выпуклом компакте

$$L = \sum_{s\in R} L_s, \tag{3}$$

где, как и в лемме 3, $L_s = \{u^s - v^s \mid (u^s, v^s) \in K_s(Z_s)\}$, $s \in R$ (напомним, что при доказательстве леммы 3 отмечалось, что в условиях предположения $(M2^*)$ все множества L_s являются компактами). Выше указывалось, что выполнение расширенного закона Вальраса для отображения $\widehat{E}$ вытекает непосредственно из определения множеств $B_s(p), E_s(p)$ и $E(p)$. Наконец, как показывает лемма 3, в условиях теоремы 1 отображение $\widehat{E}$ полунепрерывно сверху. Итак, в предположениях теоремы 1 для отображения $\varphi = \widehat{E} : P \to 2^L$, где L определяется формулой (3), выполняются все условия леммы Гейла. Тогда согласно её заключению и определению отображения $\widehat{E}$ найдутся цены $\overline{p} \in P$ и элементы $\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s$ такие, что $\overline{z}^s = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s) \in D_s(\overline{p})$ для всех $s \in R$, при этом $\overline{e} = \sum\limits_{s\in R} (\overline{u}^s - \overline{v}^s) \geqslant 0$.

Но это и означает, что план $(\overline{z}^s)_{s\in R}$ и цены $\overline{p}$ образуют равновесие Вальраса модели $\mathcal{M}$. Теорема 1 доказана.

3. Ядро и равновесие Эджворта модели $\mathcal{M}$

Как известно (см., например, [1, 9, 14]), в широких классах моделей рынка вальрасовские равновесия являются коалиционно устойчивыми по отношению к достаточно сильным типам блокирования (включая блокирование с помощью так называемых нечётких коалиций). Аналогичные факты имеют место и для вальрасовских планов в моделях межрегиональных экономических отношений [5]. Одним из следствий коалиционной устойчивости таких планов является доказываемое в этом разделе вложение $W(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M})$, устанавливающее взаимосвязь между вальрасовскими равновесиями $W(\mathcal{M})$ и так называемыми равновесиями Эджворта $E(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$. Отметим, что приводимое доказательство, в отличие от найденного ранее [5], не использует понятия $\mathbb{Q}$-ядра и базируется на равновесности по Вальрасу реплик вальрасовских равновесий.

Особое внимание, уделяемое вложению $W(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M})$, объясняется тем, что вместе с теоремой 1 это соотношение позволяет установить новые, более простые условия существования равновесия Эджворта в моделях межрегиональных экономических отношений. Напомним [5], что использовавшиеся ранее предположения включали технически сложное условие ограниченной трансферабельности модели $\mathcal{M}$ (упоминавшееся уже в разд. 2 условие $(M3)$). В то же время предположения теоремы 1 исчерпываются требованиями $(M1^*)$ и $(M2^*)$ (в отличие от предположений $(M1)$, $(M2a)$ и $(M3)$, при которых доказана теорема существования равновесия Эджворта в [5]).

Переходя к доказательству новой теоремы существования равновесия Эджворта в моделях межрегиональных экономических отношений, введём необходимые определения. Начнём с определения блокирования в модели $\mathcal{M}$ (см., например, [4, 11]).

Определение 3. Коалиция T *блокирует* сбалансированный план $z = (z^s)_{s\in R} \in Z(R)$, если у неё имеется такой план $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^s)_{s\in T} \in Z(T)$, что $t_s(\widetilde{z}^s) > t_s(z^s),\ s \in T$. План $z \in Z(R)$, который не блокируется никакой коалицией $T \subseteq R$, будем называть *неблокируемым*, а совокупность всех неблокируемых планов будем обозначать через $C(\mathcal{M})$ и называть *ядром модели* $\mathcal{M}$.

Несколько модифицируя стандартное определение реплики в экономической модели типа Эрроу — Дебре (см., например, [1, 6, 9]), введём

сначала понятие *дробления* (*измельчения*) *модели* $\mathcal{M}$. Фиксируем $k \geqslant 1$ и полагаем

$$R_{[k]} = \{(s, m) \mid s \in R,\ m = 1, \ldots, k\}. \tag{4}$$

Далее, для каждого элемента $(s, m) \in R_{[k]}$ (понимаемого в дальнейшем как номер соответствующей доли региона $s \in R$ исходной экономики $\mathcal{M}$) введём матрицы A^{sm}, G^{sm}, H^{sm} и векторы b^{sm}, d^{sm}, полагая

$$A^{sm} = A^s, \quad G^{sm} = G^s, \quad H^{sm} = H^s, \quad b^{sm} = \frac{1}{k} b^s, \quad d^{sm} = d^s. \tag{5}$$

Определение 4 [5]. Модель взаимодействия регионов

$$\mathcal{M}_{[k]} = \langle R_{[k]}, \{A^{sm}, G^{sm}, H^{sm}, b^{sm}, d^{sm}\}_{(s,m) \in R_{[k]}} \rangle,$$

определяемую параметрами, задаваемыми формулами (4), (5), будем называть *дроблением ранга* k (k-*дроблением*) *модели* $\mathcal{M}$.

Отметим, что в силу соотношений между параметрами модели $\mathcal{M}$ и её k-дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ для множеств

$$Z_{sm} = \{z^{sm} = (x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) \geqslant 0 \mid \\ A^{sm} x^{sm} + G^{sm} u^{sm} + H^{sm} v^{sm} \geqslant b^{sm} + \lambda_{sm} d^{sm}\}$$

ресурсно-технологических возможностей регионов $(s, m) \in R_{[k]}$ выполняются равенства

$$Z_{sm} = \frac{1}{k} Z_s \quad \text{для каждого } s \in R \text{ и } m = 1, \ldots, k. \tag{6}$$

Обратим внимание, что множество допустимых планов участника (s, m) модели $\mathcal{M}_{[k]}$ следовало бы обозначать с использованием символа ранга дробления (например, так: Z^k_{sm}). То же самое относится и к обозначению векторов b^{sm}, характеризующих ресурсно-технологический потенциал регионов (s, m) модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Однако учитывая, что во всех рассматриваемых ниже случаях ранг дробления модели $\mathcal{M}$ указывается явно, во избежание излишней громоздкости символ этого ранга опускается.

Как и в исходной модели $\mathcal{M}$, целевые функции $t_{sm} : Z_{sm} \to \mathbb{R}$ регионов (s, m) дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ определяются формулой

$$t_{sm}(x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) = \lambda_{sm}, \quad (s, m) \in R_{[k]}. \tag{7}$$

Замечание 1. Как видно из определения дробления ранга $k + 1$, в $\mathcal{M}_{[k+1]}$ наряду с участниками исходной системы с уменьшенными в $k+1$

раз ресурсами в равном количестве из k экземпляров представлены идентичные им доли соответствующих регионов, что усиливает уровень конкуренции в новой системе и позволяет (согласно известной гипотезе Эджворта [6, 13, 14]) более точно оценить равновесные распределения с помощью элементов ядер дроблений. В этом смысле вводимое далее понятие равновесия Эджворта является одним из «предельных» вариантов развития идеи аппроксимации вальрасовских состояний неблокируемыми.

Положим $Z_{[k]} = Z_{\mathcal{M}_{[k]}} = \prod\limits_{(s,m)\in R_{[k]}} Z_{sm}$ и, как и ранее, через $Z(R_{[k]})$ будем обозначать совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}_{[k]}$:

$$Z(R_{[k]}) = \Big\{(z^{sm})_{(s,m)\in R_{[k]}} \in Z_{[k]} \mid \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} \geqslant \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm}\Big\}.$$

Наконец, для $k \geqslant 1$ через $z_{[k]}$ обозначим *k-дробление плана* $z = (z^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, представляющее собой сбалансированный (что будет видно из дальнейших пояснений) план модели $\mathcal{M}_{[k]}$, построенный из региональных составляющих z^s плана z по формуле

$$(z_{[k]})^{sm} = \frac{1}{k} z^s, \quad s \in R,\ m = 1, \ldots, k.$$

Как вытекает непосредственно из определения дробления $z_{[k]}$, определяемый им план устанавливает одинаковые задания $\frac{1}{k} z^s$ однотипным[2)] участникам модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Отсюда в силу сбалансированности z получается неравенство

$$\sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} = \sum_{s\in R} u^s \geqslant \sum_{s\in R} v^s = \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm},$$

доказывающее сбалансированность плана $z_{[k]}$ в модели $\mathcal{M}_{[k]}$.

Сформулируем, наконец, понятие равновесия Эджворта для модели межрегионального взаимодействия, введённое в [5] (аналогичное понятие вводилось и изучалось ранее лишь для классической модели Эрроу — Дебре и некоторых её модификаций, указанных, например, в [1, 9, 14]).

Определение 5 [5]. План $\overline{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ называется *равновесием Эджворта модели $\mathcal{M}$,* если все его k-дробления содержатся в ядрах соответствующих дроблений модели $\mathcal{M}$: $\overline{z}_{[k]} \in C(\mathcal{M}_{[k]})$ для всех $k \geqslant 1$. Совокупность всех равновесий Эджворта модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $E(\mathcal{M})$.

[2)]Участники (s, m) и (s', m') модели $M_{[k]}$ называются *однотипными,* если $s = s'$.

Переходя к сравнению множеств $W(\mathcal{M})$ и $E(\mathcal{M})$, напомним [4, 8, 11], что все вальрасовские равновесия модели $\mathcal{M}$ принадлежат её ядру $C(\mathcal{M})$ (ниже для полноты изложения приводится короткое доказательство этого факта).

Предложение 3. *Для любой модели региональных отношений $\mathcal{M}$ справедливо вложение $W(\mathcal{M}) \subseteq C(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Пусть план $\overline{z} = (\overline{x}^s, \overline{u}^s, \overline{v}^s, \overline{\lambda}_s)_{s\in R}$ содержится в $W(\mathcal{M})$. Допустим, что какая-либо коалиция $S \subseteq R$ блокирует $\overline{z}$ с помощью некоторого сбалансированного плана $z = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in S} \in Z(S)$. Согласно определению блокирования $\lambda_s > \overline{\lambda}_s$ для каждого $s \in S$. Отсюда на основании определения $W(\mathcal{M})$ (см. условие $(W2a)$) вытекают неравенства $\overline{p} \cdot u^s < \overline{p} \cdot v^s,\ s \in S$, где через $\overline{p}$ обозначены равновесные цены, отвечающие плану $\overline{z}$. Суммируя указанные неравенства, получаем $\overline{p} \cdot \sum\limits_{s\in S} u^s < \overline{p} \cdot \sum\limits_{s\in S} v^s$, что (ввиду неотрицательности вектора $\overline{p}$) противоречит неравенству $\sum\limits_{s\in S} u^s \geqslant \sum\limits_{s\in S} v^s$, вытекающему из коалиционной сбалансированности плана z. Предложение 3 доказано.

Замечание 2. Как установлено в [4], предположения $(M1)$ и $(M2a)$ гарантируют существование неблокируемых планов в модели межрегиональных экономических отношений. Поэтому предложение 3 и теорему 1 можно трактовать как пример уточнения указанных предположений, гарантирующего существование равновесного плана — «более сильного» оптимального решения в модели $\mathcal{M}$.

Приводимое ниже простое, но полезное утверждение показывает, что дробление вальрасовского плана любого наперёд заданного ранга k произвольной модели $\mathcal{M}$ является вальрасовским равновесием k-дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ этой модели.

Предложение 4. *Для любых модели региональных отношений $\mathcal{M}$ и натурального числа $k \geqslant 1$ справедливо вложение $W_{[k]}(\mathcal{M}) \subseteq W(\mathcal{M}_{[k]})$, где $W_{[k]}(\mathcal{M})$ — совокупность k-дроблений вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный план $\overline{z} \in W(\mathcal{M})$, выберем какое-либо натуральное число $k \geqslant 1$ и покажем, что k-дробление $\overline{z}_{[k]}$ плана $\overline{z}$ является вальрасовским планом k-дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ модели $\mathcal{M}$. С этой целью рассмотрим равновесные цены $\overline{p}$, отвечающие плану $\overline{z}$, и покажем, что пара $(\overline{z}_{[k]}, \overline{p})$ образует равновесие Вальраса модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Действительно, непосредственно из определения бюджетных множеств и множеств спроса участников моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_{[k]}$, а также на

основании равенств (6) и (7) имеем

$$B_{sm}(\overline{p}) = \frac{1}{k}B_s(\overline{p}), \quad D_{sm}(\overline{p}) = \frac{1}{k}D_s(\overline{p}), \quad s \in R,\ m = 1, \ldots, k.$$

Отсюда с учётом соотношений $\overline{z}^s \in D_s(\overline{p}),\ s \in R,\ \sum\limits_{s\in R} \overline{u}^s \geqslant \sum\limits_{s\in R} \overline{v}^s$ получаем $\overline{z}^{sm} \in D_{sm}(\overline{p}),\ s \in R,\ m = 1, \ldots, k$, и

$$\sum_{(s,m)\in R_{[k]}} \overline{u}^{sm} \geqslant \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} \overline{v}^{sm},$$

что означает равновесность плана $\overline{z}_{[k]}$ в модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Предложение 4 доказано.

Следствие 1. *Для любой модели региональных отношений $\mathcal{M}$ справедливо вложение*

$$W(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M}).$$

Доказательство. Пусть $\overline{z}$ — вальрасовский план модели $\mathcal{M}$. Тогда в силу предложения 4 $\overline{z}_{[k]}$ является вальрасовским планом k-дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ модели $\mathcal{M}$ при любом натуральном k. Отсюда в силу предложения 3 $\overline{z}_{[k]}$ принадлежит ядру k-дробления модели $\mathcal{M}$ при любом натуральном $k \geqslant 1$, что означает справедливость включения $\overline{z} \in E(\mathcal{M})$. Следствие 1 доказано.

Используя теорему 1 и следствие 1, получаем следующий полезный вариант теоремы существования равновесия Эджворта в рассматриваемых моделях региональных отношений.

Теорема 2. *Если $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям $(M1^*)$ и $(M2^*)$, то $E(\mathcal{M}) \neq \varnothing$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О.** Существование и оптимальность конкурентного равновесия. — М.: Мир, 1995. — 384 с.
2. **Ашманов С. А.** Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 296 с.
3. **Васильев В. А.** Модели экономического обмена и кооперативные игры. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1984. — 96 с.
4. **Васильев В. А., Суслов В. И.** О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем // Сиб. журн. индустр. математики. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 23–34.

5. **Васильев В. А., Суслов В. И.** Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сиб. журн. индустр. математики. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 18–33.
6. **Гильденбранд В.** Ядро и равновесие в большой экономике. — М.: Наука, 1986. — 200 с.
7. **Голдман А. Дж.** Теоремы разложения и отделимости для многогранных выпуклых множеств // Линейные неравенства и смежные вопросы. — М.: ИЛ, 1959. — С. 162–171.
8. **Гранберг А. Г., Суслов В. И., Суспицын С. А.** Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. — Новосибирск: Наука, 2007. — 371 с.
9. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972. — 520 с.
10. **Рокафеллар Т.** Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 471 с.
11. **Рубинштейн А. Г.** Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. — Новосибирск: Наука, 1983. — 240 с.
12. **Gale D.** The law of supply and demand // Math. Scand. — 1955. — Vol. 3. — P. 155–169.
13. **Hildenbrand W., Kirman A. P.** Equilibrium Analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — 297 p.
14. **Vasil'ev V. A.** On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets // Sib. Adv. Math. — 1996. — Vol. 6, N 3. — P. 96–150.

Васильев Валерий Александрович,
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

Статья поступила
23 августа 2011 г.

Переработанный вариант —
11 апреля 2012 г.