ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 73–85

УДК 519.8

АФФИННО НЕСИСТЕМАТИЧЕСКИЕ КОДЫ *)

С. А. Малюгин

Аннотация. Совершенный двоичный код C длины $n = 2^k - 1$ называется *аффинно систематическим*, если существует k-мерное подпространство в $\{0,1\}^n$ такое, что пересечение кода C с любым смежным классом по этому подпространству является одноэлементным; в противном случае C называется *аффинно несистематическим*. Описана конструкция аффинно несистематических кодов.

Ключевые слова: совершенный код, код Хемминга, несистематический код, аффинно несистематический код, компонента.

Введение

Пусть $\{0,1\}^n$ — векторное пространство над полем из двух элементов 0 и 1. Сумму векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \{0,1\}^n$ обозначим через $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Базисный вектор, в котором i-я координата равна единице, обозначим через $\mathbf{e}_i$, а нулевой и единичный векторы — через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Число ненулевых координат вектора $\mathbf{u}$ называется его *весом*. *Носитель* вектора $\mathbf{u} \in \{0,1\}^n$ (множество индексов i, для которых $u_i = 1$) обозначается через $[\mathbf{u}]$. Совершенный код $C \subset \{0,1\}^n$ длины $n = 2^k - 1$ называется *систематическим*, если существует k-элементное подмножество $K \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что любые два неравных вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C$ различаются хотя бы в одной координате с номером, не принадлежащим K. В противном случае код C называется *несистематическим*.

В коде Хемминга H^n рассмотрим подпространство R_i, порожденное всеми векторами веса 3 с i-й координатой, равной единице. Всевозможные смежные классы вида $R_i^{\mathbf{u}} = R_i + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in H^n$, называются *i-компонентами* кода H^n, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим семейство $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{\mathbf{u}_1}, \dots, R_{i_m}^{\mathbf{u}_m}\}$, состоящее из попарно не пересекающихся i_p-компонент, где $\mathbf{u}_p \in H^n$, $p = 1, \dots, m$. Одна из основных конструкций нелинейных кодов состоит в том, что в коде H^n сдвигаются по координатам i_p все

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–01–00616 и 11–01–00997).

компоненты из семейства $\mathcal{B}$. Тем самым множество

$$H^n(\mathcal{B}) = \left(H^n \setminus \bigcup_{p=1}^{m} R_{i_p}^{\mathbf{u}_p}\right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{m} \left(R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} \oplus \mathbf{e}_{i_p}\right)\right) \tag{1}$$

является совершенным кодом [1, 7, 10, 12].

Хорошо известно, что код Хемминга H^n систематический, но довольно долго стоял вопрос о существовании несистематических нелинейных совершенных кодов. Такие коды длины $n \geqslant 255$ впервые построены в [1] сдвигами i-компонент кода H^n для i, пробегающим все значения из $\{1, \ldots, n\}$. В [11] предложена модификация конструкции [1], позволяющая строить такие коды для всех $n \geqslant 63$. Для $n = 15$ и $n = 31$ несистематические коды найдены с помощью компьютера [7, 11]. В [3, 4] получен критерий, с помощью которого можно устанавливать систематичность или несистематичность нелинейных кодов, получаемых из кода Хемминга сдвигами его непересекающихся компонент. В частности, доказано, что для построения несистематического кода любой длины $n \geqslant 15$ достаточно сдвинуть в коде Хемминга всего семь непересекающихся компонент. Этот результат даёт ответ на вопрос, поставленный Фелпсом и Ваном [11].

Определение 1. Совершенный код C длины $n = 2^k - 1$ называется *аффинно систематическим*, если в пространстве $\{0,1\}^n$ существует k-мерное подпространство L такое, что любой его смежный класс $L + \mathbf{u}$ пересекается с кодом C ровно по одному элементу. В противном случае код C называем *аффинно несистематическим*.

Из определения 1 следует, что систематичность совершенного кода влечёт его аффинную систематичность.

Определение аффинной систематичности предложено С. В. Августиновичем. Это свойство является аффинным инвариантом кода, т. е. оно сохраняется при невырожденных аффинных преобразованиях пространства $\{0,1\}^n$. Другими наиболее известными аффинными инвариантами являются ранг кода и размерность его ядра. С. В. Августиновичем также поставлен вопрос о существовании аффинно несистематических кодов. Ответ на него анонсирован в [5], а в настоящей работе даётся развёрнутое изложение анонсированных результатов.

1. Конструкция аффинно несистематических кодов

На множестве $\{0, 1, \ldots, n\}$ $(n = 2^k - 1)$ можно ввести структуру линейного пространства следующим образом. Пусть $i = i_1 \ldots i_k$ — представление числа $0 \leqslant i \leqslant n$ в двоичной системе. *Бинарной* суммой $i \oplus j$

чисел $0 \leqslant i, j \leqslant n$ называется число, двоичное представление которого есть побитовая сумма двоичных представлений чисел i и j. Таким образом на множестве индексов $\{0, 1, \ldots, n\}$ $(n = 2^k - 1)$ вводится структура линейного пространства. При этом код Хемминга H^n определяется как множество всех векторов $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^n$, для которых $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} u_i i = 0$.

Дополнительным к коду Хемминга H^n называем k-мерное подпространство $Q \subset \{0,1\}^n$, если $Q \cap H^n = \{\mathbf{0}\}$. Так как $Q + H^n = \{0,1\}^n$, дополнительное подпространство Q пересекается с каждым смежным классом $H^n + \mathbf{e}_i$ по единственному ненулевому элементу $\mathbf{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 1. *Пусть $Q = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ — дополнительное подпространство к коду Хемминга H^n, где $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_i \in H^n + \mathbf{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда $\mathbf{q}_{i \oplus j} = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Доказательство. По условию $\mathbf{q}_i = \mathbf{e}_i + \mathbf{u}_i$ для некоторых $\mathbf{u}_i \in H^n$. Тогда

$$\mathbf{q}_{i \oplus j} = \mathbf{e}_{i \oplus j} + \mathbf{u}_{i \oplus j} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{w},$$

где $\mathbf{w} = (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{i \oplus j}) + \mathbf{u}_{i \oplus j} \in H^n$. Поэтому $\mathbf{q}_{i \oplus j} + \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j + \mathbf{w} \in H^n$. Так как Q пересекается с H^n только по нулевому элементу, имеем $\mathbf{q}_{i \oplus j} + \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j = \mathbf{0}$. Лемма 1 доказана.

Определение 2. Множество индексов $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ называем *аффинно систематическим*, если существует такое дополнительное к коду Хемминга k-мерное подпространство $Q = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ $(\mathbf{q}_0 = \mathbf{0})$, что $\mathbf{q}_i \in H^n + \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\mathbf{q}_{i_s} \in R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s}$ $(s = 1, \ldots, m)$, где R_{i_s} — i_s-компоненты кода Хемминга, содержащие нулевой вектор $(s = 1, \ldots, m)$. В противном случае называем множество I *аффинно несистематическим.*

Множество индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$ названо в [3, 4] *систематическим*, если в пространстве $\{0, 1, \ldots, n\}$ существует такой базис K из k элементов, что $I \subset K \oplus K$.

Множество всех векторов пространства $\{0,1\}^n$ разбивается на орбиты относительно группы перестановочных автоморфизмов $\mathrm{Sym}(H^n)$ кода Хемминга H^n. В [4] (определение 3) орбита, носители всех векторов которой являются систематическими множествами, названа систематической, а орбита, для которой это свойство не выполняется, несистематической. В согласии с этой терминологией будем называть орбиту, носители всех векторов которой являются аффинно систематическими множествами, *аффинно систематической*, а орбиту, для которой это свойство

не выполнено, *аффинно несистематической.*

Лемма 2. *Любое систематическое множество $I \subset \{1,\dots,n\}$ является аффинно систематическим.*

Доказательство. Пусть I — систематическое множество, причём $I \subset K \oplus K$ для некоторого базисного множества $K = \{i_1,\dots,i_k\}$. Рассмотрим k-мерное подпространство Q, порождённое векторами $\mathbf{e}_{i_p}$ $(p = 1,\dots,k)$ (это k-мерная грань куба $\{0,1\}^n$). Пусть $\sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p \mathbf{e}_{i_p} \in H^n$ для некоторых $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \{0,1\}$. Из определения кода Хемминга тогда следует, что $\bigoplus\limits_{p=1}^{k} \alpha_p i_p = 0$. В силу независимости множества K все α_p равны нулю $(p = 1,\dots,k)$. Это доказывает, что пространство Q является дополнительным к коду Хемминга H^n. Рассмотрим теперь любое $i \in I$. Существуют такие два элемента $j_1, j_2 \in K$, что $i = j_1 \oplus j_2$, т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{j_1} + \mathbf{e}_{j_2} \in R_i$ и $\mathbf{u} + \mathbf{e}_i \in Q$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим любое семейство $\mathcal{B} = \left\{R_{i_1}^{\mathbf{u}_1},\dots,R_{i_m}^{\mathbf{u}_m}\right\}$ из попарно не пересекающихся компонент кода Хемминга H^n. Обозначим через $I(\mathcal{B})$ множество всех индексов i, для которых существуют i-компоненты, принадлежащие семейству $\mathcal{B}$.

Теорема 1. *Если множество индексов $I(\mathcal{B})$ аффинно систематическое, то код $H^n(\mathcal{B})$, получаемый по формуле* (1) *из кода Хемминга H^n сдвигами компонент из семейства $\mathcal{B}$, аффинно систематический.*

Доказательство. Пусть $Q = \{\mathbf{q}_0,\dots,\mathbf{q}_n\}$ — дополнительное подпространство к коду Хемминга H^n, обладающее свойством $\mathbf{q}_i \in R_i + \mathbf{e}_i$ для любого $i \in I(\mathcal{B})$. Если $\mathbf{u},\mathbf{v} \in H^n(\mathcal{B}) \cap H^n$, то из $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in Q$ следует $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{u} \in H^n(\mathcal{B}) \cap H^n$ и $\mathbf{v} \in R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} + \mathbf{e}_{i_p}$ для некоторой компоненты $R_{i_p}^{\mathbf{u}_p}$ из семейства $\mathcal{B}$. Так как $\mathbf{u} \in H^n \setminus R_{i_p}^{\mathbf{u}_p}$, получим $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin R_{i_p} + \mathbf{e}_{i_p}$. Поскольку $i_p \in I(\mathcal{B})$, тем более $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin Q$. Если $\mathbf{u} \in R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} + \mathbf{e}_{i_p}$, $\mathbf{v} \in R_{i_q}^{\mathbf{u}_q} + \mathbf{e}_{i_q}$ и $i_p = i_q$, то $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin R_{i_p}$, и снова $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin Q$. Осталось рассмотреть случай $\mathbf{u} \in R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} + \mathbf{e}_{i_p}$, $\mathbf{v} \in R_{i_q}^{\mathbf{u}_q} + \mathbf{e}_{i_q}$ и $i_p \neq i_q$. Так как все компоненты из $\mathcal{B}$ не пересекаются, имеем

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{e}_{i_p}+\mathbf{e}_{i_q} \notin R_{i_p} + R_{i_q}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H^n + \mathbf{e}_{i_p \oplus i_q}$. Допустим, что $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in Q$. Тогда в силу леммы 1 $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{q}_{i_p \oplus i_q} = \mathbf{q}_{i_p} + \mathbf{q}_{i_q} \in R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} + \mathbf{e}_{i_p} + R_{i_q}^{\mathbf{u}_q} + \mathbf{e}_{i_q}$, что противоречит включению (2). Теорема 1 доказана.

Говорим, что семейство непересекающихся компонент $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{\mathbf{u}_1}, \ldots, R_{i_m}^{\mathbf{u}_m}\}$ *не имеет кратных компонент*, если все индексы $i_1, \ldots, i_m$ различны. В этом случае $I(\mathcal{B}) = \{i_1, \ldots, i_m\}$.

Пусть $E(\mathcal{B}) = H^n \setminus \left(\bigcup\limits_{p=1}^{m} R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} \right)$ — часть кода H^n, не занятая компонентами из семейства $\mathcal{B}$.

Рассмотрим следующие два условия на семейство компонент $\mathcal{B}$:

(a) для любых индекса $i_p \in I(\mathcal{B})$ и вектора $\mathbf{q} \in H^n \setminus R_{i_p}$ пересечение $E(\mathcal{B}) \cap R_{i_p}^{\mathbf{u}_p+\mathbf{q}}$ непусто;

(b) $H^n = E(\mathcal{B}) + E(\mathcal{B})$.

Теорема 2. *Пусть семейство попарно не пересекающихся компонент $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{\mathbf{u}_1}, \ldots, R_{i_m}^{\mathbf{u}_m}\}$ не содержит кратных компонент. Если множество индексов $I(\mathcal{B})$ аффинно несистематическое и для семейства $\mathcal{B}$ выполнены условия* (a) *и* (b), *то код $H^n(\mathcal{B})$ аффинно несистематический.*

Доказательство. Рассмотрим в $\{0,1\}^n$ произвольное k-мерное подпространство Q. Допустим, что существует вектор $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in H^n \cap Q$. По условию (b) существуют такие два вектора $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E(\mathcal{B}) \subset H^n(\mathcal{B})$, что $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u} \in Q$. Допустим теперь, что $Q \cap H^n = \{\mathbf{0}\}$, т. е. Q является подпространством, дополнительным к H^n. Пусть $Q = \{\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_k\}$, где $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}_{i \oplus j} = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j$ для всех $0 \leqslant i, j \leqslant k$. Так как множество $I(\mathcal{B})$ аффинно несистематическое, найдётся такой индекс $i_p \in I(\mathcal{B})$, что $\mathbf{q}_{i_p} \notin R_{i_p} + \mathbf{e}_{i_p}$. По условию (a) существует вектор $\mathbf{v} \in E(\mathcal{B}) \cap R_{i_p}^{\mathbf{u}_p+\mathbf{q}_{i_p}+\mathbf{e}_{i_p}}$. Поэтому $\mathbf{v} \in H^n(\mathcal{B})$ и $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{q}_{i_p} \in R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} + \mathbf{e}_{i_p} \subset H^n(\mathcal{B})$, т. е. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{q}_{i_p} \in Q$. Теорема 2 доказана.

Каждая компонента кода H^n состоит из $2^{\frac{n-1}{2}}$ элементов [1]. Семейство $\mathcal{B}$ без кратных компонент может содержать не более n компонент. Условие (b) при $n > 15$ следует из неравенства

$$n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} < \frac{1}{2}\,|H^n| = 2^{n - \log_2(n+1) - 1}.$$

Условие (a) следует из того, что при $i \neq j$ число элементов в пересечении двух компонент R_i и R_j равно $2^{\frac{n+1}{4}}$ [1]. Таким образом, получаем

Следствие 1. *Если $n > 15$, то для любого семейства непересекающихся компонент $\mathcal{B}$ кода Хемминга H^n, не содержащего кратных компонент и такого, что множество индексов $I(\mathcal{B})$ аффинно несистематическое, код $H^n(\mathcal{B})$ аффинно несистематический.*

2. Построение аффинно несистематических множеств и кодов

В разд. 1 задача о построении аффинно несистематичечких кодов сведена к задаче построения аффинно несистематических множеств. Для окончательного решения этой задачи необходимо указать явные примеры аффинно несистематических множеств.

Напомним, что $\{0,\dots,n\}$ является линейным пространством размерности k ($n = 2^k - 1$), которое для краткости будем обозначать символом $\{0,1\}^k$. Возьмём в этом пространстве некоторое подмножество $I = \{i_1,\dots,i_m\}$, ранг которого равен $r < k$. Выделим в I некоторый базисный набор $\{i_1,\dots,i_r\}$ и рассмотрим в $\{0,1\}^k$ подпространство M, порождённое векторами $i_1,\dots,i_r$. Пусть $n' = 2^r - 1$. В коде Хемминга H^n можно рассмотреть подкод $H^{n'}_M$, состоящий из всех векторов кода H^n, носители которых входят в $M \setminus \{0\}$. Очевидно, что этот подкод эквивалентен стандартному коду Хемминга $H^{n'}$ длины n'. Если $I = \{i_1,\dots,i_m\}$ входит в $M \setminus \{0\}$, то можем говорить о его аффинной систематичности (или несистематичности) как относительно кода H^n, так и относительно кода $H^{n'}_M$. Свойство обычной систематичности не зависит от того, в каком коде Хемминга ($H^{n'}_M$ или H^n) рассматривается этот вопрос (см. [4, лемма 5] или [3, лемма 1]). Покажем, что аналогичный факт справедлив и для свойства аффинной систематичности.

Лемма 3 (о редукции). *Множество I аффинно систематическое относительно кода $H^{n'}_M$ тогда и только тогда, когда оно аффинно систематическое относительно кода H^n.*

Доказательство. Допустим, что множество $I = \{i_1,\dots,i_m\}$ (с базисным набором $\{i_1,\dots,i_r\}$) аффинно систематическое относительно кода Хемминга $H^{n'}_M$. Пусть $M \setminus \{0\} = \{i_1,\dots,i_{n'}\}$ ($m \leqslant n'$). Если через $R_i(M)$ обозначим i-компоненты кода $H^{n'}_M$, то должно существовать такое r-мерное подпространство $Q_M = \{\widetilde{\mathbf{q}}_0, \widetilde{\mathbf{q}}_{i_1},\dots,\widetilde{\mathbf{q}}_{i_{n'}}\}$ ($\widetilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$), что $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in H^{n'}_M + \mathbf{e}_{i_s}$ ($s = 1,\dots,n'$) и $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in R_{i_s}(M) + \mathbf{e}_{i_s}$ ($s = 1,\dots,m$). Рассмотрим в $\{0,1\}^k$ такое базисное множество K, что $i_s \in K$ ($s = 1,\dots,r$). Положим $\mathbf{q}_{i_s} = \widetilde{\mathbf{q}}_{i_s}$ при $s = 1,\dots,r$ и $\mathbf{q}_j = \mathbf{e}_j$ при $j \in K \setminus I$. Если $j \notin K$, то для некоторого множества $J \subset K$ имеем $j = \bigoplus\limits_{i\in J} i$ и полагаем $\mathbf{q}_j = \sum\limits_{i\in J} \mathbf{q}_i$. Легко проверяется, что определённое таким способом множество $Q = \{\mathbf{q}_0,\dots,\mathbf{q}_n\}$ является дополнительным к коду Хемминга H^n k-мерным подпространством в $\{0,1\}^n$. Так как $R_i(M) = H^{n'}_M \cap R_i$ для любого $i \in M \setminus \{0\}$, очевидно, что $\mathbf{q}_{i_s} \in R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s}$ ($s = 1,\dots,m$), откуда следует аффинная систематичность I относительно кода H^n.

Наоборот, допустим, что I является аффинно систематическим относительно кода H^n и что дополнительное к H^n k-мерное подпространство $Q = \{\mathbf{q}_0, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ ($\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$) обладает свойством $\mathbf{q}_i \in H^n + \mathbf{e}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) и $\mathbf{q}_{i_s} \in R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s}$ ($s = 1, \ldots, m$). Так как M — подпространство в $\{0,1\}^k$, множество $Q_M = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_{i_1}, \ldots, \mathbf{q}_{i_{n'}}\}$ является r-мерным подпространством. Обозначим символом $(\mathbf{u})_j$ j-ю координату вектора $\mathbf{u}$. Теперь для любого $i \in M$ полагаем

$$(\widetilde{\mathbf{u}})_j = \begin{cases} (\mathbf{u})_j, & \text{если } j \in M, \\ 0, & \text{если } j \notin M. \end{cases}$$

Поскольку отображение $\widetilde{\ } : M \to \{0,1\}^n$, очевидно, линейно, множество $\widetilde{Q} = \{\widetilde{\mathbf{q}}_0, \widetilde{\mathbf{q}}_{i_1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{q}}_{i_{n'}}\}$ — линейное подпространство. Свойство $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in H_M^{n'} + \mathbf{e}_{i_s}$ ($s = 1, \ldots, n'$) сразу следует из определения кода $H_M^{n'}$ и аналогичного свойства для элементов $\mathbf{q}_{i_s}$. Докажем, что $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s}$ при $s = 1, \ldots, m$. Легко заметить, что вектор $\mathbf{u} \in H^n$ принадлежит компоненте R_i тогда и только тогда, когда $(\mathbf{u})_j = (\mathbf{u})_{i \oplus j}$ для любого индекса $j \neq i$, $j \in \{0,1\}^k$. Пусть $1 \leqslant s \leqslant m$. Если $j \notin M$, то так как $i_s \in M$ и M — подпространство, получаем $j \oplus i_s \notin M$. Поэтому $(\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s})_j = 0 = (\widetilde{\mathbf{q}}_{j \oplus i_s})_j$. Пусть $j \in M \setminus \{0\}$ и $j \neq i_s$. Поскольку по условию $\mathbf{q}_{i_s} \in R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s}$, имеем $(\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s})_j = (\mathbf{q}_{i_s})_j = (\mathbf{q}_{i_s})_{j \oplus i_s} = (\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s})_{j \oplus i_s}$. Тем самым $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s}$. Кроме того, $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in H_M^{n'} + \mathbf{e}_{i_s}$. Значит, $\widetilde{\mathbf{q}}_{i_s} \in H_M^{n'} \cap R_{i_s} + \mathbf{e}_{i_s} = R_{i_s}(M) + \mathbf{e}_{i_s}$. Лемма 3 доказана.

Орбиты векторов пространства $\{0,1\}^n$ можно задавать с помощью уравнений. Каждой орбите веса m и ранга r сопоставляется матрица (b_{pq}) ($p = r+1, \ldots, m$; $q = 1, \ldots, r$) размера $(m-r) \times r$ над полем $\{0,1\}$ с попарно различными строками. При этом носителями векторов из орбиты являются всевозможные множества $\{i_1, \ldots, i_m\}$ такие, что

$$i_p = b_{p1} i_1 \oplus \cdots \oplus b_{pr} i_r \quad (p = r+1, \ldots, m), \tag{3}$$

а $i_1, \ldots, i_r$ пробегают все линейно независимые наборы из $\{0,1\}^k$. Если орбита в пространстве $\{0,1\}^{n'}$ ($n' = 2^r - 1$) задаётся уравнением (3), то ей соответствует орбита с таким же уравнением в любом пространстве $\{0,1\}^n$ большей размерности. Из леммы 3 следует, что при таком соответствии свойство орбиты быть аффинно систематической (аффинно несистематической) сохраняется. Этот факт даёт возможность искать аффинно несистематические орбиты в пространствах небольших размерностей путём непосредственного перебора вариантов. В силу леммы 2 аффинная несистематичность влечёт обычную несистематичность, поэтому среди орбит веса 7 кандидатами в аффинно несистематические орбиты

могут быть только две найденные в [4] (следствие 1) несистематические орбиты O_7^1 и O_7^3.

Лемма 4. *Орбиты O_7^1 и O_7^3 аффинно несистематические.*

Доказательство. Носители векторов орбиты O_7^1 задаются следующими уравнениями: $i_4 = i_1 \oplus i_2$, $i_5 = i_2 \oplus i_3$, $i_6 = i_1 \oplus i_3$, $i_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3$, где тройка i_1, i_2, i_3 линейно независима (см. табл. 1 из [4]). Ранг орбиты равен 3, поэтому в силу леммы о редукции достаточно решить эту задачу в коде Хемминга H^7, т. е. проверить аффинную несистематичность множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Рассмотрим базисное множество

$$K = \{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 4\}.$$

Выберем произвольным образом векторы $\mathbf{q}_{i_\alpha} \in R_{i_\alpha} + \mathbf{e}_{i_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Остальные векторы подпространства $Q = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_7\}$ $(\mathbf{q}_0 = \mathbf{0})$, порождённого векторами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_4$, определяются однозначно, т. е.

$$\text{если } J \subset K \text{ и } i = \bigoplus_{j \in J} j, \quad \text{то } \mathbf{q}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{q}_j. \tag{4}$$

После этого необходимо проверить, что $\mathbf{q}_i \notin R_i + \mathbf{e}_i$ хотя бы для одного индекса i. Каждая компонента кода H^7 состоит из 16 элементов. Поэтому необходимо сделать 16^3 таких проверок. Эту работу можно в значительной степени сократить. Во-первых, представим $\mathbf{q}_j = \mathbf{w}_j + \mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, 7$. Тогда $\mathbf{w}_j \in H^7$ и формула (2) имеет вид

$$\text{если } J \subset K \text{ и } i = \bigoplus_{j \in J} j, \quad \text{то } \mathbf{w}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{w}_j + \mathbf{e}_i + \sum_{j \in J} \mathbf{e}_j. \tag{4$'$}$$

Теперь необходимо проверить, что $\mathbf{w}_i \notin R_i$ хотя бы для одного индекса i. Так как вектор $\mathbf{1}$ принадлежит всем компонентам, замена $\mathbf{w}_j$ на $\mathbf{w}_j + \mathbf{1}$ не меняет свойства принадлежности компоненте R_j. Тем самым достаточно исследовать случаи, когда векторы $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ либо равны нулю, либо имеют вес 3. Рассмотрим эти случаи.

Случай 1: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. Тогда вектор $\mathbf{w}_7 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$ (вычисленный по формуле (4′)) не принадлежит компоненте R_7.

Все случаи, когда только один из векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ ненулевой и его носитель содержит два базисных элемента из K, сводятся с помощью подходящего автоморфизма кода Хемминга H^7 к следующему.

Случай 2: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. Здесь вектор $\mathbf{w}_5 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5$ не принадлежит компоненте R_5.

Все случаи, когда только один из векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ ненулевой и его носитель содержит два базисных элемента из K, сводятся с помощью подходящего автоморфизма кода Хемминга H^7 к следующему.

Случай 3: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. В этом случае вектор $\mathbf{w}_5 = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_5.

Все случаи, когда имеется только два ненулевых равных между собой вектора из $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$, сводятся к следующему.

Случай 4: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. Тогда (как и в случае 1) вектор $\mathbf{w}_7 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_7.

Все случаи, когда имеется только два ненулевых не равных между собой вектора из $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$, причём носитель каждого из них содержит по два базисных элемента из K, сводятся к следующему.

Случай 5: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. Здесь вектор $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6$ не принадлежит компоненте R_3.

Все случаи, когда имеется только два ненулевых не равных между собой вектора из $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$, причём носитель одного из них содержит два базисных элемента, а носитель другого — только один базисный элемент из K, сводятся к одному из следующих двух случаев.

Случай 6: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. В этом случае вектор $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_3.

Случай 7: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$. Тогда вектор $\mathbf{w}_6 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_6.

Все случаи, когда имеется только два ненулевых не равных между собой вектора из $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$, причём носитель каждого из них содержит по одному базисному элементу из K, сводятся к следующему.

Случай 8: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{0}$. Здесь $\mathbf{w}_6 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_6.

Рассмотрим случаи, когда все векторы $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ ненулевые, причём среди них есть два одинаковых. Применяя автоморфизмы кода Хемминга, можно считать, что $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \neq \mathbf{w}_4$. Если носитель вектора $\mathbf{w}_4$ содержит два базисных элемента из K, то с помощью подходящих автоморфизмов кода Хемминга придём к следующему.

Случай 9: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6$. В этом случае вектор $\mathbf{w}_6 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ не принадлежит компоненте R_6.

Если же носитель вектора $\mathbf{w}_4$ содержит только один базисный элемент из K, то получим

Случай 10: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$. Тогда $\mathbf{w}_7 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_7.

И, наконец, переходим к случаям, когда все векторы $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ различны и не равны нулю. Все случаи, когда носители каждого из этих векторов содержат по два базисных элемента из K, с помощью автоморфизмов кода Хемминга сводятся к следующему.

Случай 11: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5$. Здесь вектор $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_6$ не принадлежит компоненте R_3.

Все случаи, когда носители двух векторов из $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ содержат по два базисных элемента, а третий — только один базисный элемент из K, сводятся к следующему.

Случай 12: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5$. В этом случае вектор $\mathbf{w}_7 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ не принадлежит компоненте R_7.

Если носитель только одного вектора из $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ содержит два базисных элемента, а двух других — только по одному базисному элементу из K, то получаем

Случай 13: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$. Тогда вектор $\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$ не принадлежит компоненте R_3.

Осталось разобрать последний случай, когда каждый из векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ содержит по одному базисному элементу из K.

Случай 14: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_7$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_7$. В этом случае вектор $\mathbf{w}_7 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6$ не принадлежит компоненте R_7.

Носители векторов орбиты O_7^3 задаются следующими уравнениями:

$$i_5 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3, \quad i_6 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4, \quad i_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4,$$

где i_1, i_2, i_3, i_4 линейно независимы (см. табл. 1 из [4]). Аффинная несистематичность орбиты O_7^3 установлена с помощью компьютера. Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *Все несистематические коды, которые получаются из кода Хемминга сдвигами семи непересекающихся компонент, аффинно несистематические.*

Доказательство. Пусть код $C = H^n(\mathcal{B})$ — несистематический, где $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{\mathbf{u}_1}, \ldots, R_{i_7}^{\mathbf{u}_7}\}$ — некоторое семейство из семи попарно не пересекающихся i_q-компонент кода Хемминга H^n ($q = 1, \ldots, 7$; $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_7 \in H^n$). В силу теоремы 1 из [4] множество $I(\mathcal{B})$ несистематическое. Так как по

следствию 1 из [4] множества, содержащие менее семи элементов, систематические, семейство $\mathcal{B}$ не может содержать кратных компонент (т. е. индексы $i_1, \ldots, i_7$ различны). По следствию 1 из [4] существует в точности две несистематические орбиты O_7^1 и O_7^3 веса 7. В силу леммы 5 из [4] и леммы 3 (о редукции), а также леммы 4 получаем аффинную несистематичность множества $\{i_1, \ldots, i_7\}$. Известно, что для любых двух компонент R_i, R_j $(i \neq j)$ кода Хемминга H^n имеют место равенства $|R_i| = 2^{(n-1)/2}$, $|R_i \cap R_j| = 2^{(n-1)/4}$ [1, 2]. Тем самым для всех $n = 2^k - 1 \geqslant 15$ справедливы неравенства для мощностей

$$\Bigl|\bigcup_{j=1}^{7}(R_{i_j}^{\mathbf{u}_j} \cap R_{i_q}^{\mathbf{u}_q})\Bigr| = 7 \cdot 2^{(n-1)/4} < 2^{(n-1)/2} = \bigl|R_{i_q}^{\mathbf{u}_q}\bigr|, \quad q = 1, \ldots, 7;$$

$$\Bigl|\bigcup_{j=1}^{7} R_{i_j}^{\mathbf{u}_j}\Bigr| = 7 \cdot 2^{(n-1)/2} < 2^{n-k-1} = \frac{1}{2}\,|H^n|.$$

Это означает, что выполнены условия (a) и (b) теоремы 2. В силу теоремы 2 код C является аффинно несистематическим. Теорема 3 доказана.

Из этой теоремы и теоремы 3 в [4] следует существование аффинно несистематических кодов любой длины $n = 2^k - 1 \geqslant 15$.

3. Примеры несистематических аффинно систематических кодов

Для любого совершенного кода C длины $n = 2^k - 1$ можно построить расширенный код $\widetilde{C}$ длины $n+1$, добавляя к векторам C проверку на чётность в качестве нулевой координаты. Обратно, исходя из расширенного кода $\widetilde{C}$ можно получить нерасширенный (совершенный) код $\widetilde{C}^i$, вычеркивая i-ю координату во всех векторах $\widetilde{C}$. В частности, $\widetilde{C}^0 = C$. Следуя [4] (определение 1), назовём расширенный код $\widetilde{C}$ *систематическим*, если существует $(k+1)$-элементное множество $K \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ такое, что любые два неравных вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \widetilde{C}$ различаются хотя бы в одной координате с номером, не принадлежащим K. В противном случае $\widetilde{C}$ назовём *несистематическим*.

Теорема 4. *Пусть расширенный код $\widetilde{C}$ построен из совершенного кода C длины $n = 2^k - 1$. Тогда если код $\widetilde{C}$ систематический, то код C аффинно систематический.*

Доказательство. Пусть $(k+1)$-элементное множество $K \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ такое, что любые два неравных вектора из $\widetilde{C}$ различаются хотя

бы в одной координате с номером, не принадлежащим K. Пусть $0 \in K$. Рассмотрим k-элементное множество $K_0 = K \setminus \{0\} \subset \{1, \ldots, n\}$ и любые два неравных вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C$. Пусть векторы $\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}$ получены из векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ добавлением проверки на чётность в качестве нулевой координаты. Тогда $\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}$ принадлежат $\widetilde{C}$ и различаются в некоторой координате $i \notin K$. Из того, что $0 \in K$, следует, что $i \neq 0$. Поэтому векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ тоже различаются в координате $i \notin K_0$. Таким образом, код C систематический и, в частности, аффинно систематический. Предположим теперь, что $0 \notin K$. Пусть L — подпространство в $\{0, 1\}^n$, состоящее из всех векторов $\mathbf{u}$, носители которых входят в K и имеют чётное число элементов. Очевидно, что размерность L равна k. Допустим, что код C аффинно несистематический. Тогда существует смежный класс $L + \mathbf{w}$, содержащий два различных вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C$. Это означает, что $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in L$ и $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in L$. В частности, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in L$ и носители векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ имеют одинаковую чётность. Поэтому нулевые координаты векторов $\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}$, полученных из $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ добавлением проверки на чётность, совпадают, т. е. $[\widetilde{\mathbf{u}} + \widetilde{\mathbf{v}}] = [\mathbf{u} + \mathbf{v}] \subset K$, что противоречит тому, что любые два неравных вектора $\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{C}$ различаются хотя бы в одной координате с номером, не принадлежащим K. Следовательно, код C должен быть аффинно систематическим. Теорема 4 доказана.

В [4, пример 1] для любого $k \geqslant 5$ построены примеры несистематических кодов длины $n = 2^k - 1$ таких, что построенные из них расширенные коды являются систематическими. Кроме этого, в [8, 9] построены с помощью компьютера все попарно не эквивалентные совершенные коды длины 15, при этом расширение 12 несистематических кодов даёт 12 неэквивалентных расширенных несистематических кодов, а один код становится при расширении систематическим. Из теоремы 4, а также из результатов, полученных в [8, 9], получаем

Следствие 2. *Для любого $n = 2^k - 1$ $(k \geqslant 4)$ существуют несистематические аффинно систематические коды длины n.*

Замечание. 12 неэквивалентных несистематических кодов длины 15, расширение которых даёт несистематические коды, построены в [4, 6] (два кода найдены в [7, 11]). Компьютерная проверка показала, что эти 12 кодов аффинно несистематические. Поэтому для кодов длины 15 теперь имеем исчерпывающую информацию: среди 13 неэквивалентных несистематических кодов длины 15 только один код (найденный впервые в [8, 9]) является аффинно систематическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Соловьева Ф. И.** О несистематических совершенных двоичных кодах // Проблемы передачи информации. — 1996. — Т. 32, вып. 3. — С. 47–50.
2. **Августинович С. В., Соловьева Ф. И.** Построение совершенных двоичных кодов последовательными сдвигами $\widetilde{\alpha}$-компонент // Проблемы передачи информации. — 1997. — Т. 33, вып. 3. — С. 15–21.
3. **Малюгин С. А.** О критерии несистематичности совершенных двоичных кодов // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 1. — С. 13–16.
4. **Малюгин С. А.** Несистематические совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 55–76.
5. **Малюгин С. А.** Об афинно несистематических кодах // Сб. докл. междунар. конф., посвящённой 90-летию со дня рождения А. А. Ляпунова (Новосибирск, 8–12 октября 2001 г.). — Новосибирск: Ин-т математики, 2001. — С. 393–394. (http://www.sbras.nsc.ru/ws/ Lyap2001/2288).
6. **Малюгин С. А.** О перечислении неэквивалентных совершенных двоичных кодов длины 15 и ранга 15 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 77–98.
7. **Романов А. М.** О несистематических совершенных кодах длины 15 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1997. — Т. 4, № 4. — С. 75–78.
8. **Östergård P. R. J., Pottonen O.** The perfect binary one-error-correcting codes of length 15, part I – classification // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2009. — Vol. 55, N 10. — P. 4657–4660.
9. **Östergård P. R. J., Pottonen O., Phelps K. T.** The perfect binary one-error-correcting codes of length 15, part II — properties // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2009. — Vol. 56, N 6. — P. 2571–2582.
10. **Phelps K. T., LeVan M. J.** Kernels of nonlinear Hamming codes // Des. Codes Cryptography. — 1995. — Vol. 6, N 3. — P. 247–257.
11. **Phelps K. T., LeVan M. J.** Nonsystematic perfect codes // SIAM J. Discrete Math. — 1999. — Vol. 12, N 1. — P. 27–34.
12. **Solov'eva F. I.** Switchings and perfect codes // Numbers, information and complexity. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. — P. 311–324.

Малюгин Сергей Артемьевич,
e-mail: mal@math.nsc.ru

Статья поступила
23 октября 2011 г.