ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2012. Том 19, № 4. С. 35–47

УДК 519.718

О МУЛЬТИРАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО НЕОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА

В. Г. Визинг

Аннотация. Рассматриваются неориентированные мультиграфы с взвешенными рёбрами. При мультираскраске инциденторов каждому инцидентору сопоставляется мультицвет, т. е. интервал цветов, длина которого равна весу инцидентора. Мультираскраска *правильная*, если мультицвета любых двух смежных или сопряжённых инциденторов не пересекаются. Приводятся нижние и верхние оценки минимального числа цветов, необходимого для правильной мультираскраски всех инциденторов мультиграфа.

Ключевые слова: инцидентор, мультираскраска, инциденторное мультихроматическое число.

1. Основные понятия

Под мультиграфом $G = (V, E, w)$ понимается конечный неориентированный мультиграф без петель [8], в котором V — множество вершин, E — множество рёбер, w — функция, определённая на E и принимающая натуральные значения. Число $w(e)$ называется *весом* ребра $e \in E$. Если $e = uv$ — ребро, инцидентное вершинам u и v, то пары (u, e) и (v, e) называются *инциденторами* ребра e, примыкающими к вершинам u и v соответственно. Таким образом, каждое ребро имеет два инцидентора, называемых *сопряжёнными.* Два инцидентора, примыкающие к одной и той же вершине, называются *смежными.* Будем считать, что вес инцидентора любого ребра совпадает с весом ребра.

Цветами являются натуральные числа. Пусть a и b — цвета и $a \leqslant b$. Под *интервалом* $[a, b]$ понимается множество цветов c, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$. Число $b - a + 1$ называется *длиной интервала.* Под *мультицветом* понимается интервал цветов, длина которого называется *длиной мультицвета.* Если $[a', b']$ — мультицвет, то a' называется *левым концом*, а b' — *правым концом* мультицвета. Будем говорить, что имеется *мультираскраска* φ некоторого множества инциденторов, если каждому инцидентору i из этого множества сопоставлен

мультицвет $\varphi(i)$, длина которого равна весу инцидентора i, при этом $\varphi(i)$ называется *мультицветом инцидентора* i, а сам инцидентор i называется *окрашенным.* Мультираскраска инцидентов называется *правильной*, если мультицвета любых двух смежных или сопряжённых инцидентов не пересекаются.

При имеющейся правильной мультираскраске инцидентов один из сопряжённых инцидентов каждого ребра будем называть *начальным*, а другой — *конечным*, руководствуясь следующим правилом. Пусть i_1 и i_2 — сопряжённые инциденторы, окрашенные в непересекающиеся мультицвета $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ соответственно. Если $a_1 < a_2$, то инцидентор i_1 называется *начальным*, а инцидентор i_2 — *конечным.* Если $a_2 < a_1$, то конечным является инцидентор i_1, а начальным — i_2.

Инциденторным мультихроматическим числом $\mu I(G)$ мультиграфа G называется наименьшее k такое, что существует правильная мультираскраска всех инцидентов мультиграфа G, при которой мультицвета всех инцидентов включаются в интервал $[1, k]$. Правильная мультираскраска всех инцидентов мультиграфа G, при которой мультицвета всех инцидентов включаются в интервал $[1, \mu I(G)]$, называется *минимальной* мультираскраской (с помощью $\mu I(G)$ цветов).

Пусть имеется правильная мультираскраска инцидентов. Цвета, которые принадлежат мультицветам инцидентов, примыкающим к вершине v, называются *занятыми в вершине* v, остальные цвета — *свободными в* v. Правильная мультираскраска инцидентов называется *нормальной*, если для инцидентов, примыкающих к каждой вершине, выполняется следующее условие: объединение мультицветов начальных инцидентов является интервалом с левым концом 1, а объединение мультицветов конечных инцидентов есть интервал, правый конец которого совпадает с наибольшим занятым цветом. Очевидно, что всегда существует нормальная минимальная мультираскраска.

Под *степенью* вершины мультиграфа понимается число рёбер, инцидентных ей, под *взвешенной степенью* — сумма весов рёбер, инцидентных вершине. Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная степень, а через $\Delta_w(G)$ — максимальная взвешенная степень вершины мультиграфа G.

Если веса всех рёбер равны 1, то взвешенная степень вершины совпадает с её степенью. В этом случае известно [7], что $\mu I(G) = \Delta(G)$ при $\Delta(G) \geqslant 2$. При различных весах рёбер это равенство не всегда выполняется. В настоящей статье для неориентированных мультиграфов с взвешенными рёбрами приводятся нижние и верхние оценки инциденторного мультихроматического числа.

2. Нижняя оценка

Будем обозначать через w_1 максимальный вес ребра мультиграфа $G = (V, E, w)$. Очевидно, что $\mu I(G) \geqslant 2w_1$ и $\mu I(G) \geqslant \Delta_w(G)$.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E, w)$ — мультиграф. Тогда*

$$\mu I(G) \geqslant \max\{2w_1, \Delta_w(G)\}. \tag{1}$$

Обозначим для краткости

$$L(G) = \max\{2w_1, \Delta_w(G)\}. \tag{2}$$

Однако нижняя оценка (1) не всегда достигается. На рис. 1 изображён мультиграф H, указаны веса рёбер. Максимальный вес ребра равен 14, а максимальная взвешенная степень вершины равна 30, т. е. $L(H) = 30$, но $\mu I(H) > L(H)$. Действительно, пусть существует мультираскраска инциденторов цветами из $[1, 30]$. Тогда один из инциденторов верхнего ребра веса 11 окрашивается в мультицвет $[1, 11]$, а другой — в мультицвет $[20, 30]$. Это следует из того, что оба инцидентора примыкают к вершинам с взвешенной степенью 30. Аналогично мультицвета «нижних» инциденторов рёбер, имеющих вес 14, являются либо интервалом $[1, 14]$, либо интервалом $[17, 30]$. Учитывая эти факты, нетрудно показать, что мультицвета каждого из инциденторов «нижнего» ребра (веса 7) отличны как от интервала $[1, 7]$, так и от интервала $[24, 30]$; поэтому эти мультицвета могут являться либо интервалом $[15, 21]$, либо интервалом $[10, 16]$, т. е. мультицвета сопряжённых инциденторов пересекаются, что невозможно при правильной мультираскраске. (Можно показать, что $\mu I(H) = 30$.)

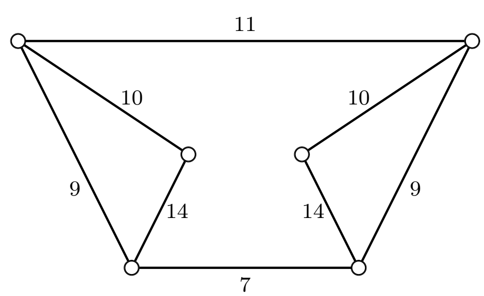

Рис. 1. Мультиграф H

Следующую лемму можно вывести из теоремы, содержащейся в [7], но докажем её другим способом.

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E, w)$ — мультиграф с $\Delta(G) \geqslant 2$. Тогда*

$$\mu I(G) \leqslant w_1 \Delta(G).$$

Доказательство. Построим двудольный граф $I(G)$, у которого V — множество вершин первой доли, E — множество вершин второй доли, причем каждая вершина $e \in E$ смежна с теми двумя вершинами из V, с которыми ребро e инцидентно в мультиграфе G. Так как $\Delta(I(G)) = \Delta(G)$, по теореме Кёнига [8] рёбра графа $I(G)$ можно правильно раскрасить $\Delta(G)$ цветами. После раскраски рёбер графа $I(G)$ перейдём к мультираскраске инциденторов мультиграфа G. Если ребро ve графа $I(G)$ окрашено в цвет i, то инцидентор (v, e) мультиграфа G окрашиваем в мультицвет, принадлежащий интервалу $[w_1(i-1)+1, w_1 i]$ $(1 \leqslant i \leqslant \Delta(G))$. Это возможно, так как длина указанного интервала равна w_1, что не меньше веса ребра e. Получим правильную мультираскраску всех инциденторов мультиграфа G. Так как все мультицвета принадлежат интервалу $[1, w_1\Delta(G)]$, имеем $\mu I(G) \leqslant w_1 \Delta(G)$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Если $\Delta(G) \leqslant 2$, то $\mu I(G) = L(G) = 2w_1$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\Delta(G)=2$. Так как $\Delta_w(G) \leqslant 2w_1$, в силу (2) $L(G) = 2w_1$, и ввиду теоремы 1 и леммы 1 имеем $L(G) = 2w_1 \leqslant \mu I(G) \leqslant 2w_1 = L(G)$. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Если веса всех рёбер мультиграфа G одинаковы, то $\mu I(G) = L(G)$.*

Доказательство. Считаем, что $\Delta(G) \geqslant 2$. Тогда $L(G) = \Delta(G) w_1$. В силу теоремы 1 и леммы 1 имеем

$$L(G) \leqslant \mu I(G) \leqslant w_1 \Delta(G) = L(G).$$

Следствие 2 доказано.

Теорема 2. *Пусть мультиграф $G = (V, E, w)$ является деревом. Тогда $\mu I(G) = L(G)$.*

Доказательство. Покажем, что $\mu I(G) \leqslant L(G)$. Для этого построим правильную мультираскраску инциденторов дерева с использованием цветов из интервала $[1, L(G)]$ следующим образом. Пусть v_0 — произвольная вершина дерева, степень которой не меньше 2, и пусть e' — ребро с максимальным весом, инцидентное v_0. Окрасим инцидентор (v_0, e') в мультицвет $[1, w(e')]$, а сопряжённый ему инцидентор — в мультицвет $[L(G) - w(e') + 1, L(G)]$. Так как $L(G) \geqslant 2w(e')$, мультицвета сопряжённых

инциденторов ребра e' не будут пересекаться. Остальные инциденторы, примыкающие к v_0, делаем конечными, окрасив их в непересекающиеся мультицвета, вложенные в интервал $[w(e')+1, L(G)]$. Сопряжённые с ними инциденторы делаем начальными, окрасив в мультицвета, левые концы которых равны 1. Так как e' — ребро максимального веса, инцидентное v_0, и $L(G) \geqslant \Delta_w(G)$, получится правильная мультираскраска инциденторов всех рёбер, инцидентных v_0. Окрашенные инциденторы, не примыкающие к v_0, назовём *сигнальными*, а вершины, к которым они примыкают, — *отмеченными*. Каждый сигнальный инцидентор является либо начальным, либо конечным. Если все инциденторы дерева G оказываются окрашенными, то теорема доказана. В противном случае берём любую отмеченную вершину, к которой примыкают неокрашенные инциденторы, обозначим её через v. Из неокрашенных инциденторов, примыкающих к v, выбираем инцидентор с максимальным весом; пусть это инцидентор ребра e. Рассмотрим два случая.

Случай 1. К вершине v примыкает конечный сигнальный инцидентор, окрашенный в мультицвет $[b, L(G)]$. Окрашиваем инцидентор (v, e) в мультицвет $[1, w(e)]$, сопряжённый ему инцидентор — в мультицвет $[L(G) - w(e) + 1, L(G)]$. Сопряжённый инцидентор объявляем сигнальным, а вершину, к которой он примыкает, — отмеченной. Остальные инциденторы, примыкающие к v, окрашиваем в непересекающиеся мультицвета, вложенные в интервал $[w(e) + 1, b - 1]$. Сопряжённые им инциденторы окрашиваем в мультицвета с левым концом 1 и объявляем сигнальными, а вершины, к которым они примыкают, — отмеченными.

Случай 2. К вершине v примыкает начальный сигнальный инцидентор, окрашенный в мультицвет $[1, a]$. Окрашиваем инцидентор (v, e) в мультицвет $[L(G) - w(e) + 1, L(G)]$, сопряжённый ему инцидентор — в мультицвет $[1, w(e)]$, который объявляем сигнальным, а вершину, к которой он примыкает, — отмеченной. Остальные инциденторы, примыкающие к v, окрашиваем в непересекающиеся мультицвета, вложенные в интервал $[a+1, L(G)-w(e)+1]$. Сопряжённые им инциденторы окрашиваем в мультицвета с правым концом $L(G)$, объявляем их сигнальными, а вершины, к которым они примыкают, — отмеченными.

Легко видеть, что полученная мультираскраска инциденторов рёбер, инцидентных вершине v, является правильной. Затем рассматриваем любую отмеченную вершину, которой инцидентны рёбра с неокрашенными инциденторами, и окрашиваем инциденторы таких рёбер указанным образом. Описанная процедура продолжается до тех пор, пока не будет получена мультираскраска всех инциденторов дерева G с помощью цве-

тов из $[1, L(G)]$. Теорема 2 доказана.

3. Верхние оценки

Будем считать, что веса рёбер мультиграфа $G = (V, E)$ не все одинаковы и что упорядоченные по убыванию они образуют последовательность

$$w_1 > w_2 > \ldots > w_k \qquad (k \geqslant 2). \tag{3}$$

Через E_i обозначим подмножество рёбер мультиграфа, веса которых не меньше w_i, через G_i — мультиграф (V, E_i, w) $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqslant j \leqslant k-1$. *Тогда*

$$\mu I(G) \leqslant \max\{\mu I(G_j), \Delta_w(G) + w_{j+1}\}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим для краткости через $r_j(G)$ правую часть неравенства (4). Рассмотрим только цвета из интервала $[1, r_j(G)]$. Покажем, что с их помощью можно построить нормальную мультираскраску всех инциденторов мультиграфа G.

Сначала построим нормальную мультираскраску всех инциденторов мультиграфа G_j; это возможно, так как $r_j(G) \geqslant \mu I(G_j)$. Затем в произвольном порядке раскрашиваем инциденторы остальных рёбер так, чтобы после каждой раскраски получалась нормальная мультираскраска. Делаем это следующим образом. Пусть уже имеется нормальная мультираскраска инциденторов некоторого подмножества рёбер, и $e = xy$ — ребро веса $w_s \leqslant w_{j+1}$ с неокрашенными инциденторами. Так как $r_j(G) \geqslant \Delta_w(G) + w_s$, свободные цвета в каждой из вершин x и y образуют интервал, вложенный в $[1, r_j(G)]$, длина которого не меньше $2w_s$. Пусть $[a, b]$ и $[a', b']$ — такие интервалы, образованные свободными цветами в вершинах x и y соответственно. Положим для определённости, что $a \leqslant a'$. Инцидентор (x, e) окрашиваем в мультицвет $[a, a + w_s - 1]$, а инцидентор (y, e) — в мультицвет $[b' - w_s + 1, b']$. Докажем, что в результате получится правильная нормальная мультираскраска большего числа инциденторов с помощью цветов из $[1, r_j(G)]$. Для этого нужно только показать, что мультицвета сопряжённых инциденторов (x, e) и (y, e) не пересекаются. Так как длина интервала $[a', b']$ не меньше $2w_s$, имеем $b' - a' + 1 \geqslant 2w_s$. Но $a \leqslant a'$, тем самым $b' - a + 1 \geqslant 2w_s$, откуда $a + w_s - 1 < b' - w_s + 1$. Это означает, что мультицвета инциденторов (x, e) и (y, e) не пересекаются. Указанным образом получается правильная мультираскраска цветами из $[1, r_j(G)]$ всех инциденторов мультиграфа G. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого q, удовлетворяющего неравенствам $2 \leqslant q \leqslant k$, верна оценка*

$$\mu I(G_q) \leqslant \max_{i \in [2,q]} \{2w_1, \Delta_w(G_i) + w_i\}. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем (5) индукцией по q. Пусть $q = 2$. Применив лемму 2 к мультиграфу G_2, получим

$$\mu I(G_2) \leqslant \max\{\mu I(G_1), \Delta_w(G_2) + w_2\}.$$

По следствию 2 с учётом (2) имеем $\mu I(G_1) = L(G_1) = \max\{2w_1, \Delta_w(G_1)\}$. Поэтому

$$\mu I(G_2) \leqslant \max\{2w_1, \Delta_w(G_1), \Delta_w(G_2) + w_2\}.$$

Так как $\Delta_w(G_2) + w_2 > \Delta_w(G_1)$, получим

$$\mu I(G_2) \leqslant \max\{2w_1, \Delta_w(G_2) + w_2\}.$$

Таким образом, при $q = 2$ (и при $k = 2$) формула (5) доказана. Пусть теперь $k > 2$. Пусть (5) верна при q таком, что $2 \leqslant q \leqslant k - 1$. Покажем, что

$$\mu I(G_{q+1}) \leqslant \max_{i \in [2,q+1]} \{2w_1, \Delta_w(G_i) + w_i\}. \tag{6}$$

Применив лемму 2 к мультиграфу G_{q+1}, получим

$$\mu I(G_{q+1}) \leqslant \max\{\mu I(G_q), \Delta_w(G_{q+1}) + w_{q+1}\}.$$

Отсюда и из (5) вытекает (6). Лемма 3 доказана.

При $q = k$ выполняется равенство $\mu I(G_k) = \mu I(G)$. Поэтому из (5) следует

Теорема 3. *Имеет место оценка*

$$\mu I(G) \leqslant \max_{i \in [2,k]} \{2w_1, \Delta_w(G_i) + w_i\}. \tag{7}$$

Так как $\Delta_w(G) + w_2 \geqslant \max\limits_{i \in [2,k]} \{\Delta_w(G_i) + w_i\}$, из (7) вытекает

Следствие 3. *Верна оценка*

$$\mu I(G) \leqslant \max\{2w_1, \Delta_w(G) + w_2\}.$$

В [6] рассматривалась задача раскраски инциденторов взвешенного неориентированного мультиграфа, но в понятие веса ребра вкладывался другой смысл: вес ребра — нижняя граница абсолютной величины разности между цветами сопряжённых инциденторов этого ребра. Для минимального числа цветов, необходимых при такой раскраске, приводились нижняя и верхняя оценка, отличающиеся на $\lceil \Delta(G)/4 \rceil$. Верхнюю оценку инциденторного мультихроматического числа, отличающуюся от нижней не больше, чем на $\lfloor \Delta_w(G)/4 \rfloor$, даёт следующая

Теорема 4. *Для любого мультиграфа* $G = (V, E, w)$

$$\mu I(G) \leqslant \max\{2w_1, \Delta_w(G) + \lfloor \Delta_w(G)/4 \rfloor\}. \tag{8}$$

Доказательство. При $w_2 \leqslant \lfloor \Delta_w(G)/4 \rfloor$ теорема вытекает из следствия 3. Предположим, что $w_2 > \Delta_w(G)/4$, и пусть t — максимальный номер того члена последовательности (3), который больше $\Delta_w(G)/4$. Очевидно, что $2 \leqslant t \leqslant k$. Рассмотрим подграф $G_t = (V, E_t, w)$. Так как веса всех рёбер мультиграфа G_t больше $\Delta_w(G)/4$, имеем $\Delta(G_t) \leqslant 3$.

Докажем, что

$$\mu I(G_t) \leqslant \max\{2w_1, \Delta_w(G_t) + \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor\}. \tag{9}$$

Формула (9) верна при $\Delta_w(G_t) \leqslant 2$, так как $\mu I(G_t) = 2w_1$ по следствию 1. Пусть $\Delta(G_t) = 3$. При $w_1 \leqslant \Delta_w(G_t)/3$ в силу леммы 1 и неравенства $\mu I(G_t) \geqslant \Delta_w(G_t)$ имеем $\mu I(G_t) = \Delta_w(G_t)$. Таким образом, для доказательства формулы (9) осталось рассмотреть случай, когда мультиграф G_t содержит рёбра, веса которых больше $\Delta_w(G_t)/3$. Такие рёбра будем называть *тяжёлыми*, остальные рёбра — *лёгкими*. Веса лёгких рёбер не больше $\lfloor \Delta_w(G_t)/3 \rfloor$. Очевидно, что каждой вершине мультиграфа G_t инцидентно не больше двух тяжёлых рёбер. Так как $\Delta(G_t) = 3$, то G_t имеет лёгкие рёбра. Пусть v — вершина мультиграфа G_t степени 3. Поскольку веса всех рёбер мультиграфа G_t больше $\Delta_w(G_t)/4$, вес каждого ребра, инцидентного v, меньше $\Delta_w(G_t)/2$.

Построим подграф H мультиграфа G_t следующим образом. Сначала обозначим через E' множество тяжёлых рёбер и положим $H = (V, E', w)$. Затем ищем лёгкое ребро, каждой концевой вершине которого инцидентно не больше одного ребра из E'. Если такое ребро e' найдётся, то полагаем $E' = E' \cup \{e'\}$, $H = (V, E')$. Эта процедура прекращается, когда не удаётся «расширить» множество E'. В результате получим подграф H мультиграфа $G_t \backslash H$ такой, что $\Delta(H) = 2$. Вершины степени 2 подграфа H назовём *особыми*. Очевидно, что каждое лёгкое ребро мультиграфа $G_t \setminus H$ инцидентно по меньшей мере одной особой вершине.

Обозначим для краткости

$$M = \max\{2w_1, \Delta_w(G_t) + \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor\}.$$

Так как $\Delta(H) = 2$, то $\mu(H) = 2w_1$ по следствию 1. Построим мультираскраску инциденторов подграфа H с помощью цветов из $[1, M]$ следующим образом. Сначала, как и в лемме 1, с помощью графа $I(H)$ окрасим инциденторы рёбер E' двумя цветами, после чего инцидентор цвета 1 окрашиваем в мультицвет с левым концом 1, а инцидентор цвета 2 — в мультицвет с правым концом M. Получим правильную мультираскраску всех инциденторов рёбер E', при которой левые концы мультицветов начальных инциденторов равны 1, а правые концы мультицветов конечных инциденторов равны M. При этом для каждой вершины будет выполняться одно из следующих условий:

(i) к ней не примыкает ни одного окрашенного инцидентора, либо примыкает один окрашенный начальный инцидентор;

(ii) к ней примыкает один окрашенный инцидентор, являющийся конечным;

(iii) к ней примыкают два окрашенных инцидентора: один — начальный, другой — конечный.

Так как $\Delta(G_t) = 3$, после мультираскраски инциденторов мультиграфа H не все инциденторы мультиграфа G_t будут окрашены. Приступаем к мультираскраске остальных инциденторов. Пусть $e = xy$ — произвольно выбранное (лёгкое) ребро с неокрашенными инциденторами, y — особая вершина, к которой примыкают окрашенные инциденторы: начальный веса p_1, окрашенный в мультицвет $[1, p_1]$, и конечный веса p_2, окрашенный в мультицвет $[M - p_2 + 1, M]$. Способ мультираскраски инциденторов ребра e зависит от того, какое из условий (i)–(iii) выполняется для вершины x. Используем следующий алгоритм.

Шаг 1. Если выполняется условие (i), то окрашиваем инцидентор (x, e) в мультицвет $[M - w(e) + 1, M]$, а (y, e) — в $[p_1 + 1, p_1 + w(e)]$.

Шаг 2. Если выполняется условие (ii), то окрашиваем инцидентор (x, e) в мультицвет $[1, w(e)]$, а (y, e) — в $[r + 1, r + w(e)]$, где $r = \max\{w(e), p_1\}$.

Шаг 3. Если выполняется условие (iii) и s_1 — вес начального инцидентора, примыкающего к x (окрашенного в мультицвет $[1, s_1]$), то перекрасим конечный инцидентор, примыкающий к y, в мультицвет $[q + 1, q + p_2]$, где $q = \max\{p_1, p_2\}$. (Так как сопряжённый с ним инцидентор окрашен в мультицвет $[1, p_2]$, его новый мультицвет не пересекается с мультицветом сопряжённого начального инцидентора.) После

этого окрасим инцидентор (x, e) в мультицвет $[s_1+1, s_1+w(e)]$, а (y, e) — в $[M-w(e)+1, M]$.

Докажем правильность мультираскраски. Легко видеть, что так как $M \geqslant \Delta_w(G_t)$, мультицвета инциденторов, примыкающих к вершине x, не пересекаются после выполнения любого шага алгоритма.

Для каждого шага алгоритма будем отдельно доказывать, что мультицвета сопряжённых инциденторов (x, e) и (y, e) не пересекаются и что не пересекаются мультицвета инциденторов, примыкающих к вершине y.

Шаг 1. Мультицвета $[M-w(e)+1, M]$ и $[p_1+1, p_1+w(e)]$ инциденторов соответственно (x, e) и (y, e) не пересекаются, т. е.

$$p_1 + w(e) < M - w(e) + 1 \quad \text{или} \quad p_1 + 2w(e) < M + 1.$$

Действительно, $p_1 < \Delta_w(G_t)/2$, $w(e) \leqslant \Delta_w(G_t)/3$. Поэтому

$$\begin{aligned} p_1 + 2w(e) < \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/6 < \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/4 \\ < \Delta_w(G_t) + \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor + 1 \leqslant M + 1. \end{aligned}$$

Далее, мультицвет $[p_1+1, p_1+w(e)]$ инцидентора (y, e) не пересекается с мультицветами $[1, p_1]$ и $[M-p_2+1, M]$ других инциденторов, примыкающих к y. Это следует из того, что $p_1+1 > p_1$ и

$$p_1 + w(e) + p_2 \leqslant \Delta_w(G_t) < M + 1,$$

откуда $p_1 + w(e) < M - p_2 + 1$.

Шаг 2. Мультицвета $[1, w(e)]$ и $[r+1, r+w(e)]$ инциденторов (x, e) и (y, e) не пересекаются, так как $r+1 = \max\{w(e), p_1\} + 1 > w(e)$. Поскольку $r+1 > p_1$, мультицвет $[r+1, r+w(e)]$ инцидентора (y, e) не пересекается с мультицветом $[1, p_1]$ начального инцидентора, примыкающего к y. Осталось показать, что мультицвет $[r+1, r+w(e)]$ не пересекается с мультицветом $[M-p_2+1, M]$ конечного инцидентора, примыкающего к y, т. е. что $M-p_2+1 > r+w(e)$ или $p_2+w(e)+\max\{w(e), p_1\} < M+1$. Если $\max\{w(e), p_1\} = p_1$, то

$$p_2 + w(e) + p_1 \leqslant \Delta_w(G_t) < M + 1.$$

Пусть теперь $\max\{w(e), p_1\} = w(e)$. Тогда требуемое неравенство принимает вид $p_2+2w(e) < M+1$. Так как $w(e) \leqslant \Delta_w(G_t)/3$, а $p_1 > \Delta_w(G_t)/4$, имеем $w(e) < p_1 + \Delta_w(G_t)/12$. Поэтому

$$\begin{aligned} p_2 + 2w(e) < p_2 + w(e) + p_1 + \Delta_w(G_t)/12 \leqslant \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/12 \\ < \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/4 < \Delta_w(G_t) + \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor + 1 \leqslant M + 1. \end{aligned}$$

Шаг 3. Покажем, что мультицвета $[s_1{+}1, s_1{+}w(e)]$ и $[M{-}w(e){+}1, M]$ инциденторов соответственно (x,e) и (y,e) не пересекаются, т. е.

$$s_1 + w(e) < M - w(e) + 1 \quad \text{или} \quad s_1 + 2w(e) < M + 1.$$

Так как степень вершины x в мультиграфе G_t равна 3, имеем $s_1 < \Delta_w(G_t)/2$. Учитывая, что $w(e) \leqslant \Delta_w(G_t)/3$, получим

$$\begin{aligned} s_1 + 2w(e) &< \Delta_w(G_t)/2 + 2\Delta_w(G_t)/3 = \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/6 \\ &< \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/4 < \Delta_w(G_t) + \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor + 1 \leqslant M + 1. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что мультицвет $[M - w(e) + 1, M]$ инцидентора (y,e) не пересекается с мультицветом $[q{+}1, q{+}p_2]$, т. е. что $M{-}w(e){+}1 > q{+}p_2$ или $q + p_2 + w(e) < M + 1$, где $q = \max\{p_1, p_2\}$. Если $p_1 \geqslant p_2$, то $q = p_1$, и $p_1 + p_2 + w(e) \leqslant \Delta_w(G_t) < M + 1$. Пусть теперь $p_2 > p_1$. Тогда $q = p_2$ и нужно доказать, что $2p_2 + w(e) < M + 1$. Так как $p_2 < \Delta_w(G_t)/2$, а $p_1 > \Delta_w(G_t)/4$, то $p_2 < p_1 + \Delta_w(G_t)/4$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2p_2 + w(e) &< p_1 + p_2 + \Delta_w(G_t)/4 + w(e) \leqslant \Delta_w(G_t) + \Delta_w(G_t)/4 \\ &< \Delta_w(G_t) + \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor + 1 \leqslant M + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (9) доказано.

Если веса всех рёбер мультиграфа G больше $\Delta_w(G_t)/4$, то $G = G_t$, и теорема доказана. В противном случае в последовательности (3) больше t членов и $w_{t+1} \leqslant \lfloor \Delta_w(G_t)/4 \rfloor$. По лемме 2 имеем

$$\mu I(G) \leqslant \max\{\mu I(G_t), \Delta_w(G_t) + w_{t+1}\}.$$

Отсюда, учитывая неравенства

$$\Delta_w(G_t) \leqslant \Delta_w(G), \quad \Delta_w(G) + w_{t+1} \leqslant \Delta_w(G) + \lfloor \Delta_w(G)/4 \rfloor$$

и (9), получаем формулу (8). Теорема 4 доказана.

Вопрос о достижимости приведённых верхних оценок инциденторного мультихроматического числа остаётся открытым.

4. Заключительные замечания

Раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа впервые рассматривалась в [9] как задача составления расписания для компьютерной

сети, в которой обмен сообщениями производится через диспетчера (через центральный компьютер) и каждое сообщение имеет единичную длительность. Для неориентированных мультиграфов такая же задача изучалась в [7]. С прикладной точки зрения более естественным представляется случай, когда сообщения имеют различные длительности. Это приводит к мультираскраске инциденторов.

Следует отметить, что задачи раскраски графов часто интерпретируются как задачи составления расписаний, цвета представляют дискретные моменты времени, раскрашиваемые объекты имеют единичный вес, и каждый из них требует только одного цвета. Но, как, например, отмечалось в [10], особый интерес представляет случай, когда раскрашиваемые объекты имеют различные веса и вместо раскраски ищется мультираскраска, при которой каждый объект требует не одного цвета, а мультицвет, т. е. интервал цветов, длина которого равна весу объекта. Мультираскраска исследовалась значительно меньше, чем раскраска. Возможно, это объясняется бóльшей сложностью задач мультираскраски. В [1–4] изучалась мультираскраска вершин. Однако, так как более простая задача раскраски вершин для графов общего вида является сложной, найти эффективные приближённые алгоритмы мультираскраски с удовлетворительной оценкой погрешности практически невозможно. Иное дело, когда в задаче раскраски есть эффективный точный или приближённый алгоритм с «хорошей» оценкой погрешности. Такая ситуация имеет место, например, в задаче раскраски рёбер [8]. Правда, и здесь переход к мультираскраске наталкивается на трудности. Так, в [5] рассматривалась простая, на первый взгляд, задача мультираскраски взвешенных рёбер дерева, в которой требуется найти минимальное число используемых цветов при условии, что мультицвета смежных рёбер не должны пересекаться. В [5] эта задача несложно решается приближённо с погрешностью, не превосходящей $w_1 - 1$, где w_1 — наибольший вес ребра. Автору не известно, существует ли эффективный точный алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксёнов В. А.** Степень совершенства графа // Методы дискретного анализа в изучении реализации логических функций. Сб. тр. Ин-та математики СО АН СССР. — 1984. — Вып. 41. — С. 3–11.
2. **Аксёнов В. А.** Обобщение некоторых оценок хроматического числа графов // 30th Int. Wiss. Koll. TH. — Ilmenau: Vortragsreihe, 1985. — С. 3–5.
3. **Аксёнов В. А.** Полиномиальный алгоритм для приближённого ршения одной задачи теории расписаний // 33th Int. Wiss. Koll. TH. — Ilmenau: Vortragsreihe, 1988. — С. 143–145.

4. **Визинг В. Г.** О мультираскраске вершин взвешенных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 16–26.
5. **Визинг В. Г.** Об одном обобщении задачи раскраски рёбер мультиграфа // Докл. Одесск. семинара по дискрет. математике. — 2007. — № 5. — С. 4–6.
6. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Об оценках инциденторного хроматического числа взвешенного неориентированного мультиграфа //Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 3–15.
7. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 3. — С. 3–14.
8. **Зыков В. А.** Основы теории графов. — М.: Вузовск. кн., 2004. — 663 с.
9. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 74–79.
10. **Golumbic M. C.** Algorithmic graph theory and perfect graphs. — New York; London: Acad. Press, 1980. — 303 с.

Визинг Вадим Георгиевич,
e-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
18 ноября 2011 г.

Переработанный вариант —
26 января 2012г.