ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 3–14

УДК 519.174.3

КЁНИГОВЫ ГРАФЫ ОТНОСИТЕЛЬНО 3-ПУТЕЙ *)

В. Е. Алексеев, Д. Б. Мокеев

Аннотация. Характеризуется класс графов, у которых для каждого порождённого подграфа максимальное число непересекающихся порождённых путей с тремя вершинами равно минимальному числу вершин, покрывающих все такие пути.

Ключевые слова: упаковка подграфов, вершинное покрытие подграфов, кёнигов граф, трёхвершинный путь, запрещённый подграф.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$ — множество графов. $\mathcal{X}$-*упаковкой* графа G называется множество его непересекающихся порождённых подграфов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь графу из $\mathcal{X}$. Наибольшее число подграфов в $\mathcal{X}$-упаковке графа G обозначим через $\mathrm{pack}_{\mathcal{X}}(G)$. $\mathcal{X}$-*покрытием* графа G называется множество вершин, после удаления которых получается граф, не содержащий порождённых подграфов, принадлежащих $\mathcal{X}$. Наименьшее число вершин в $\mathcal{X}$-покрытии графа G обозначим через $\mathrm{cover}_{\mathcal{X}}(G)$. В случае, когда $\mathcal{X}$ состоит из единственного графа H, будем говорить просто об H-покрытии и H-упаковке. В частности, P_2-упаковки — это паросочетания, а P_2-покрытия известны как вершинные покрытия.

Очевидно, всегда выполняется неравенство $\mathrm{pack}_{\mathcal{X}}(G) \leqslant \mathrm{cover}_{\mathcal{X}}(G)$. Теорема Кёнига утверждает, что для двудольных графов имеет место равенство $\mathrm{pack}_{P_2}(G) = \mathrm{cover}_{P_2}(G)$. Верно и в известном смысле обратное утверждение: если это равенство выполняется для графа G и любого его порождённого подграфа, то граф G двудольный.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–01–00357 (первый автор) и 11–01–00107 (второй автор)) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракт № 16.740.11.0310) и при поддержке лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0057, второй автор).

Граф G будем называть *кёниговым* относительно множества $\mathcal{X}$, если для любого его порождённого подграфа H выполняется равенство $\mathrm{pack}_{\mathcal{X}}(H) = \mathrm{cover}_{\mathcal{X}}(H)$. Класс всех кёниговых относительно $\mathcal{X}$ графов обозначим через $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Задаче об упаковке графа посвящено немало работ, особенно её алгоритмическим аспектам (см., например, [3, 4]). Известно, что задача об H-упаковке NP-полна для любого графа H, имеющего компоненту связности с тремя или более вершинами. Будучи сформулированы как задачи целочисленного линейного программирования, задачи о $\mathcal{X}$-упаковке и $\mathcal{X}$-покрытии образуют пару двойственных задач. Кёниговы графы, таким образом, суть графы, у которых для любого порождённого подграфа отсутствует разрыв двойственности. Это роднит кёниговы графы с совершенными графами, обладающими тем же свойством по отношению к другой паре двойственных задач (о раскраске вершин и о наибольшей клике), что способствует эффективному решению этих задач для совершенных графов [2].

Класс $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ при любом $\mathcal{X}$ наследственный и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещённых (порождённых) подграфов. Для P_2 такую характеризацию даёт теорема Кёнига вместе с известным критерием двудольности. Кроме этой классической теоремы нам известен ещё только один результат такого рода для обыкновенных графов: в [1] описаны все запрещённые подграфы для класса $\mathcal{K}(C)$, где C — множество всех простых циклов.

Цель настоящей работы — охарактеризовать класс $\mathcal{K}(P_3)$. Применяется два подхода к описанию этого класса. Один из них — «конструктивный»: показано, как можно построить любой граф из данного класса с помощью операций подразбиения рёбер и замены вершин кликами. При другом подходе ищется стандартное описание наследственного класса запрещёнными подграфами. Найденное множество запрещённых подграфов состоит из четырёх бесконечных семейств и трёх отдельных графов. Неизвестно, является ли оно полным множеством минимальных запрещённых подграфов для $\mathcal{K}(P_3)$, предполагаем, что это так.

Далее пишем $\mathrm{pack}(G)$ и $\mathrm{cover}(G)$ вместо $\mathrm{pack}_{P_3}(G)$ и $\mathrm{cover}_{P_3}(G)$, под покрытием и упаковкой подразумеваем P_3-покрытие и P_3-упаковку, а под кёниговым графом — кёнигов граф относительно P_3.

Множество вершин, порождающее подграф P_3, называем *тройкой.*

Рассматривая цикл C_n, предполагаем, что его вершины пронумерованы вдоль цикла числами $0, 1, \ldots, n-1$, при этом арифметические операции с номерами вершин выполняются по модулю n. Каждый класс вычетов номеров вершин по модулю 3 называем 3-*классом*.

1. Расширенные деревья

Докажем кёниговость некоторых графов. Заметим, что граф кёнигов тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности — кёнигов граф. Поэтому будем рассматривать только связные графы, хотя в доказательствах могут появляться и несвязные.

Операция замены t-кликой вершины x состоит в том, что эта вершина удаляется из графа, к нему добавляются t новых вершин, все они попарно соединяются между собой, и каждая из них соединяется ребром с каждой вершиной, смежной x. Граф, получаемый из графа G заменой некоторых его вершин степени 1 и 2 кликами (возможно, разного размера), назовём *расширением* G, а клики, на которые были заменены вершины, будем называть *секциями*. Каждая вершина, не подвергавшаяся замене, считается отдельной секцией.

Лемма 1. *Каждое наименьшее покрытие любого расширения любого графа состоит из целых секций.*

Доказательство. Допустим, что некоторая секция содержит вершину a, принадлежащую некоторому наименьшему покрытию, и вершину b, ему не принадлежащую. Так как покрытие наименьшее, в графе существует тройка, из которой только вершина a принадлежит покрытию (иначе эту вершину можно было бы из покрытия удалить). Но тогда две другие вершины этой тройки вместе с вершиной b образуют непокрытую тройку. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Любое расширенное дерево принадлежит классу* $\mathcal{K}(P_3)$.

Доказательство. Пусть G — расширение дерева T. Клику, на которую заменена вершина x дерева T, будем обозначать через $K(x)$. Доказательство проведём индукцией по числу вершин в графе G. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Дерево T состоит из одной или двух вершин. Тогда

$$\mathrm{pack}(G) = \mathrm{cover}(G) = 0.$$

Случай 2. Дерево T состоит из трёх вершин. Тогда, очевидно,

$$\mathrm{pack}(G) = \mathrm{cover}(G) = \min(|K(x_1)|, |K(x_2)|, |K(x_3)|).$$

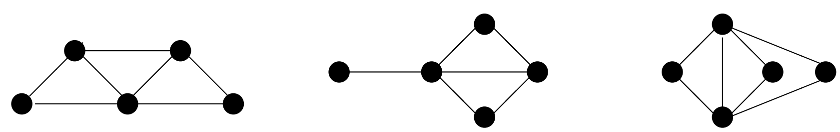
Случай 3. В дереве T имеются вершины x_1 и x_2 степени 1, смежные с вершиной y степени больше 2. Выберем вершины $a_1 \in K(x_1)$,

$a_2 \in K(x_2)$ и рассмотрим граф G', полученный из графа G удалением вершин a_1, a_2, y. Пусть P — наибольшая упаковка, C — наименьшее покрытие графа G'. По предположению индукции $|P| = |C|$ (G' может быть и несвязным, но ввиду сделанного в начале этого раздела замечания можно распространить предположение индукции и на этот случай). Теперь $P \cup \{a_1, a_2, y\}$ — упаковка, а $C \cup \{y\}$ — покрытие графа G.

Случай 4. В дереве T имеется путь x_1, x_2, x_3 такой, что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = 2$, $\deg(x_3) \geqslant 2$. Выберем вершины $a_1 \in K(x_1)$, $a_2 \in K(x_2)$, $a_3 \in K(x_3)$. Рассмотрим граф G', полученный из графа G удалением этих трёх вершин. Пусть P — наибольшая упаковка, C — наименьшее покрытие графа G'. По предположению индукции $|P| = |C|$. Если к P добавить тройку $\{a_1, a_2, a_3\}$, то получится упаковка графа G мощности $|P| + 1$. Покажем, что имеется покрытие той же мощности. Множества $K(x_i) - \{a_i\}$, $i = 1, 2, 3$, являются секциями в графе G' (точнее, те из них, которые непусты). Если множество $K(x_i) - \{a_i\}$ входит в C (такое множество может быть только одно), то $C \cup \{a_i\}$ — покрытие графа G. Если же ни одно из этих множеств не включено в C, то среди них есть пустые. Пусть i — наибольшее, при котором $|K(x_i)| = 1$. Тогда $C \cup \{a_i\}$ — покрытие графа G. Лемма 2 доказана.

2. Запрещённые подграфы

Непосредственной проверкой легко установить, что три графа, изображённые на рис. 1, не принадлежат классу $\mathcal{K}(P_3)$. Для каждого из них $\mathrm{pack}(G) = 1, \mathrm{cover}(G) = 2$. При этом каждый порождённый подграф каждого из них кёнигов. Таким образом, справедлива



D_1 D_2 D_3

Рис. 1

Лемма 3. *Графы D_1, D_2, D_3 являются минимальными запрещёнными графами для $\mathcal{K}(P_3)$.*

Рассмотрим теперь несколько бесконечных серий минимальных запрещённых подграфов для $\mathcal{K}(P_3)$. Очевидно, что

$$\mathrm{pack}(C_{3k}) = \mathrm{pack}(C_{3k+1}) = \mathrm{pack}(C_{3k+2}) = k,$$

$$\mathrm{cover}(C_{3k}) = \mathrm{cover}(C_{3k-1}) = \mathrm{cover}(C_{3k-2}) = k.$$

Поэтому ввиду леммы 2 справедлива

Лемма 4. *Цикл C_n принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$, если n кратно* 3, *и является минимальным запрещённым графом для $\mathcal{K}(P_3)$, если n не кратно* 3.

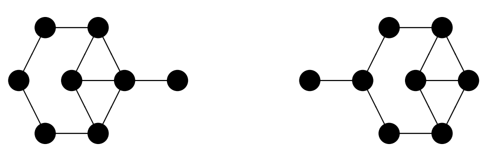
Рассмотрим граф, получающийся из цикла C_n добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла. Этот граф обозначим через $A(n,k)$, где k — расстояние между вершинами цикла, смежными с добавленными вершинами.

Лемма 5. *Если n кратно* 3, *а k не кратно* 3, *то $A(n,k)$ является минимальным запрещённым графом для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Доказательство. Пусть $n = 3t$. Очевидно, что $\mathrm{pack}(A(n,k))=t$. Пусть M — наименьшее покрытие цикла C_n. Тогда M является 3-классом. Так как k не кратно 3, одна из вершин, смежных с вершинами степени 1 в $A(n,k)$, не принадлежит M. Но тогда эта вершина, смежная с ней вершина степени 1 и одна из смежных с ней вершин цикла порождают подграф P_3, не покрытый множеством M. Следовательно, $\mathrm{cover}(A(n,k)) > t$ и $A(n,k) \notin \mathcal{K}(P_3)$.

Все порождённые подграфы графа $A(n,k)$ являются лесами, кроме графа, состоящего из цикла с добавленной вершиной степени 1. Но для этого графа, очевидно, $\mathrm{pack}(G) = \mathrm{cover}(G) = t$, так что и он кёнигов. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим граф, получающийся из цикла C_n добавлением двух вершин a и b, не смежных между собой, причём a соединяется ребром с одной вершиной цикла, а b — с тремя подряд идущими вершинами цикла. Этот граф обозначим через $B(n,k)$, где k — расстояние между вершиной, смежной с a, и средней из трёх вершин, смежных с b. На рис. 2 показаны графы $B(6,0)$ и $B(6,3)$. Отметим, что первый из них содержит запрещённый подграф D_2.



$B(6,0)$ $B(6,3)$

Рис. 2

Лемма 6. *Если n и k кратны 3, $k \neq 0$, то $B(n,k)$ — минимальный запрещённый граф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Доказательство. Пусть $n = 3t$. Очевидно, что $\mathrm{pack}(A(n,k)) = t$. Легко видеть, что любое из трёх наименьших покрытий цикла C_n не покрывает какую-нибудь тройку, содержащую одну из добавленных вершин, поэтому $\mathrm{cover}(A(n,k)) > t$. Все порождённые подграфы этого графа являются расширенными лесами, кроме двух, один из которых рассмотрен в доказательстве леммы 5, а другой состоит из C_n с добавленной вершиной степени 3, и для него, как легко видеть, $\mathrm{pack}(G) = \mathrm{cover}(G) = t$. Лемма 6 доказана.

Через $C(k_1,k_2,k_3)$ обозначим граф, полученный из цикла длины $n = k_1+k_2+k_3$ заменой 2-кликами трёх вершин, расстояния между которыми равны k_1, k_2, k_3.

Лемма 7. *Если $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv 1 \pmod 3$ и $k_i \geqslant 4$, $i = 1,2,3$, то $C(k_1,k_2,k_3)$ — минимальный запрещённый подграф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Доказательство. Можно считать, что замене подверглись вершины с номерами 0, k_1 и $k_1 + k_2$. Обозначим соответствующие секции через A_0, A_1 и A_2. Пусть $n = 3t$. Очевидно, что $\mathrm{pack}(C(k_1,k_2,k_3)) \geqslant t$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Если неравенство строгое, то существует упаковка, разбивающая все вершины графа на тройки. В ней обязательно есть тройки $\{x,1,2\}$, где $x \in K_0$, и $\{y, k_1+1, k_1+2\}$, где $y \in K_1$. Тем самым на отрезке от 0 до k_1 имеется $k_1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$ вершин и они все должны быть разбиты на тройки, что невозможно. Итак, $\mathrm{pack}(C(k_1,k_2,k_3)) = t$. Но $\mathrm{cover}(C(k_1,k_2,k_3)) > t$, так как в любое из трёх наименьших покрытий графа C_n входит одна из вершин 0, k_1 и $k_1 + k_2$.

Среди порождённых подграфов графа $C(k_1,k_2,k_3)$ имеются расширенные леса, цикл с добавленной вершиной степени 3, рассмотренный ранее, и цикл с двумя добавленными вершинами степени 3. Для этого последнего, очевидно, $\mathrm{pack}(G) = \mathrm{cover}(G) = t$. Лемма 7 доказана.

3. Как устроены графы из $\mathcal{K}(P_3)$

Связные графы из класса $\mathcal{K}(P_3)$ удобно разделить на две категории: расширенные циклы и все остальные графы, последние будем называть *ординарными*. В этом разделе рассмотрим ординарные графы, а в следующем — расширенные циклы.

Введём обозначение $\mathcal{L}$ для множества всех запрещённых графов, фигурирующих в леммах 3–6: $\mathcal{L} = \{D_1, D_2, D_3\} \cup \{C_n \mid n \text{ не кратно } 3\} \cup$

$\{A(n,k) \mid n$ кратно 3, k не кратно $3\} \cup \{B(n,k) \mid n,k$ кратны 3, $k \neq 0\}$.

Пусть H — мультиграф без петель. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу, в том числе петля) этого мультиграфа подразобьём двумя вершинами. Заменим каждую вершину, добавленную при подразбиении, и каждую вершину степени 1 или 2, не принадлежащую циклу, какой-нибудь кликой. Полученный таким образом граф будем называть *расширенным 2-подразбиением* исходного мультиграфа.

Теорема 1. *Для связного графа G следующие утверждения равносильны*:

(i) *G — ординарный кёнигов граф*;

(ii) *G — нерасширенный цикл и не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{L}$*;

(iii) *G — расширенное 2-подразбиение некоторого мультиграфа, отличного от простого цикла.*

Доказательство. Из лемм 3–6 следует, что (i) влечёт (ii). Покажем, что из (ii) следует (iii).

Пусть G — связный граф, не содержащий подграфов из $\mathcal{L}$. На множестве вершин графа G определим отношение подобия: две вершины подобны, если они смежны и любая вершина, смежная с одной из них, смежна и с другой. Очевидно, это отношение эквивалентности и классы эквивалентности являются кликами. Если A и B — два разных класса, то либо каждая вершина из A смежна с каждой вершиной из B, либо каждая не смежна с каждой. Выберем по одной вершине из каждого класса и обозначим через S подграф, порождённый всеми выбранными вершинами.

Покажем сначала, что в графе S нет треугольников. Действительно, пусть A — максимальная клика в S. Рассмотрим две возможности.

Случай 1. Вне A имеется вершина x, смежная с не менее чем двумя вершинами клики. Пусть y и z — вершины клики, смежные с x. Так как A — максимальная клика, в ней есть вершина u, не смежная с x. Вершины y и z принадлежат разным классам подобия, поэтому в графе G существует вершина v, смежная с одной из них и не смежная с другой. Пусть v смежна с y. Если нет рёбер (x,v) и (u,v), то образуется порождённый подграф D_2, если есть только одно из этих рёбер, то — D_1, а если есть оба, то — C_4.

Случай 2. Каждая вершина вне A смежна не более чем с одной вершиной из A. Пусть x,y,z — вершины из A. Так как x и y принадлежат разным классам подобия, существует вершина, смежная с одной из них и не смежная с другой. Пусть вершина u смежна с x и не смежна с y. По той же причине существует вершина v, смежная с одной из y, z (пусть с y) и не смежная с другой. Но тогда множество $\{x, y, z, u, v\}$ порождает подграф $A(3, 1)$, если u и v несмежны, а если смежны, то множество $\{x, y, v, u\}$ порождает C_4.

Итак, в графе S нет треугольников. Пусть x — вершина степени 3 или выше в S. Возьмём три вершины u, v, w, смежные с вершиной x в S. Они несмежны между собой, так как в S нет тругольников. Если в графе G имеется вершина x', подобная x, то вершины x, x', u, v, w образуют порождённый подграф D_3. Значит, каждая вершина степени 3 и выше в графе S образует в графе G класс подобия, состоящий из одной этой вершины, а нетривиальным классам подобия соответствуют в графе S вершины степени 1 или 2. Следовательно, граф G является расширением графа S.

Пусть C — какой-нибудь порождённый цикл в графе S. Из леммы 4 следует, что длина этого цикла кратна 3. В графе G вершина вне C может быть смежна либо только с одной вершиной на C, либо с тремя подряд идущими вершинами. В любом другом случае, как нетрудно проверить, образуется запрещённый подграф типа $A(n, k)$ или цикл длины, не кратной 3, или D_1. Если две вершины вне C смежны с одной и той же тройкой вершин на C, то они смежны и между собой, так как иначе образуется порождённый подграф D_2. Таким образом, все вершины графа G, смежные с одной тройкой на C, образуют клику. Такую клику будем называть *главной* с основанием x, где x — средняя вершина тройки (центр P_3), и обозначать через $K(x)$ (x тоже включается в $K(x)$). Если x и y — соседние вершины цикла C, то каждая вершина из $K(x)$ смежна с каждой вершиной из $K(y)$, иначе образовался бы порождённый подграф D_1. Обратно, вершина, не принадлежащая главной клике и смежная с вершиной из этой клики, может быть только вершиной из соседней клики, в противном случае образуется один из запрещённых подграфов D_1, D_2, D_3. Отсюда следует, что главные клики являются классами подобия и смежны они тогда и только тогда, когда их основания — соседние вершины цикла.

Вершину x цикла C назовём *контактной*, если вне цикла имеется вершина, смежная на цикле только с вершиной x. Так как G не является расширенным циклом, контактная вершина существует. Из леммы 5 следует, что все контактные вершины данного цикла принадлежат одному 3-классу. Назовём его *главным* 3-классом. Из леммы 6 следует, что не существует нетривиальных главных клик с основаниями, принадлежащими главному 3-классу. В графе S все вершины двух других 3-классов имеют степень 2. Если два цикла в графе S имеют общие вершины, то каждая такая вершина либо принадлежит, либо не принадлежит главным 3-классам одновременно в обоих циклах.

Построим мультиграф M, заменяя во всех циклах графа S каждый путь длины 3, соединяющий две вершины из главного 3-класса, одним ребром. Очевидно, что S получается из M двойным подразбиением каждого циклового ребра, а G является расширенным 2-подразбиением мультиграфа M.

Докажем, что из (iii) следует (i). Допустим, G — граф, являющийся расширенным 2-подразбиением мультиграфа M. Пусть A — множество всех цикловых вершин мультиграфа M. Для каждой из этих вершин выберем в графе G какую-нибудь тройку, состоящую из неё и двух вершин, добавленных при подразбиении. Пусть B — множество всех выбранных троек. Если из графа G удалить все вершины множества A, то оставшийся граф F — расширенный лес, для него по лемме 2 $\mathrm{pack}(F) = \mathrm{cover}(F)$. Добавляя к минимальному покрытию графа F множество A, а к максимальной упаковке — множество B, получим, очевидно, равномощные покрытие и упаковку графа G. Таким образом, $\mathrm{pack}(G) = \mathrm{cover}(G)$. Теорема 1 доказана.

4. Расширенные циклы

Расширенный цикл получается из простого заменой его вершин кликами-секциями. Секции нумеруются так же, как вершины, из которых они произошли. Если некоторое множество вершин состоит из целых секций, то будем для описания этого множества перечислять номера составляющих его секций в квадратных скобках.

Из леммы 7 следует, что не все расширения циклов, длина которых кратна 3, являются кёниговыми графами. Наименьший из запрещённых подграфов, описываемых этой леммой, — это $C(4, 4, 4)$, получаемый расширением C_{12}.

В расширенном цикле каждая тройка состоит из вершин трёх последовательных секций. При этом неважно, какие именно вершины из этих секций входят в тройку. Поэтому чтобы указать тройку, будем просто перечислять в круглых скобках номера секций, содержащих её вершины.

Допустим, что в расширенном цикле задана некоторая упаковка. Вершину, не принадлежащую никакой тройке этой упаковки, назовём *свободной*. Секцию, содержащую свободную вершину, будем называть *де-*

фектной. Ясно, что в наибольшей упаковке не может быть трёх дефектных секций подряд. Такие три подряд идущие дефектные секции будем называть *блоком*.

Покрытие C назовём *стерильным* относительно упаковки P, если

(a) оно не содержит дефектных секций;

(b) всякая тройка упаковки содержит ровно одну вершину из покрытия.

Из (a) и (b) следует, что имеется биекция между C и P, следовательно, справедлива

Лемма 8. *Если покрытие C стерильно относительно упаковки P, то $|P| = |C|$.*

Введём операцию *сдвига*, применяемую к упаковке. Допустим, в упаковке есть тройка $(k-1, k, k+1)$. Сдвиг вправо может быть применен, если секция $k+2$ дефектная, и состоит в замене тройки $(k-1, k, k+1)$ тройкой $(k, k+1, k+2)$. В результате получается упаковка с дефектной секцией $k-1$. Секция $k+2$ может перестать быть дефектной, статус остальных секций не изменяется. Аналогично сдвиг влево применяется, если секция $k-2$ дефектная, и состоит в замене тройки $(k-1, k, k+1)$ тройкой $(k-2, k-1, k)$, при этом получается упаковка с дефектной секцией $k+1$.

Теорема 2. *Каждое расширение циклов C_6 и C_9 является кёниговым графом.*

Доказательство. Покажем, что для всякого такого графа мощность наибольшей упаковки равна мощности наименьшего покрытия. Отсюда и из леммы 2 следует, что все они кёниговы.

Рассмотрим сначала расширения цикла C_6. Пусть P — наибольшая упаковка для некоторого такого расширения. Если секции 0 и 3 не дефектны, то $[0,3]$ — стерильное покрытие относительно этой упаковки и применяем лемму 8. Аналогично, если не являются дефектными секции 1 и 4 или секции 2 и 5. Остаётся рассмотреть случаи, когда в каждой из этих пар есть дефектная секция, при этом нет трёх дефектных секций подряд. С точностью до циклического сдвига имеется единственная возможность: дефектными являются секции 0, 2, 4. Если в упаковке есть тройка $(1,2,3)$, то её сдвиг вправо приводит к образованию блока $(0,1,2)$. Следовательно, упаковка P — не наибольшая. Аналогично в случае, если в P есть тройка $(3,4,5)$ или $(5,0,1)$. Если же ни одной из этих троек нет, то $[1,3,5]$ — стерильное покрытие.

Перейдём к расширениям C_9. Рассмотрим некоторую наибольшую упаковку для такого расширения. Как и в предыдущем случае, заключаем, что если среди секций некоторого 3-класса нет дефектных, то эти секции образуют стерильное покрытие. Остаётся рассмотреть случаи, когда в каждом 3-классе есть дефектная секция. Легко проверить, что с точностью до циклического сдвига и зеркального отражения имеется семь вариантов (перечисляются дефектные секции в каждом варианте): $\{0,1,5\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,1,3,5\}$, $\{0,1,4,5\}$, $\{0,2,4,6\}$, $\{0,1,3,5,6\}$ и $\{0,1,3,5,7\}$. Рассмотрим каждый из них.

1. Дефектные секции $0,1,5$. Если в упаковке есть тройка $(6,7,8)$, то при сдвиге её влево получаем блок $(8,0,1)$. Если есть тройка $(2,3,4)$, то сдвиг её вправо даёт блок $(0,1,2)$. Допустим, что тех и других троек нет. Если нет и тройки $(4,5,6)$, то покрытие $[2,4,6,8]$ стерильно. Допустим, что такая тройка есть. Если нет тройки $(7,8,0)$, то покрытие $[2,4,7,8]$ стерильно, а если нет тройки $(1,2,3)$, то стерильно $[2,3,6,8]$. Если же обе тройки есть, то следующая последовательность сдвигов приводит к образованию блока $(3,4,5)$: $(7,8,0)$ вправо, $(4,5,6)$ вправо, $(1,2,3)$ влево.

2. Дефектные секции $0,2,4$. Если есть тройка $(1,2,3)$, то сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройки $(5,6,7)$ и $(8,0,1)$, то при одновременном сдвиге первой из них влево, а второй вправо возникает блок $(7,8,0)$. Аналогично, если есть тройки $(6,7,8)$ и $(3,4,5)$, то одновременный сдвиг даёт блок $(4,5,6)$. Остаётся рассмотреть случаи, когда в той и другой паре одна из троек отсутствует:

если нет $(5,6,7)$ и $(6,7,8)$, то $[1,3,6,7]$ — стерильное покрытие,
если нет $(5,6,7)$ и $(3,4,5)$, то $[1,3,5,7]$ — стерильное покрытие,
если нет $(8,0,1)$ и $(6,7,8)$, то $[1,3,6,8]$ — стерильное покрытие,
если нет $(8,0,1)$ и $(3,4,5)$, то $[1,3,5,8]$ — стерильное покрытие.

3. Дефектные секции $0,1,3,5$. Если есть тройка $(2,3,4)$, то её сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройка $(6,7,8)$, то её сдвиг влево даёт блок $(8,0,1)$. Допустим, что этих троек нет. Если нет тройки $(4,5,6)$, то покрытие $[2,4,6,8]$ стерильно. Если нет тройки $(7,8,0)$, то покрытие $[2,4,7,8]$ стерильно. Допустим, что тройки $(4,5,6)$ и $(7,8,0)$ есть. Тогда одновременный сдвиг $(4,5,6)$ влево и $(7,8,0)$ вправо даёт блок $(5,6,7)$.

4. Дефектные секции $0,1,4,5$. Если есть тройка $(2,3,4)$, то её сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройка $(6,7,8)$, то её сдвиг вправо даёт блок $(4,5,6)$. Если есть тройка $(1,2,3)$, то её сдвиг влево даёт блок $(3,4,5)$. Если всех этих троек нет, то $[2,3,6,8]$ — стерильное покрытие.

5. Дефектные секции $0,2,4,6$. Если есть тройка $(1,2,3)$, то сдвиг влево даёт блок $(2,3,4)$. Если есть тройка $(3,4,5)$, то при сдвиге её вправо возникает блок $(2,3,4)$. Допустим, что этих троек нет. Если нет тройки

$(5,6,7)$, то $[1,3,5,7]$ — стерильное покрытие. Если нет тройки $(8,0,1)$, то $[1,3,5,8]$ — стерильное покрытие. Если такие тройки есть, то одновременный сдвиг $(5,6,7)$ влево, а $(8,0,1)$ вправо даёт блок $(7,8,0)$.

6. Дефектные секции $0,1,3,5,6$. Если есть тройка $(2,3,4)$, то её сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройка $(6,7,8)$, то её сдвиг влево даёт блок $(8,0,1)$. Если есть тройка $(7,8,0)$, то её сдвиг вправо даёт блок $(5,6,7)$. Если никаких из перечисленных троек нет, то $[2,4,7,8]$ — стерильное покрытие.

7. Дефектные секции $0,1,3,5,7$. Если есть тройка $(2,3,4)$, то её сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройка $(6,7,8)$, то её сдвиг влево даёт блок $(8,0,1)$. Если этих троек нет, то $[2,4,6,8]$ — стерильное покрытие. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ding G., Xu Z., Zang W.** Packing cycles in graphs. II // J. Comb. Theory. Ser. B. — 2003. — Vol. 87. — P. 244–253.
2. **Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.** Geometric algorithms and combinatorial optimization. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993. — 362 p.
3. **Hell P.** Graph packing // Electron. Notes Discrete Math. — 2000. — Vol. 5. — P. 170–173.
4. **Yuster R.** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition // Comput. Sci. Rev. — 2007. — Vol. 1. — P. 12–26.

Алексеев Владимир Евгеньевич,
e-mail: aleve@rambler.ru
Мокеев Дмитрий Борисович,
e-mail: MokeevDB@gmail.com

Статья поступила
19 сентября 2011 г.

Переработанный вариант —
8 февраля 2012 г.