ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 48–59

УДК 519.175.3

# ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ЧИСЛА ПОМЕЧЕННЫХ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

*В. А. Воблый*

**Аннотация.** Получена новая формула, выражающая число помеченных связных графов через производящую функцию их блоков. В качестве приложения рассматриваются кактусы и связные внешнепланарные графы.

**Ключевые слова:** перечисление, связный граф, блок, кактус, внешнепланарный граф.

*Посвящается памяти
Филиппа Флажоле*

## Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы. *Точкой сочленения* связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. Классическое функциональное уравнение связывает производящие функции помеченных связных графов и их блоков.

В статье из этого уравнения с помощью теоремы обращения Лагранжа выводится формула, удобная для точного и асимптотического перечисления помеченных графов в случае, когда известна производящая функция их блоков. В качестве примера получены точные и асимптотические формулы для числа кактусов и связных внешнепланарных графов.

Перечисление кактусов используется в статистической физике и при классификации комплексных многочленов, а также в комбинаторной оптимизации. Класс внешнепланарных графов является тестовым для класса планарных графов. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующимся на результатах перечисления таких графов.

## 1. Формула для числа помеченных связных графов

Пусть $C_n$ ($B_n$) — число помеченных связных графов (блоков) с $n$ вершинами. Введём экспоненциальные производящие функции:

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Хорошо известно соотношение [5, с. 20]

$$\ln C'(t) = B'(tC'(t)). \tag{1}$$

**Лемма 1.** *Число $C_n$ помеченных связных графов с $n$ вершинами равно*

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[x^{n-1}]\exp(nB'(x)). \tag{2}$$

Доказательство. Напомним, что $B(t)$ и $C(t)$ — формальные степенные ряды, $[x^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета [2, 1.2].

Так как $C'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, имеем $C_n = (n-1)![t^n]tC'(t)$. Обозначим $w = tC'(t)$. С помощью (1) получим

$$tC'(t) = t\exp(B'(tC'(t))) \quad \text{или} \quad w = t\exp(B'(w)).$$

В силу формулы обращения Лагранжа [2, с. 26] из $w = t\varphi(w)$ следует, что $[t^n]w = \frac{1}{n}[x^{n-1}](\varphi(x))^n$. В нашем случае $\varphi(w) = \exp(B'(w))$, поэтому

$$C_n = (n-1)![t^n]tC'(t) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{n-1}]\exp(nB'(x)),$$

что и требовалось доказать. Лемма 1 доказана.

Заметим, что в [1] дано альтернативное доказательство формулы (2) и из неё выведено соотношение (1).

Рассмотрим сначала элементарный пример. Пусть все блоки связного графа — рёбра. Очевидно, что такой граф — дерево. Так как в этом случае $B(x) = x^2/2$, в силу формулы (2) получим формулу Кэли:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[x^{n-1}]\exp(nx) = \frac{(n-1)!}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-2}.$$

## 2. Перечисление помеченных кактусов

*Кактусом* называется связный граф, в котором нет рёбер, лежащих более чем на одном простом цикле [5, с. 93]. Все блоки кактуса — рёбра или простые циклы (многоугольники) [7]. Форд и Уленбек перечислили помеченные кактусы с заданным распределением числа вершин по многоугольникам, а также нашли соответствующую асимптотику при большом числе вершин [9, 10].

Пусть $\mathrm{Ca}_n(n_2, n_3, \ldots)$ — число помеченных кактусов с $n$ вершинами, имеющих $n_2$ блоков-рёбер и $n_i$ блоков-многоугольников с $i$ вершинами при $i \geqslant 3$, и $\mathrm{Ca}_n$ — число помеченных кактусов с $n$ вершинами. В [9] получена формула

$$\mathrm{Ca}_n(n_2, n_3, \ldots) = \frac{(n-1)!\, n^{k-1}}{n_2! \prod\limits_{i \geqslant 3} 2^{n_i} n_i!},$$

где $n - 1 = n_2 + 2n_3 + \ldots$, $n_2 + n_3 + \ldots = k$ — число блоков.

Следовательно [11], при $n \geqslant 2$

$$\mathrm{Ca}_n = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{\substack{n_2+n_3+\ldots=k,\\ n_2+2n_3+\ldots=n-1}} \frac{(n-1)!\, n^{k-1}}{n_2! \prod\limits_{i \geqslant 3} 2^{n_i} n_i!}.$$

В статье получена новая формула для $\mathrm{Ca}_n$, не содержащая суммирования по всем разбиениям целого числа.

**Теорема 1.** *Число помеченных кактусов с $n$ вершинами при $n \geqslant 3$ равно*

$$Ca_n = \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{2^k k!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-i-2}{k-i-1}. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим специальный случай блоков связного графа. Обозначим через $\overline{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа помеченных блоков, которые являются ребром или простым циклом с $n$ вершинами. Применяя формулу (2), имеем

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp(n\overline{B}'(z)).$$

Так как число помеченных циклов с $n$ вершинами равно $(n-1)!/2$, получим

$$\overline{B}(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2}(n-1)! \frac{z^n}{n!} = \frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \ln(1-z),$$

$$\overline{B}'(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-z)} = \frac{z(2-z)}{2(1-z)}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}] \exp\left(\frac{nz(2-z)}{2(1-z)}\right) z^{-n}. \qquad (4)$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдём

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\left(z^{-n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k (2-z)^k z^{k-n}}{k! 2^k (1-z)^k}\right)$$
$$= (n-1)![z^{-1}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \left(1 + \frac{1}{1-z}\right)^k z^{k-n}.$$

С помощью формулы бинома Ньютона получим

$$\mathrm{Ca}_n = (n-1)![z^{-1}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \left(1 + \sum_{q=1}^{k} \binom{k}{q} (1-z)^{-q}\right) z^{k-n}.$$

Используя известный ряд [3, с. 141]

$$(1-z)^{-q} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+q-1}{q-1} z^m, \qquad (5)$$

имеем

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)![z^{-1}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \sum_{q=1}^{k} \binom{k}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+q-1}{q-1} z^{m+k-n}$$
$$= \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \sum_{q=1}^{k} \binom{k}{q} \binom{n+q-k-2}{q-1}.$$

После замены индекса суммирования $i = k - q$ найдём

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{n^{n-2}}{2^{n-1}} + (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{k! 2^k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{q} \binom{n-i-2}{k-i-1}.$$

Учитывая, что второй биномиальный коэффициент обращается в нуль при $k-i-1 > n-i-2$, т. е. при $k > n-1$, получим (3). Теорема 1 доказана.

В [10, 12] Форд и Уленбек нашли асимптотику

$$\mathrm{Ca}_n \sim n! \frac{b}{2\sqrt{\pi}} \alpha^{-n+1/2)} n^{-5/2} \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $b = 0.87170$ и $\alpha = 0.23874$, но авторами дан только набросок доказательства. С помощью метода перевала дадим альтернативный вывод из формулы (4) асимптотики для $\mathrm{Ca}_n$ при $n \to \infty$. Так как ряд для $\overline{B}(z)$ сходится при $|z| < 1$, оператор формального вычета является контурным интегралом.

**Теорема Флажоле — Седжвика** [8, теорема VIII.8]. *Пусть*

$$F(N, n) = [z^N]\{a(z)(b(z))^n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint a(z)(b(z))^n \frac{dz}{z^{N+1}}$$

*и функции $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяют следующим условиям*:

(i) *функции* $a(z) = \sum\limits_{j \geqslant 0} a_j z^j$ *и* $b(z) = \sum\limits_{j \geqslant 0} b_j z^j$ *в точке* $z = 0$ *аналитические и имеют неотрицательные коэффициенты, кроме того,* $b(0) \neq 0$;

(ii) $\text{НОД}\{j \mid b_j > 0\} = 1$;

(iii) *если* $R \leqslant \infty$ — *радиус сходимости* $b(z)$, *то радиус сходимости* $a(z)$ *не меньше* $R$.

*Пусть* $T = \lim\limits_{x \to R-0} \frac{x b'(x)}{b(x)}$, $\lambda$ — *такое число, что* $0 < \lambda < T$, $r$ — *единственный положительный корень уравнения* $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$, *и пусть*

$$\sigma = \frac{d^2}{dr^2}(\ln b(r) - \lambda \ln r).$$

*Тогда для целого* $N = \lambda n$ *при* $n \to \infty$ *и* $N \to \infty$ *верно асимптотическое равенство*

$$F(N, n) \sim a(r) \frac{(b(r))^n}{r^{N+1}\sqrt{2\pi n \sigma}}.$$

**Теорема 2.** *Для числа помеченных кактусов с* $n$ *вершинами при* $n \to \infty$ *верна асимптотическая формула*

$$Ca_n \sim c n^{-5/2} a^n n!, \tag{6}$$

*где* $c = 0.1201498132,\ a = 4.188654598.$

Доказательство. В нашем случае в силу (4) имеем

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^n]\left\{z\left(\exp\left(\frac{z(2-z)}{2(1-z)}\right)\right)^n\right\} = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n),$$

где $N = n,\ \lambda = 1,\ a(z) = z,\ b(z) = \exp\left(\frac{z(2-z)}{2(1-z)}\right)$. Очевидно, что функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$ и $b(0) = 1$. Функция $b(z)$ имеет положительные коэффициенты, так как $b(z) = \exp(\overline{B}(z))$ и $\overline{B}(z)$ — производящая функция для числа помеченных блоков частного вида. Поскольку $b_2, b_3 > 0$, имеем НОД$\{j \mid b_j > 0\} = 1$. Так как $z = 1$ — ближайшая к началу координат особая точка $b(z)$, радиус сходимости $R$ функции $b(z)$ равен 1. Очевидно, что $a(z)$ имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, условия (i)–(iii) теоремы Флажоле — Седжвика выполнены.

Найдём

$$T = \lim_{x\to 1-0}\frac{xb'(x)}{b(x)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{x(2-2x+x^2)}{2(1-x)^2} = +\infty\,, \quad 0 < \lambda < T.$$

В нашем случае уравнение $r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ имеет вид $r\frac{2-2r+r^2}{2(1-r)^2} = 1$ или $r^3 - 4r^2 + 6r - 2 = 0$. Решая это кубическое уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным положительным корнем является число $r = 0.456310987$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)}\right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left(\frac{2-2r+r^2}{2(1-r)^2}\right)' + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(1-r)^3} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma = 11.02488154$. Также с помощью Maple вычислим

$$c = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0.1201498132, \quad a = \frac{b(r)}{r} = 4.188654588.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$\mathrm{Ca}_n = \frac{(n-1)!}{n}F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}n^{-1/2}\left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n!cn^{-5/2}a^n.$$

Если преобразуем асимптотику Форда — Уленбека к виду (6), то получим $c = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = 0.12015,\ a = \frac{1}{\alpha} = 4.1886$. Следовательно, они совпадают. Теорема 2 доказана.

## 3. Перечисление помеченных связных внешнепланарных графов

*Внешнепланарным* называется планарный граф, который можно уложить на плоскости так, чтобы все его вершины лежали на границе одной грани (внешней) [4, с. 131].

**Теорема 3.** *Пусть $\widetilde{C}_n$ — число помеченных связных внешнепланарных графов с $n$ вершинами. Тогда при $n \geqslant 3$ верна формула*

$$\widetilde{C}_n = n^{n-2} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)n^{n-3} + \frac{(n-1)!}{n}\sum_{q=1}^{n-2}\frac{n^{n-q-2}2^q}{(n-q-2)!}$$
$$\times \sum_{i=0}^{n-q-2}\binom{n-q-2}{i}\frac{1}{4^i}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\frac{1}{2^j}\left(2\binom{q}{q-i-j+1} - \binom{q}{q-i-j-1}\right).$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{B}(x)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных внешнепланарных блоков с $n$ вершинами. Известно [6], что

$$\widetilde{B}'(x) = \frac{1}{8}(1+5x-\sqrt{1-6x+x^2}).$$

С помощью формулы (2) получим

$$\widetilde{C}_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp\left(\frac{n}{8}\big(1+5x-\sqrt{1-6x+x^2}\big)\right)x^{-n}. \tag{7}$$

Сделаем замену переменной: $\frac{1}{8}(1+5x-\sqrt{1-6x+x^2}) = x(t+1)$. Выражая $t$ через $x$, найдём

$$x(t) = \frac{2t}{8t^2+6t+1}, \quad x'(t) = \frac{2(1-8t^2)}{(8t^2+6t+1)^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\widetilde{C}_n = \frac{(n-1)!}{n}[t^{-1}]\exp\left(\frac{2nt(t+1)}{8t^2+6t+1}\right)\left(\frac{8t^2+6t+1}{2t}\right)^n\frac{2(1-8t^2)}{(8t^2+6t+1)^2}.$$

Разложим экспоненту в степенной ряд:

$$\widetilde{C}_n = \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2n)^p}{p!}[t^{-1}](t+1)^p(8t^2+6t+1)^{n-p-2}(1-8t^2)t^{p-n}$$
$$= \widetilde{C}'_n - 8\widetilde{C}''_n,$$

$$\widetilde{C}'_n = \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2n)^p}{p!} [t^{-1}](t+1)^p (8t^2+6t+1)^{n-p-2} t^{p-n}$$
$$= \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(2n)^p}{p!} [t^{-1}](t+1)^p (8t^2+6t+1)^{n-p-2} t^{p-n}.$$

Сделаем замену индекса суммирования $q = n - p - 2$:

$$\widetilde{C}'_n = n^{n-2} + \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}} \sum_{q=0}^{n-2} \frac{(2n)^{n-q-2}}{(n-q-2)!} [t^{-1}](t+1)^{n-q-2}$$
$$\times (2t+1)^q (4t+1)^q t^{-q-2}.$$

С помощью формулы бинома Ньютона получим

$$\widetilde{C}'_n = n^{n-2} + \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}} \sum_{q=1}^{n-2} \frac{(2n)^{n-q-2}}{(n-q-2)!}$$
$$\times \sum_{i=0}^{n-q-2} \binom{n-q-2}{i} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} 2^j \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} 4^k [t^{-1}] t^{i+j+k-q-2}$$
$$= n^{n-2} + \frac{2(n-1)!}{n} \sum_{q=0}^{n-2} \frac{n^{n-q-2} 2^q}{(n-q-2)!}$$
$$\times \sum_{i=0}^{n-q-2} \binom{n-q-2}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \binom{q}{q-i-j+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

Аналогично найдём

$$\widetilde{C}''_n = \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2n)^p}{p!} [t^{-1}](t+1)^p (8t^2+6t+1)^{n-p-2} t^{p-n+2}$$
$$= \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}} \sum_{q=1}^{n-2} \frac{(2n)^{n-q-2}}{(n-q-2)!} [t^{-1}](t+1)^{n-q-2} (2t+1)^q (4t+1)^q t^{-q}$$
$$= \frac{2(n-1)!}{n} \sum_{q=1}^{n-2} \frac{n^{n-q-2} 2^q}{(n-q-2)!} \sum_{i=0}^{n-q-2} \binom{n-q-2}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i$$
$$\times \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \binom{q}{q-i-j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

Выделяя в $\widetilde{C}'_n$ член при $q = 0$ и подставляя $\widetilde{C}'_n$ и $\widetilde{C}''_n$ в выражение для $\widetilde{C}_n$, получим утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

Отметим, что $\binom{n}{k} = 0$ при $k < 0$ и $k > n$.

**Теорема 4.** *Для числа $\widetilde{C}_n$ помеченных связных внешнепланарных графов с $n$ вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$\widetilde{C}_n \sim c_1 n^{-5/2} a_1^n n!, \tag{8}$$

*где* $c_1 = 0.006976094364,\ a_1 = 7.320980058.$

Доказательство. Применим теорему Флажоле — Седжвика. Формула (7) может быть представлена в виде $\widetilde{C}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n)$, где $N = n,\ \lambda = 1,\ a(z) = z,\ b(z) = \exp\left(\frac{1}{8}(1 + 5z - \sqrt{1 - 6z + z^2})\right)$. Функции $a(z)$ и $b(z)$ аналитические в точке $z = 0$, и $b(0) = 1$. Так как ближайший к началу координат корень уравнения $1 - 6z + z^2 = 0$ равен $r_0 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157$, радиус сходимости $b(z)$ также равен $r_0$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2, видим, что условия (i)–(iii) теоремы Флажоле — Седжвика выполнены. Найдём

$$T = \lim_{x \to r_0 - 0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \to r_0 - 0} x \left( \frac{5}{8} - \frac{x - 3}{8\sqrt{1 - 6x + x^2}} \right) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

Уравнение $r \frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ имеет вид $r\left(\frac{5}{8} - \frac{r-3}{8\sqrt{1-6r+r^2}}\right) = 1$ или $3r^4 - 28r^3 + 70r^2 - 58r + 8 = 0$. Решая это уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным положительным корнем, лежащем в круге сходимости $b(z)$, является число $r = 0.1707649868$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left( \frac{b'(r)}{b(r)} \right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left( \frac{5}{8} - \frac{r - 3}{8\sqrt{1 - 6r + r^2}} \right)' + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(1 - 6r + r^2)^{3/2}} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma = 3270.359067$. Также с помощью Maple вычислим

$$c_1 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0.006976094364, \quad a_1 = \frac{b(r)}{r} = 7.320980058.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$\widetilde{C}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left( \frac{b(r)}{r} \right)^n \sim n! c_1 n^{-5/2} a_1^n.$$

Теорема 4 доказана.

Отметим, что асимптотика для числа помеченных внешнепланарных графов с большим количеством вершин найдена в [6] с помощью трансфер-теоремы. Там получены значения $a \approx 7.3209$ и $c \approx 0.018216$. Сравнивая эти значения с соответствующими значениями констант, полученными в теореме 4, видим, что константы роста $a$ практически совпадают, а константа $c$ из [6] приблизительно в 2.6 раза больше соответствующей константы из теоремы 4.

Контрольный расчёт с помощью данных, полученных по формуле теоремы 3 и совпадающих с данными из «Энциклопедии целочисленных последовательностей» Слоэна [13], показал, что для $n = 10$ погрешность асимптотики из теоремы 4 равна 23%, а погрешность асимптотики из [12] равна 101%. При $n = 14$ погрешности равны 16% и 118% соответственно.

**Теорема 5.** *Для числа помеченных связных внешнепланарных графов без мостов с $n$ вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$\overline{C}_n \sim c_2 n^{-5/2} a_2^n n!, \tag{9}$$

*где* $c_2 = 0.005387386911,\ a_2 = 6.170935757.$

Доказательство. Пусть $\overline{B}(x)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных внешнепланарных блоков без мостов с $n$ вершинами. Так как графы без мостов не имеют блоков, состоящих из одного ребра, $\overline{B}(x) = \widetilde{B}(x) - \frac{x^2}{2}$, и, следовательно,

$$\overline{B}'(x) = \frac{1}{8}(1 - 3x - \sqrt{1 - 6x + x^2}).$$

Воспользуемся теоремой Флажоле — Седжвика. Представим (2) в виде $\widetilde{C}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N, n)$, где $N = n,\ \lambda = 1$. Функции $a(z) = z$ и $b(z) = \exp\left(\frac{1}{8}(1 - 3z - \sqrt{1 - 6z + z^2})\right)$ аналитические в точке $z = 0$, и $b(0) = 1$. Радиус сходимости $b(z)$ равен $r_0 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17157$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, видим, что условия (i)–(iii) теоремы Флажоле — Седжвика выполнены. Найдём

$$T = \lim_{x \to r_0 - 0} \frac{x b'(x)}{b(x)} = \lim_{x \to r_0 - 0} x \left( -\frac{3}{8} - \frac{x - 3}{8\sqrt{1 - 6x + x^2}} \right) = +\infty, \quad 0 < \lambda < T.$$

Уравнение $r\frac{b'(r)}{b(r)} = \lambda$ имеет вид $r\big( -\frac{3}{8} - \frac{r-3}{8\sqrt{1-6r+r^2}}\big) = 1$ или $r^4 - 28r^2 - 42r + 8 = 0$. Решая это уравнение с помощью Maple, видим, что его единственным положительным корнем, лежащем в круге сходимости $b(z)$, является число $r = 0.1710020761$. Вычисляя величину

$$\sigma = \left(\frac{b'(r)}{b(r)}\right)' + \frac{\lambda}{r^2} = \left(-\frac{3}{8} - \frac{r - 3}{8\sqrt{1 - 6r + r^2}}\right)' + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(1 - 6r + r^2)^{3/2}} + \frac{1}{r^2},$$

получим $\sigma = 5483.575128$. Также с помощью Maple вычислим

$$c_2 = \frac{a(r)}{r\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0.005387386911, \quad a_2 = \frac{b(r)}{r} = 6.170935757.$$

Окончательно при $n \to \infty$ имеем асимптотику

$$\overline{C}_n = \frac{(n-1)!}{n} F(N,n) \sim \frac{(n-1)!}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} n^{-1/2} \left(\frac{b(r)}{r}\right)^n \sim n! c_2 n^{-5/2} a_2^n.$$

Теорема 5 доказана.

**Следствие.** *Почти все помеченные связные внешнепланарные графы имеют мосты.*

Доказательство. В силу теорем 4 и 5 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{C}_n}{\widetilde{C}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_2 n^{-5/2} a_2^n}{c_1 n^{-5/2} a_1^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n = 0,$$

т. е. асимптотически почти нет связных внешнепланарных графов без мостов, что равносильно утверждению следствия.

Автор благодарит профессоров В. К. Леонтьева и К. Краттенталера за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения // Дискрет. математика. — 2008. — Т. 20, вып. 1. — С. 14–23.
2. **Гульден Я., Джексон Д.** Перечислительная комбинаторика. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1990. — 504 с.
3. **Прудников А. П. и др.** Интегралы и ряды. Т. 1. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. — 800 с.
4. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. — 300 с.
5. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. — М.: Мир, 1977. — 324 с.
6. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. — 2007. — Vol. 28. — P. 2091–2105.
7. **Bona M., Bousqet M., Labelle M., Leroux P.** Enumeration of $m$-ary cacti // Adv. Appl. Math. — 2000. — Vol. 24. — P. 22–56.
8. **Flajolet Ph., Sedgewick R.** Analytic combinatorics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 810 p.
9. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in theory graphs. I // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1956. — Vol. 42. — P. 122–128.

10. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in theory graphs. III // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1956. — Vol. 42. — P. 529–535.
11. **Leroux P.** Enumerative problems inspired by Mayer's theory of cluster integrals // Electron. J. Comb. — 2004. — Vol. 11. — R32.
12. **Moon J.** Counting labelled trees. — Montreal: Can. Math. Congress, 1970. — 110 p.
13. The on-line encyclopedia of integer sequences. — `http://www.research.att.com/ njas/sequences`.

*Воблый Виталий Антониевич*,
e-mail: vitvobl@yandex.ru

Статья поступила
25 сентября 2011 г.