ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2012. Том 19, № 5. С. 35–46

УДК 519.7

О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ МОЩНОСТИ МИНИМАЛЬНОГО РАЗРЕШАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ *)

Н. Ю. Золотых, А. Ю. Чирков

Аннотация. Предлагается новое необходимое и достаточное условие принадлежности точки минимальному разрешающему множеству пороговой функции k-значной логики. Это позволяет выделить большой подкласс пороговых функций, для которых мощность минимального разрешающего множества при фиксированном числе переменных n ограничена сверху полиномом от $\log_2 k$ степени $n-2$.

Ключевые слова: пороговая функция, разрешающее множество, свойство разделённости.

Введение

Функция f, отображающая $E_k^n = \{0, 1, \dots, k-1\}^n$ в $\{0, 1\}$, называется *пороговой*, если существует гиперплоскость, отделяющая множество точек, в которых f равна 0, от множества точек, в которых f равна 1.

В работе изучается строение и мощность разрешающего множества пороговой функции, т. е. такого множества точек из E_k^n, значений функции в которых достаточно для однозначного её восстановления в остальных точках области определения. Разрешающие множества естественным образом появляются в задаче расшифровки пороговой функции [7, 17]. Разрешающее множество пороговой функции f называется *минимальным* (или *тупиковым*), если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для f. Известно (см., например, [8, 13]), что минимальное разрешающее множество любой пороговой функции единственно. Максимальная мощность минимального разрешающего множества, где максимум берётся по всем пороговым функциям, заданным на E_k^n, называется *длиной обучения*.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00545–а).

Длина обучения $t(n,k)$ зависит от n экспоненциально, в частности, $t(n,2)=2^n$. Известно, что

$$c_n' \log^{n-2} k \leqslant t(n,k) \leqslant c_n'' \log^{n-1} k, \tag{1}$$

где c_n', c_n'' — некоторые положительные величины, зависящие только от n. Верхняя оценка в (1) получена в [16] на основе [11, 15], нижняя оценка установлена в [8, 13], см. также [5], где приводятся явные выражения для c_n', c_n''. В [4, 13] доказано, что $t(2,k)=4$, а в [3] установлено, что $t(3,k)=\Theta(\log k)$. Средняя мощность минимального разрешающего множества изучается в [2, 14].

При получении верхних и нижних оценок длины обучения в [5, 8, 13, 16] и др. существенным образом используются результаты о числе вершин выпуклой оболочки целых точек полиэдра, заданного системой линейных неравенств (см. [1] и приведённый там список литературы). В свою очередь, при получении верхних оценок числа этих вершин плодотворным оказался подход В. Н. Шевченко [10, 12], основанный на использовании свойства разделённости. В настоящей работе для нахождения более точных оценок мощности минимального разрешающего множества предпринята попытка использовать свойство разделённости напрямую.

Авторы предполагают, что $t(n,k)$ при фиксированном n ограничена сверху полиномом от $\log k$ степени $n-2$. Гипотеза верна при $n = 2, 3$ [3, 4, 13].

Здесь делается шаг в направлении возможного доказательства этой гипотезы для $n \geqslant 4$. Во-первых, дано новое необходимое и достаточное условие принадлежности точки минимальному разрешающему множеству (теорема 1). Во-вторых, в множестве $\Pi(n,k)$ пороговых функций, заданных на E_k^n, выделяется большой подкласс $\Pi'(n,k)$ таких функций, для которых это условие эквивалентно свойству разделённости. В-третьих, доказано (теорема 2), что мощность минимального разрешающего множества любой функции из этого подкласса ограничена сверху величиной $c_n \log^{n-2} k$, где c_n зависит только от n.

1. Определения и обозначения

Пусть $E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$, $f: E_k^n \to \{0,1\}$, $k \geqslant 2$. Обозначим

$$M_\nu(f) = \bigl\{x \in E_k^n \mid f(x)=\nu\bigr\} \quad (\nu=0,1).$$

Функция f называется *пороговой*, если существуют число $a_0 \in \mathbb{R}$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$M_0(f) = \bigl\{x \in E_k^n \mid ax \leqslant a_0\bigr\}. \tag{2}$$

Запись вида ax, где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, здесь и далее означает линейную форму $ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Линейное неравенство $ax \leqslant a_0$ в (2) называется *пороговым неравенством* функции f. Множество всех пороговых функций, заданных на E_k^n, обозначим через $\Pi(n, k)$.

Разрешающим множеством функции $f \in \Pi(n, k)$ называется такое $T \subseteq E_k^n$, что для произвольной функции $g \in \Pi(n, k) \setminus \{f\}$ найдётся $z \in T$, для которого $f(z) \neq g(z)$. Разрешающее множество функции f называется *минимальным*, или *тупиковым*, если никакое его собственное подмножество не является разрешающим для f. Известно (см., например, [8, 13]), что для любой пороговой функции f минимальное разрешающее множество единственно. Минимальное разрешающее множество функции f обозначим через $T(f)$. Определим $T_\nu(f) = T(f) \cap M_\nu(f)$ $(\nu = 0, 1)$. *Длиной обучения* называется величина $t(n, k) = \max\limits_{f \in \Pi(n,k)} |T(f)|$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$. Введём обозначения: $\operatorname{conv} X$ — выпуклая оболочка множества X; $\operatorname{cone} X$ — коническая оболочка множества X; $\operatorname{Vert} X$ — множество вершин в $\operatorname{conv} X$. Под суммой и разностью множеств X и Y векторов из $\mathbb{R}^d$ понимаем $X + Y = \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ и $X - Y = \{x - y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ соответственно.

2. Описание минимального разрешающего множества

С каждой функцией $f \in \Pi(n, k)$ связан конус $C(f)$ разделяющих функционалов [11], определяемый системой линейных неравенств относительно неизвестных $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} &ax \leqslant a_0 \quad \text{для всех } x \in M_0(f),\\ &ax > a_0 \quad \text{для всех } x \in M_1(f), \end{aligned} \tag{3}$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть $T' \subseteq M_0(f)$, $T'' \subseteq M_1(f)$. Рассмотрим следующую подсистему системы неравенств (3):

$$\begin{aligned} &ax \leqslant a_0 \quad \text{для всех } x \in T',\\ &ax > a_0 \quad \text{для всех } x \in T''. \end{aligned} \tag{4}$$

В [8] доказана следующая характеризация минимального разрешающего множества пороговой функции.

Лемма 1 [8]. *Пусть $f \in \Pi(n, k)$, $T' \subseteq M_0(f)$, $T'' \subseteq M_1(f)$. Для того чтобы $T_0(f) = T'$ и $T_1(f) = T''$, необходимо и достаточно, чтобы (4) являлась минимальной подсистемой системы (3), эквивалентной этой системе.*

Введём обозначения: $K(f) = \mathrm{cone}(M_0(f) - M_1(f))$ (если f — тождественная константа, то $K(f) = \{o\}$), где $o = (0, \ldots, 0)$,

$$F_0(f) = \mathrm{conv}(M_0(f)) + K(f), \quad F_1(f) = \mathrm{conv}(M_1(f)) - K(f).$$

Пример 1. На рис. 1 изображены множества $F_0(f)$ и $F_1(f)$ для функции $f \in \Pi(2, 4)$, заданной пороговым неравенством $2x_1 + x_2 \leqslant 3$. Обозначим

$$x^{(1)} = (0, 3), \quad x^{(2)} = (1, 1), \quad y^{(1)} = (1, 2), \quad y^{(2)} = (2, 0). \tag{5}$$

Имеем $K(f) = \mathrm{cone}\{r^{(1)}, r^{(2)}\}$,

$$F_0(f) = \mathrm{conv}\{x^{(1)}, x^{(2)}\} + K(f), \quad F_1(f) = \mathrm{conv}\{y^{(1)}, y^{(2)}\} - K(f),$$

где $r^{(1)} = x^{(1)} - y^{(2)} = (-2, 3)$, $r^{(2)} = x^{(2)} - y^{(1)} = (0, -1)$.

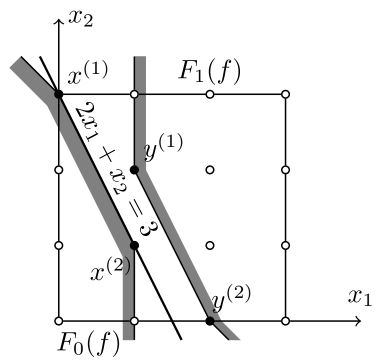

Рис. 1

Ниже (см. теорему 1) дано описание минимального разрешающего множества $T(f)$ в терминах множеств $F_\nu(f)$ $(\nu = 0, 1)$.

Лемма 2. *Пусть X, Y — конечные множества точек из $\mathbb{R}^n$, причём $\mathrm{conv}\, X \cap \mathrm{conv}\, Y = \varnothing$. Для множеств $X' = \mathrm{conv}\, X + \mathrm{cone}(X - Y)$ и $Y' = \mathrm{conv}\, Y + \mathrm{cone}(Y - X)$ имеют место следующие представления:*

$$X' = \mathrm{conv}\,\mathrm{Vert}\, X' + \mathrm{cone}(\mathrm{Vert}\, X' - \mathrm{Vert}\, Y'),$$

$$Y' = \mathrm{conv}\,\mathrm{Vert}\, Y' + \mathrm{cone}(\mathrm{Vert}\, Y' - \mathrm{Vert}\, X').$$

Доказательство. Множество X' является полиэдром (многогранным множеством) и представлено как сумма политопа $\mathrm{conv}\, X$ и полиэдрального конуса $\mathrm{cone}(X - Y)$ (см., например, [9]). Аналогично, Y' — полиэдр. Из условия $\mathrm{conv}\, X \cap \mathrm{conv}\, Y = \varnothing$ следует, что конус $\mathrm{cone}(X - Y)$ острый, и, следовательно, полиэдры X' и Y' не содержат ненулевых подпространств. Любой полиэдр, не содержащий ненулевых подпространств, можно представить в виде суммы выпуклой оболочки его вершин и конуса его рецессивных направлений. Конусы рецессивных направлений полиэдров X' и Y' суть $\operatorname{cone}(X - Y)$ и $\operatorname{cone}(Y - X)$ соответственно, поэтому достаточно показать, что $\operatorname{cone}(X - Y) = \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} X' - \operatorname{Vert} Y')$.

Вначале докажем, что $\operatorname{cone}(\operatorname{Vert} X' - \operatorname{Vert} Y') \subseteq \operatorname{cone}(X - Y)$. Для произвольной точки $x' \in X'$ найдутся $x \in \operatorname{conv} X$ и $z \in \operatorname{cone}(X - Y)$ такие, что $x' = x + z$. Точки $x + \frac{1}{2}z$ и $x + \frac{3}{2}z$ принадлежат X'. Так как $x' = \frac{1}{2}\bigl(x + \frac{1}{2}z\bigr) + \frac{1}{2}\bigl(x + \frac{3}{2}z\bigr)$, точка x' не может быть вершиной множества X' при $z \neq o$. Таким образом, вершины X' являются вершинами $\operatorname{conv} X$, следовательно, $\operatorname{Vert} X' \subseteq X$. Аналогично получаем $\operatorname{Vert} Y' \subseteq Y$. Из полученных включений вытекает соотношение

$$\operatorname{cone}(\operatorname{Vert} X' - \operatorname{Vert} Y') \subseteq \operatorname{cone}(X - Y).$$

Для доказательства включения $\operatorname{cone}(X - Y) \subseteq \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} X' - \operatorname{Vert} Y')$ достаточно показать, что произвольный экстремальный вектор r конуса $\operatorname{cone}(X - Y)$ принадлежит $\operatorname{cone}(\operatorname{Vert} X' - \operatorname{Vert} Y')$. Для вектора r найдётся точка $v \in \operatorname{Vert} X'$ такая, что луч $v + \operatorname{cone} r$ является одномерной гранью X'. Пусть $a(x - v) = 0$ — опорная гиперплоскость к одномерной грани $v + \operatorname{cone} r$ полиэдра X', т. е. $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq o$, $ar = 0$, $a(x - v) < 0$ для всех $x \in X' \setminus (v + \operatorname{cone} r)$.

Предположим, что нашлась точка $y \in Y'$ такая, что $a(y - v) < 0$. Тогда точка $z = 2v - y$ удовлетворяет неравенству $a(z - v) = a(v - y) > 0$ и $z = v + (v - y) \in X'$, так как $v - y \in \operatorname{cone}(X' - Y') \subseteq \operatorname{cone}(X - Y)$ и $v \in \operatorname{Vert} X' \subseteq X$, что противоречит определению опорной гиперплоскости.

Значение линейной функции ay ограничено снизу на полиэдре Y' ($ay \geqslant av$). Если значение линейной функции на полиэдре ограничено снизу, то её минимум достигается на вершине полиэдра. Обозначим через y' вершину полиэдра Y', на которой достигается минимум линейной функции ay. Если $a(y' - v) > 0$, то $a(y - v) > 0$ для всех $y \in Y'$. Тогда для любых $x \in X'$ и $y \in Y'$ выполняется $a(x - y) = a(x - v) + a(v - y) < 0$. Так как $r = x - y$ для некоторых $x \in X \subset X'$, $y \in Y \subset Y'$, то $ar < 0$, что противоречит определению a. Таким образом, установлено равенство $a(y' - v) = 0$. Поскольку $y' \in \operatorname{Vert} Y' \subseteq Y$ и $v \in \operatorname{Vert} X' \subseteq X$, имеем $v - y' \in \operatorname{cone}(X - Y)$, следовательно, гиперплоскость $ax = av$ содержит луч $v + \operatorname{cone}(v - y') \subset X'$. На опорной гиперплоскости $ax = av$ находится единственный луч из X', поэтому $r = \beta(v - y') \in \operatorname{cone}(X' - Y')$, где $\beta > 0$. Итак, $\operatorname{cone}(X - Y) \subseteq \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} X' - \operatorname{Vert} Y')$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Если* $f \in \Pi(n, k)$, *то* $T_\nu(f) = \operatorname{Vert} F_\nu(f)$ $(\nu = 0, 1)$.

Доказательство. Если f — тождественная константа, то доказываемое равенство очевидно. Пусть f не является константой.

Вначале докажем, что $T_\nu(f) \subseteq \operatorname{Vert} F_\nu(f)$ $(\nu = 0, 1)$, т. е. $\operatorname{Vert} F_0(f) \cup \operatorname{Vert} F_1(f)$ — разрешающее множество функции f. Рассмотрим произвольную пороговую функцию $g \in \Pi(n, k)$, для которой $\operatorname{Vert} F_\nu(f) \subseteq M_\nu(g)$ $(\nu = 0, 1)$. Пусть гиперплоскость $ax = \beta$ разделяет множества $M_0(g)$ и $M_1(g)$, а именно, пусть $ax \leqslant \beta$ при $x \in M_0(g)$ и $ax > \beta$ при $x \in M_1(g)$. Так как $\operatorname{Vert} F_\nu(f) \subseteq M_\nu(g)$ $(\nu = 0, 1)$, имеем $az \leqslant 0$, где $z \in \operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f)$. Отсюда получаем неравенство $az \leqslant \beta$ при $z \in \operatorname{conv} \operatorname{Vert} F_0(f) + \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f))$ и неравенство $az > \beta$ при $z \in \operatorname{conv} \operatorname{Vert} F_1(f) + \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_1(f) - \operatorname{Vert} F_0(f))$. Учитывая включения

$$M_0(f) \subset F_0(f) = \operatorname{conv} \operatorname{Vert} F_0(f) + \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f))$$

(последнее равенство доказано в лемме 2) и

$$M_1(f) \subset F_1(f) = \operatorname{conv} \operatorname{Vert} F_1(f) - \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f)),$$

получаем, что $az \leqslant \beta$ при $z \in M_0(f)$ и $az > \beta$ при $z \in M_0(f)$. Тем самым установлены включения $M_\nu(f) \subseteq M_\nu(g)$ $(\nu = 0, 1)$. Поскольку $M_0(f) \cup M_1(f) = E_k^n = M_0(g) \cup M_1(g)$, то $M_\nu(f) = M_\nu(g)$ $(\nu = 0, 1)$, т. е. $f = g$. Следовательно, $\operatorname{Vert} F_0(f) \cup \operatorname{Vert} F_1(f)$ — разрешающее множество функции f.

Теперь покажем, что $\operatorname{Vert} F_\nu(f) \subseteq T_\nu(f)$ $(\nu = 0, 1)$, т. е. множество $\operatorname{Vert} F_0(f) \cup \operatorname{Vert} F_1(f)$ минимальное разрешающее. Достаточно показать, что для произвольной точки $v \in \operatorname{Vert} F_0(f) \cup \operatorname{Vert} F_1(f)$ найдётся функция $g \in \Pi(n, k)$, значения которой отличаются от значений функции f только в точке v. Для определённости будем считать, что $v \in \operatorname{Vert} F_0(f)$. Тогда $a(x - v) = 0$ — опорная гиперплоскость к $F_0(f)$ в точке v, т. е. $a \in \mathbb{R}^n$, $a(x - v) < 0$ при $x \in F_0(f) \setminus \{v\}$. Поскольку

$$v + \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f)) \subset F_0(f),$$

для вектора $r \in \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f))$ выполняется неравенство $ar < 0$. Так как $v - \operatorname{Vert} F_1(f) \subset \operatorname{Vert} F_0(f) - \operatorname{Vert} F_1(f)$, при $y \in \operatorname{Vert} F_1(f)$ справедливо $a(v - y) < 0$. Из полученных неравенств вытекает, что если $y \in \operatorname{conv} \operatorname{Vert} F_1(f) + \operatorname{cone}(\operatorname{Vert} F_1(f) - \operatorname{Vert} F_0(f)) = F_1(f)$, то $av < ay$. Определим пороговую функцию g следующим образом: $g(x) = 0$ при $ax < av$ и $g(x) = 1$ при $ax \geqslant av$. Из доказанных ранее неравенств следует, что $M_0(g) = M_0(f) \setminus \{v\}$ и $M_1(g) = M_1(f) \cup \{v\}$, т. е. значения функции g отличаются от значений f только в точке v. Случай $v \in \operatorname{Vert} F_1(f)$ рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

Проиллюстрируем теорему на примерах.

Пример 1 (продолжение). Для пороговой функции $f \in \Pi(2,4)$, заданной пороговым неравенством $2x_1 + x_2 \leqslant 3$ (см. рис. 1), вершины множества $F_0(f)$ суть $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, а вершины множества $F_1(f)$ суть $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, поэтому $T_0(f) = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$, $T_1(f) = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$, где $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ определены в (5).

Пример 2. Рассмотрим функцию $f \in \Pi(3,10)$ с пороговым неравенством $20x_1 + 28x_2 + 35x_3 \leqslant 140$. Экстремальные лучи конуса $K(f)$ определяются векторами

$$(5,0,-3),\ (4,-3,0),\ (-2,5,-3),\ (-4,4,-1),\ (-4,-1,3),\ (-3,-3,4).$$

Далее,

$$F_0(f) = \operatorname{conv}\{x^{(1)},\, x^{(2)},\, x^{(3)}\} + K(f),$$
$$F_1(f) = \operatorname{conv}\{y^{(1)},\, y^{(2)},\, y^{(3)}\} - K(f),$$

где

$$x^{(1)} = (7,0,0), \quad x^{(2)} = (0,5,0), \quad x^{(3)} = (0,0,4),$$
$$y^{(1)} = (4,1,1), \quad y^{(2)} = (3,3,0), \quad y^{(3)} = (2,0,3).$$

Таким образом, $T_0(f) = \{x^{(1)},\, x^{(2)},\, x^{(3)}\}$, $T_1(f) = \{y^{(1)},\, y^{(2)},\, y^{(3)}\}$. Вычисления выполнены с использованием программы `Skeleton` [6]. В [5] на этом примере проиллюстрирован другой метод нахождения $T(f)$.

Следствие 1. *Пусть* $f \in \Pi(n,k)$, $x, y \in T_\nu(f)$ $(\nu = 0,1)$, $x \neq y$. *Тогда* $2x - y \notin F_0(f) \cup F_1(f)$.

Доказательство. Пусть $x, y \in T_0(f)$. Обозначим $z = 2x - y$.

Если $z \in F_0(f)$, то $x = (y+z)/2$, поэтому $x \notin \operatorname{Vert} F_0(f) = T_0(f)$.

Если $z \in F_1(f)$, то рассмотрим $y' = y + (x - z)$. Так как $y \in M_0(f)$, а $x - z \in K(f)$, то $y' \in F_0(f)$. Имеем $y = (x+y')/2$, откуда $y \notin \operatorname{Vert} F_0(f) = T_0(f)$.

Случай $x, y \in T_1(f)$ рассматривается аналогично. Следствие 1 доказано.

3. Верхняя оценка мощности минимального разрешающего множества

К сожалению, в общем случае авторам не известно удобного описания множеств $F_\nu(f)$ $(\nu = 0,1)$, которое позволило бы достаточно точно оценить $|\operatorname{Vert} F_\nu(f)|$. Рассмотрим однако множество $\Pi'(n,k)$ таких пороговых функций f, для каждой из которых найдётся пороговое неравенство

$ax \leqslant a_0$, где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и

$$a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_0 < a_j(k-1) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Например, функция f из примера 1 не принадлежит множеству $\Pi'(2,4)$, а функция из примера 2 принадлежит $\Pi'(3,10)$.

Легко видеть, что разделяющая гиперплоскость функции $f \in \Pi'(n,k)$ пересекает только те рёбра гиперкуба E_k^n, которые инцидентны вершине $o = (0, \ldots, 0)$. Кроме того, для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M_0(f)$ имеем $x_j \leqslant k-2$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, так как $a_j x_j \leqslant ax \leqslant a_0 < a_j(k-1)$.

Класс $\Pi'(n,k)$ является достаточно «естественным». В частности, для любой $f \in \Pi'(n,k)$ множество $M_0(f)$ представляет собой множество допустимых точек некоторой задачи о рюкзаке (без ограничений на количество предметов данного типа), и, наоборот, для любой задачи о рюкзаке (с $a_j > 0$) найдутся k и функция $f \in \Pi'(n,k)$ такие, что $M_0(f)$ — множество её допустимых точек. При этом $\operatorname{conv} M_0(f)$ — многогранник задачи о рюкзаке, представляющий большой интерес в целочисленном линейном программировании (см., например, [7, 9]). Кроме того, авторы надеются, что предлагаемый здесь подход для получения оценок мощности $|T(f)|$, где $f \in \Pi'(n,k)$, удастся в дальнейшем применить к произвольным пороговым функциям.

Обозначим через $\mathbb{Z}_+^n$ множество векторов из $\mathbb{Z}^n$ с неотрицательными компонентами. Говорят, что множество $G \subset \mathbb{Z}_+^n$ обладает *свойством разделённости*, если из условий $x, y \in G$, $x \neq y$ следует $2x - y \notin \mathbb{Z}_+^n$ [10]. Покажем, что если $f \in \Pi'(n,k)$, то множества $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладают свойством разделённости. Ниже для оценок их мощностей воспользуемся подходом из [10, 12].

Лемма 3. *Если $f \in \Pi'(n,k)$, то каждое из множеств $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладает свойством разделённости.*

Доказательство. Покажем, что если $f \in \Pi'(n,k)$, то $\mathbb{Z}_+^n \subseteq F_0(f) \cup F_1(f)$.

Пусть $ax \leqslant a_0$ — пороговое неравенство, коэффициенты которого удовлетворяют (6). Рассмотрим точки $x^{(i)} = \big(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\big)$, $y^{(i)} = \big(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\big)$, где

$$x_j^{(j)} = \left\lfloor \frac{a_0}{a_j} \right\rfloor, \quad y_j^{(j)} = \left\lfloor \frac{a_0}{a_j} \right\rfloor + 1, \quad x_j^{(i)} = y_j^{(i)} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j).$$

Легко видеть, что $x^{(j)} \in M_0(f)$, и ввиду (6) $y^{(j)} \in M_1(f)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть

$$K' = \operatorname{cone}\{x^{(1)} - y^{(1)},\ x^{(2)} - y^{(2)}, \ldots, x^{(n)} - y^{(n)}\}.$$

Тогда $-\mathbb{Z}_+^n = K' \subseteq K(f)$.

Пусть $x \in \mathbb{Z}_+^n$. Если $ax \leqslant a_0$, то $x \in M_0(f) \subseteq F_0(f)$. Если $ax > a_0$, то

$$x \in M_1(f) + \mathbb{Z}_+^n = M_1(f) - K' \subseteq M_1(f) - K(f) = F_1(f).$$

Итак, $\mathbb{Z}_+^n \subseteq F_0(f) \cup F_1(f)$, поэтому согласно следствию 1 множества $T_0(f)$ и $T_1(f)$ обладают свойством разделённости. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $f \in \Pi'(n,k)$ и $ax \leqslant a_0$ — пороговое неравенство для f, для которого справедливо условие (6). Тогда для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_0(f)$ существует j такое, что*

$$\frac{a_0}{na_j} - \frac{1}{n} < x_j \leqslant \frac{a_0}{a_j},$$

и для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1(f)$ существует j такое, что

$$\frac{a_0}{na_j} < x_j \leqslant \frac{a_0}{a_j} + 1.$$

Доказательство. Пусть $x \in T_0(f)$. Выберем j так, чтобы

$$a_j x_j \geqslant a_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Рассмотрим точку y, полученную из x увеличением её j-й компоненты на 1. В силу (6) имеем $y \in E_k^n$. Если $y \in M_0(f)$, то легко видеть, что $x \notin \operatorname{Vert} F_0(f)$, что противоречит условию $x \in T_0(f)$. Следовательно, $y \in M_1(f)$, откуда $ax + a_j = ay > a_0$, поэтому $ax > a_0 - a_j$. Ввиду (7) имеем $na_j x_j \geqslant ax > a_0 - a_j$, откуда $x_j > a_0/(na_j) - 1/n$.

С другой стороны, $ax \leqslant a_0$, поэтому $a_j x_j \leqslant a_0$, значит, $x_j \leqslant a_0/a_j$.

Пусть теперь $x \in T_1(f)$. Снова выберем j согласно (7). Заметим, что $x_j \geqslant 1$, так как в противном случае $x = o$, откуда $M_0(f) = \varnothing$ в силу (6). Рассмотрим точку y, полученную из x уменьшением её j-й компоненты на 1. Если $y \in M_1(f)$, то $x \notin \operatorname{Vert} F_1(f) = T_1(f)$; противоречие. Тем самым $y \in M_0(f)$. Следовательно, $ax - a_j = ay \leqslant a_0$, откуда $a_j x_j \leqslant ax \leqslant a_0 + a_j$, поэтому $x_j \leqslant 1 + a_0/a_j$.

С другой стороны, используя (7), получаем, что $na_j x_j \geqslant ax > a_0$, значит, $x_j > a_0/(na_j)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5 [10, 12]. *Пусть множество $G \subset \mathbb{Z}_+^n$ обладает свойством разделённости и для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ выполнено $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ — неотрицательные числа. Тогда*

$$|G| \leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \left\lfloor 1 + \log_2 \frac{\beta_i + 2}{\alpha_i + 1} \right\rfloor.$$

Теорема 2. *Для любой* $f \in \Pi'(n,k)$ *при* $n \geqslant 2$

$$|T_\nu(f)| \leqslant n(1+\log_2 n)(1+\log_2(k+1))^{n-2} \qquad (\nu = 0,1). \tag{8}$$

Доказательство. Известно [4, 13], что $|T_\nu(f)| \leqslant 2$ при $f \in \Pi(2,k)$. Таким образом, при $n=2$ неравенство (8) выполнено. Далее считаем, что $n \geqslant 3$.

Пусть $ax \leqslant a_0$ — пороговое неравенство функции f, для которого выполнено (6). Обозначим через $T_{\nu j}$ ($\nu = 0,1$; $j = 1,2,\dots,n$) множество точек из $T_\nu(f)$, j-я компонента которых удовлетворяет неравенствам леммы 4. По лемме 3 множество $T_\nu(f)$ обладает свойством разделённости, поэтому тем же свойством обладают и его подмножества $T_{\nu j}$.

Используя лемму 5, оценим $|T_{0j}|$. При этом применим первое неравенство из леммы 4 и $n-2$ неравенств $0 \leqslant x_i \leqslant k-2$ ($i \neq j$). Учитывая, что $n \geqslant 3$, получаем

$$|T_{0j}| \leqslant \left(1+\log_2 \frac{\frac{a_0}{a_j}+2}{\frac{a_0}{na_j}-\frac{1}{n}+1}\right)(1+\log_2 k)^{n-2} = \left(1+\log_2 \frac{n(a_0+2a_j)}{a_0+(n-1)a_j}\right)(1+\log_2 k)^{n-2} \leqslant (1+\log_2 n)(1+\log_2 k)^{n-2}.$$

Теперь, используя лемму 5, оценим $|T_{1j}|$. При этом применим второе неравенство из леммы 4 и $n-2$ неравенств $0 \leqslant x_i \leqslant k-1$ ($i \neq j$). Учитывая, что $n \geqslant 3$, получаем

$$|T_{1j}| \leqslant \left(1+\log_2 \frac{\frac{a_0}{a_j}+3}{\frac{a_0}{na_j}+1}\right)(1+\log_2(k+1))^{n-2} = \left(1+\log_2 \frac{n(a_0+3a_j)}{a_0+na_j}\right)(1+\log_2(k+1))^{n-2} \leqslant (1+\log_2 n)(1+\log_2(k+1))^{n-2}.$$

Суммируя по j, получаем оценки (8). Теорема 2 доказана.

Авторы благодарны В. Н. Шевченко и С. И. Веселову за полезные обсуждения и искренне признательны рецензенту, указавшему на огрехи в первом варианте работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Веселов С. И., Чирков А. Ю.** Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 14–31.

2. **Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.** Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестн. Нижегородск. гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н. Новгород.: Изд-во ННГУ, 2003. — С. 238–246.

3. **Вировлянская М. А., Золотых Н. Ю.** О мощности разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Мат. XIV Междунар. шк.-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — Н. Новгород: Изд-во Нижегородск. гос. пед. ун-та, 2003. — С. 20–21.

4. **Золотых Н. Ю.** О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Мат. XI Межгос. шк.-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Ч. I. — М.: Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. — С. 74–79.

5. **Золотых Н. Ю.** Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: Физматлит, 2008. — С. 159–168.

6. **Золотых Н. Ю.** Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 153–163.

7. **Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.** Расшифровка пороговых функций k-значной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 3. — С. 18–23.

8. **Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.** О нижней оценке расшифровки пороговых функций k-значной логики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 346–352.

9. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. — М.: Мир, 1991. — 360 с.

10. **Шевченко В. Н.** О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. — 1981. — № 2. — С. 133–134.

11. **Шевченко В. Н.** О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. — С. 99–108.

12. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Физматлит, 1995. — 192 с.

13. **Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю.** О сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики // Докл. РАН. — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 606–608.

14. **Antony M., Brightwell G., Shawe-Taylor J.** On exact specification by labeled examples // Discrete Appl. Math. — 1995. — Vol. 61, N 1. — P. 1–25.

15. **Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.** On integer points in polyhedra // Combinatorica. — 1992. — Vol. 12, N 1. — P. 27–37.

16. **Hegedüs T.** Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc.

7th Ann. ACM Conf. Computational Learning Theory (COLT'94). — New York: ACM Press, 1994. — P. 228–236.

17. **Hegedüs T.** Generalized teaching dimensions and the query complexity of learning // Proc. 8th Ann. ACM Conf. Computational Learning Theory (COLT'95). — New York: ACM Press, 1995. — P. 108–117.

Золотых Николай Юрьевич,
e-mail: zolotykh@vmk.unn.ru
Чирков Александр Юрьевич,
e-mail: chir7@yandex.ru

Статья поступила
23 октября 2011 г.
Переработанный вариант —
23 марта 2012 г.