ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2012. Том 19, № 5. С. 3–20

УДК 519.1

МИНИМАЛЬНЫЕ ПО ДВУСТОРОННЕЙ ТЕНИ ПОДМНОЖЕСТВА СЛОЯ БУЛЕВА КУБА, ОТЛИЧНЫЕ ОТ КРУГА [*)]

М. А. Башов

Аннотация. Рассматривается задача минимизации двусторонней тени в слое булева куба. Показано, что правый лексикографический отрезок второго слоя имеет минимальную двустороннюю тень, и описаны минимальные семейства размера $1+k(n-k)+(k-1)(n-k-1)$ в k-м слое при $n=2k$ и при малых значениях k.

Ключевые слова: минимизация тени, двусторонняя тень, булев куб, минимизация веса идеала.

Введение

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство k-элементных подмножеств множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, т.е. $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$. *Нижней тенью* $\Delta\mathcal{F}$ (*верхней тенью* $\nabla\mathcal{F}$) называется семейство множеств A из слоя $\binom{[n]}{k-1}$, для которых существует множество $B \in \mathcal{F}$ такое, что $B \supset A$ ($B \subset A$). *Двусторонней тенью* $\boxtimes\mathcal{F}$ называется объединение семейств $\Delta\mathcal{F}$ и $\nabla\mathcal{F}$.

Семейство $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ называется *минимальным по нижней тени* (*верхней тени, двусторонней тени*), если $|\Delta\mathcal{F}| \leqslant |\Delta\mathcal{G}|$ ($|\nabla\mathcal{F}| \leqslant |\nabla\mathcal{G}|$, $|\boxtimes\mathcal{F}| \leqslant |\boxtimes\mathcal{G}|$) для любого семейства $\mathcal{G} \subseteq \binom{[n]}{k}$ такого, что $|\mathcal{G}| = |\mathcal{F}|$.

Множество $A \in \binom{[n]}{k}$ *лексикографически предшествует* множеству $B \in \binom{[n]}{k}$, если $\max(A \triangle B) \in B$. Семейство, состоящее из m лексикографически наименьших множеств семейства $\mathcal{F}$, называется *левым лексикографическим отрезком* $\mathcal{F}$. Семейство, состоящее из m лексикографически наибольших множеств семейства $\mathcal{F}$, называется *правым лексикографическим отрезком* $\mathcal{F}$.

Теорема Краскала — Катоны [2, 4, 5] *Левые лексикографические отрезки* $\binom{[n]}{k}$ *являются минимальными семействами по нижней тени.*

[*)]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10–01–00768–а).

Клементс и Линдстрём [3] обобщили результат Краскала — Катоны на произвольное произведение цепей.

Пусть $A \in \binom{[n]}{k}$. *Кругом* $\mathcal{C}_r(A)$ радиуса r с центром A называется семейство $\left\{B \in \binom{[n]}{k} \mid |A \triangle B| \leqslant 2r\right\}$, т. е. пересечение шара Хэмминга радиуса $2r$ с центром A и слоя $\binom{[n]}{k}$. Обозначим через $\mathcal{C}_r(n,k)$ круг $\mathcal{C}_r(\{1,2,\ldots,k\}) \subseteq \binom{[n]}{k}$.

Теорема 1 [1]. *Круг* $\mathcal{C}_1(n,k)$ *является единственным с точностью до изоморфизма минимальным по двусторонней тени семейством в* $\binom{[n]}{k}$ *мощности* $1 + k(n-k)$.

Теорема 2 [1]. *При* $k \geqslant n/2$ *начальные лексикографические отрезки* $\mathcal{C}_1(n,k)$ *являются минимальными по двусторонней тени семействами.*

В работе рассматривается задача минимизации двусторонней тени в $\binom{[n]}{k}$ и описываются минимальные по двусторонней тени семейства произвольной мощности при $k = 2$ и мощности $1 + k(n-k) + (k-1)(n-k-1)$, которая заключена между $|\mathcal{C}_1(n,k)|$ и $|\mathcal{C}_2(n,k)|$, при $k = n/2$ и $k < (2n)^{1/4}$.

1. Эквивалентная постановка задачи

Пусть A и B — элементы $\binom{[n]}{k}$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ и элементы A и B упорядочены по возрастанию, т. е. $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$. Множество A *предшествует* множеству B ($A \sqsubseteq B$), если $a_i \leqslant b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Семейство $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ называется *идеалом* $\mathcal{M}(n,k) = \left(\binom{[n]}{k}, \sqsubseteq\right)$, если из того, что $A \in \mathcal{F}$, следует, что любое множество B такое, что $B \sqsubseteq A$, входит в $\mathcal{F}$.

Из свойств стандартного оператора сдвига [2] следует

Утверждение 1. *Для любого семейства* $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ *найдётся идеал* $\mathcal{F}' \subseteq \binom{[n]}{k}$ *такой, что* $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'|$ *и* $|\boxtimes\mathcal{F}| \geqslant |\boxtimes\mathcal{F}'|$.

Таким образом, при поиске минимального по двусторонней тени семейства достаточно рассматривать только идеалы $\mathcal{M}(n,k)$.

Для вычисления размера тени идеала существует простая аддитивная формула. Пусть $s_l(A) = \min([n] \setminus A) - 1$, $s_u(A) = n - \max A$ и $s(A) = s_l(A) + s_u(A)$.

Утверждение 2 [1]. *Если* $\mathcal{F}$ — *идеал* $\mathcal{M}(n,k)$, *то*

$$|\Delta\mathcal{F}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} s_l(A), \quad |\nabla\mathcal{F}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} s_u(A), \quad |\boxtimes\mathcal{F}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} s(A).$$

Таким образом, задача о поиске минимального по двусторонней тени семейства эквивалентна задаче минимизации веса идеала $\mathcal{M}(n,k)$ при весовой функции s.

Обозначим через $\mathcal{F}|_m$ семейство $\{A \in \mathcal{F},\ s(A) = m\}$.

2. Вспомогательные утверждения

Через $\mathcal{I}(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ обозначим минимальный идеал $\mathcal{M}(n,k)$, содержащий множества $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Заметим, что

$$\mathcal{C}_1(n,k) = \mathcal{I}(\{2, 3, \ldots, k, n\}).$$

Пусть $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k) = \mathcal{I}(\{2, 3, \ldots, k-1, k+1, n\})$. Не ограничивая общности, будем считать, что $k \leqslant \frac{n}{2}$.

Утверждение 3. *Для любого множества A существует единственное множество $A^0 \in \binom{[n]}{k}\big|_0$ такое, что $A \sqsubseteq A^0$ и не существует множества $B \in \binom{[n]}{k}\big|_0$ такого, что $A \sqsubseteq B \sqsubseteq A^0$.*

Доказательство. Пусть $s_l(A) = p,\ s_u(A) = q$, т.е.

$$A = \{1, 2, \ldots, p, a_{p+1}, \ldots, a_{k-1}, n-q\},$$

причём $a_{p+1} > p$. Рассмотрим множество $A^0 = \{2, 3, \ldots, p+1, a_{p+1}, \ldots, a_{k-1}, n\}$. Ясно, что $A \sqsubseteq A^0$ и $A^0 \in \binom{[n]}{k}\big|_0$.

Докажем, что $A^0 \sqsubseteq B$ для любого $B \in \binom{[n]}{k}\big|_0$, если $A \sqsubseteq B$. Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_k\},\ A \sqsubseteq B,\ B \in \binom{[n]}{k}\big|_0$. Поскольку $B \in \binom{[n]}{k}\big|_0$, имеем $b_1 \geqslant 2 = a_1^0$, $b_2 \geqslant 3 = a_2^0$, …, $b_p \geqslant p+1 = a_p^0$, $b_k = n = a_k^0$. Так как $A \sqsubseteq B$, верны неравенства

$$b_{p+1} \geqslant a_{p+1} = a_{p+1}^0, \quad b_{p+2} \geqslant a_{p+2} = a_{p+2}^0, \quad \ldots, \quad b_{k-1} \geqslant a_{k-1} = a_{k-1}^0.$$

Таким образом, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, выполнено $b_i \geqslant a_i^0$, следовательно, $A^0 \sqsubseteq B$. Утверждение 3 доказано.

Множество $A \in \binom{[n]}{k}\big|_m$ *порождает* $B \in \binom{[n]}{k}\big|_{m+1}$, если $B \sqsubseteq A$ и не существует такого множества C, отличного от A и B, что $B \sqsubseteq C \sqsubseteq A$.

Множество A порождает не более двух множеств:

$B = A \cup \{a_k - 1\} \setminus \{a_k\}$ (порождение по старшей координате), если $a_{k-1} \neq a_k - 1$;

$B = A \cup \{l+1\} \setminus \{l+2\}$ (порождение по младшей координате), если $a_l = l$, $a_{l+1} = l+2$.

Заметим также, что множество $B \in \binom{[n]}{k}\big|_{m+1}$ может порождаться одним из двух множеств:

$A = B \cup \{b_k+1\} \setminus \{b_k\}$ (порождение по старшей координате), если $b_k \neq n$;

$A = B \cup \{l+1\} \setminus \{l\}$ (порождение по младшей координате), если $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, …, $b_l = l$, $b_{l+1} > l + 1$.

Утверждение 4. *Если A порождает B, то $A^0 = B^0$.*

Доказательство. Если множество $A = \{1, 2, \ldots, p, p + 2, a_{p+2}, a_{p+3}, \ldots, a_k\}$ порождает $B = \{1, 2, \ldots, p + 1, a_{p+2}, a_{p+3}, \ldots, a_k\}$ по младшей координате, то $A^0 = B^0 = \{2, 3, \ldots, p + 2, a_{p+2}, a_{p+3}, \ldots, a_{k-1}, n\}$, поскольку $a_{p+2} \geqslant p + 3$.

Если множество $A = \{1, 2, \ldots, p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$, $a_{p+1} > p$, порождает $B = \{1, 2, \ldots, p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1\}$ по старшей координате, то $A^0 = B^0 = \{2, 3, \ldots, p+1, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_{k-1}, n\}$. Утверждение 4 доказано.

Учитывая, что

$$\mathcal{C}_1(n,k) = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} \mid A^0 = \{2, 3, \ldots, k, n\} \right\},$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k) = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} \mid A^0 = \{2, 3, \ldots, k, n\} \right\} \cup \left\{ A \in \binom{[n]}{k} \mid A^0 = \{2, 3, \ldots, k-1, k+1, n\} \right\},$$

получаем

Следствие 1. *Если A порождает B, то $A \in \mathcal{C}_1(n,k)$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{C}_1(n,k)$.*

Следствие 2. *Если A порождает B, то $A \in \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ тогда и только тогда, когда $B \in \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$.*

Введём обозначение

$$\widehat{\mathcal{I}}(A_1, A_2, \ldots, A_m) = \left\{ A \in \binom{[n]}{k} \mid \exists i\colon\ A^0 = A_i \right\} \setminus \{\{1, 2 \ldots, k\}\}.$$

Пусть $A^0 \in \binom{[n]}{k}\big|_0$, т. е. $1 \notin A^0$ и $n \in A^0$, $\widehat{s}_l(A^0) = \min([n] \setminus A^0 \setminus \{1\}) - 1$, и $\widehat{s}_u(A^0) = n - \max(A^0 \setminus \{n\})$.

Утверждение 5. *Пусть $A^0 \in \binom{[n]}{k}\big|_0$. Тогда $\widehat{\mathcal{I}}(A^0)$ изоморфно как частично упорядоченное множество декартову произведению двух цепей длины $\widehat{s}_l(A^0)$ и $\widehat{s}_u(A^0)$, причём при изоморфизме слои произведения цепей соответствуют семействам $\widehat{\mathcal{I}}(A^0)|_m$.*

Доказательство. Пусть $A^0 = \{2, 3, \dots, p, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{k-1}, n\}$. Заметим, что $\widehat{\mathcal{I}}(A^0)$ состоит из множеств вида

$$A(q, a_k) = \{1, 2, \dots, q-1, q+1, q+2, \dots, p, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{k-1}, a_k\},$$

где $1 \leqslant q \leqslant p$, $a_{k-1} < a_k \leqslant n$. Таким образом, множество, принадлежащее семейству $\widehat{\mathcal{I}}(A^0)$, однозначно задаётся двумя параметрами q и a_k, которые могут принимать $p = \widehat{s}_l(A^0)$ и $n - a_{k-1} = \widehat{s}_u(A^0)$ значений соответственно. Также ясно, что $A(q', a'_k) \sqsubseteq A(q'', a''_k)$ тогда и только тогда, когда $q' \geqslant q''$ и $a'_k \leqslant a''_k$. Тем самым семейство $\widehat{\mathcal{I}}(A^0)$ изоморфно произведению двух цепей. Поскольку

$$s(\{1, 2, \dots, q-1, q+1, q+2, \dots, p, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{k-1}, a_k\}) \\ = q + n - a_k = n + (q - a_k),$$

т. е. функция s зависит только от разности параметров q и a_k, на точках одного слоя произведения цепей функция s принимает одинаковые значения. Утверждение 5 доказано.

Следствие 3. *Пусть* $A^0 \in \binom{[n]}{k}|_0$ *таково, что* $\min\{\widehat{s}_l(A^0), \widehat{s}_u(A^0)\} = p$, $\max\{\widehat{s}_l(A^0), \widehat{s}_u(A^0)\} = q$. *Тогда*

$$\big|\widehat{\mathcal{I}}(A^0)|_m\big| = \begin{cases} m+1 & \text{при } 0 \leqslant m \leqslant p-1, \\ p & \text{при } p-1 \leqslant m \leqslant q-1, \\ p+q-m-1 & \text{при } q-1 \leqslant m \leqslant p+q-1, \\ 0 & \text{при } p+q-1 \leqslant m. \end{cases}$$

Учитывая, что $\widehat{\mathcal{C}}_1(n, k) = \big\{\{1, 2, \dots, k\}\big\} \cup \widehat{\mathcal{I}}(\{2, 3, \dots, k, n\}) \cup \widehat{\mathcal{I}}(\{2, 3, \dots, k-1, k+1, n\})$, получаем

Следствие 4.

$$\big|\widehat{\mathcal{C}}_1(n, k)|_m\big| = \begin{cases} 2m+2 & \text{при } 0 \leqslant m \leqslant k-2, \\ 2k-1 & \text{при } k-1 \leqslant m \leqslant n-k-2, \\ 2n-2m-4 & \text{при } n-k-1 \leqslant m \leqslant n-3, \\ 1 & \text{при } m = n-2 \text{ и } m = n. \end{cases}$$

Применяя теорему Клементса — Линдстрёма к семейству $\widehat{\mathcal{I}}(A^0)$, получаем

Утверждение 6. *Пусть* $A^0 \in \binom{[n]}{k}|_0$, *причём* $\min\{\widehat{s}_l(A^0), \widehat{s}_u(A^0)\} = p$, $\max\{\widehat{s}_l(A^0), \widehat{s}_u(A^0)\} = q$. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *идеал* $\mathcal{M}(n,k)$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \widehat{\mathcal{I}}(A^0)$ *и* $\mathcal{F}'|_m \neq \varnothing$. *Тогда*

(i) *если* $0 \leqslant m \leqslant p-2$, *то* $|\mathcal{F}'|_{m+1} \geqslant \mathcal{F}'|_m + 1$;

(ii) *если* $p-1 \leqslant m \leqslant q-2$, *то* $\mathcal{F}'|_{m+1} \geqslant \mathcal{F}'|_m$;

(iii) *если* $q-1 \leqslant m \leqslant p+q-2$ *и* $\mathcal{F}'|_m \neq \widehat{\mathcal{I}}(A^0)|_m$, *то* $\mathcal{F}'|_{m+1} \geqslant \mathcal{F}'|_m$;

(iv) *если* $q-1 \leqslant m \leqslant p+q-2$ *и* $\mathcal{F}'|_m = \widehat{\mathcal{I}}(A^0)|_m$, *то* $\mathcal{F}'|_{m+1} = \mathcal{F}'|_m - 1$.

Будем называть семейство $\mathcal{G}$ *m-исключительным* относительно семейства $\mathcal{F}$, если $\mathcal{G}|_m \geqslant \mathcal{F}|_m$, а $\mathcal{G}|_{m+1} < \mathcal{F}|_{m+1}$.

Следующее утверждение показывает, что для доказательства минимальности некоторого семейства $\mathcal{F}$ достаточно рассмотреть только исключительные относительно $\mathcal{F}$ семейства.

Утверждение 7. *Если* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{G}$ — *идеалы* $\mathcal{M}(n,k)$, $|\mathcal{G}| = |\mathcal{F}|$ *и* $\mathcal{G}$ *не является исключительным относительно* $\mathcal{F}$, *то* $|\boxtimes\mathcal{G}| \geqslant |\boxtimes\mathcal{F}|$.

Доказательство. Напротив, предположим, что $|\boxtimes\mathcal{G}| < |\boxtimes\mathcal{F}|$. Тогда

$$|\boxtimes\mathcal{G}| = \sum_{A\in\mathcal{G}} s(A) = \sum_{m=0}^{n} m \cdot \mathcal{G}|_m < \sum_{m=0}^{n} m \cdot \mathcal{F}|_m = |\boxtimes\mathcal{F}|.$$

Отсюда следует, что существует такое m_1, что $\mathcal{G}|_{m_1} < \mathcal{F}|_{m_1}$. Выберем в качестве m_1 наибольшее из таких чисел. Так как $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$, найдётся такое m_2, что $\mathcal{G}|_{m_2} > \mathcal{F}|_{m_2}$, причём можно выбрать m_2 так, что $m_2 < m_1$, потому что в противном случае $\sum\limits_{m=0}^{n} m\mathcal{G}|_m > \sum\limits_{m=0}^{n} m\mathcal{F}|_m$. Из того, что при $m_2 < m \leqslant m_1$ идеал $\mathcal{G}$ не является m-исключительным относительно $\mathcal{F}$, следует, что если $\mathcal{G}|_{m_2} > \mathcal{F}|_{m_2}$, то $\mathcal{G}|_{m_1} \geqslant \mathcal{F}|_{m_1}$; противоречие выбору m_1. Утверждение 7 доказано.

Будем называть множество $A \in \mathcal{F}|_m$ *исключительным*, если выполнено одно из условий:

(a) не существует множеств $B \in \mathcal{F}|_{m+1}$, порождённых A;

(b) $A = \{1, 2, \ldots, p, p+2, p+3, \ldots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \ldots, a_{k-2}, a_k - 1, a_k\}$, где $a_{p+q} > p+q+1$, порождает только одно множество B по младшей координате, причём $\mathcal{F}$ содержит все множества $A_i = \{1, 2, \ldots, p+i, p+i+2, p+i+3, \ldots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \ldots, a_{k-1}, a_k + i\}$, $i = 1, 2, \ldots, q-1$.

Утверждение 8. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *идеал* $\mathcal{M}(n,k)$. *Если* $\mathcal{F}|_m$ *не содержит исключительных множеств, то существует инъективное отображение, ставящее в соответствие множествам из* $\mathcal{F}|_m$ *порождённые ими множества из* $\mathcal{F}|_{m+1}$.

Доказательство. Построим требуемое инъективное отображение. Будем рассматривать множества из $\mathcal{F}|_m$ по классам: сначала рассмотрим множества $A \in \mathcal{F}|_m$ с $s_l(A) = m$, затем — с $s_l(A) = m-1$, и т. д. Каждому рассматриваемому множеству поставим в соответствие порождаемое им множество, причём если текущее множество порождает два ещё не задействованных на предыдущих шагах множества из $\mathcal{F}|_{m+1}$, то поставим ему в соответствие множество, порождённое по младшей координате. В случае, когда одно из порождённых множеств уже задействовано, поставим в соответствие текущему множеству второе из порождённых множеств.

Покажем, что если $\mathcal{F}|_m$ не содержит исключительных множеств, то процесс построения отображения завершится успешно.

Если рассматриваемое множество A порождает множество A' по старшей координате, то $s_l(A) = s_l(A')$, и A' ещё не использовано на предыдущих шагах. Действительно, если A' порождается множеством $A'' \in \mathcal{F}$ и по младшей координате, то $s_l(A'') = s_l(A') - 1$, т. е. множество A'' находится в следующем по порядку рассмотрения классе.

Таким образом, поскольку $\mathcal{F}|_m$ не содержит исключительных множеств первого типа, шаг процедуры построения инъективного отображения может оказаться неудачным только в случае, когда текущее множество A порождает только одно множество по младшей координате и это порождённое множество уже использовано на одном из предыдущих шагов. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что

$$A = \{1, 2, \ldots, p, p+2, p+3, \ldots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \ldots, a_k\},$$

где $a_{p+q} > p+q+1$, $a_{k-1} = a_k - 1$. Порождаемое A по младшей координате множество

$$\{1, 2, \ldots, p, p+1, p+3, p+4, \ldots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \ldots, a_k\}$$

уже использовано на предыдущих шагах, значит, $\mathcal{F}$ содержит множество, порождающее его по старшей координате, т. е.

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, p+1, p+3, p+4, \ldots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \ldots, a_{k-1}, a_k + 1\}.$$

Если $q > 2$, то A_1 порождает два множества, и поскольку выбрано порождённое по старшей координате, порождённое по младшей координате задействовано на предыдущем шаге, следовательно, порождающее его по старшей координате множество

$$A_2 = \{1, 2, \ldots, p+2, p+4, p+5, \ldots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \ldots, a_{k-1}, a_k + 2\}$$

входит в $\mathcal{F}$. Продолжая таким образом, получим, что A — исключительное множество второго типа. Утверждение 8 доказано.

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{F}$ — идеал $\mathcal{M}(n,k)$, $\mathcal{F}'$ — семейство исключительных множеств из $\mathcal{F}|_m$. Тогда существует инъективное отображение из $\mathcal{F}|_m \setminus \mathcal{F}'$ в $\mathcal{F}|_{m+1}$.*

Теперь докажем необходимое условие исключительности относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$.

Утверждение 9. *Если $\mathcal{G}$ является m-исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, то $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m$ содержит одно исключительное множество первого типа B, причём $s_l(B) = k-2$, и не содержит исключительных множеств второго типа.*

Доказательство. Предположим, что $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m$ не содержит ни одного исключительного множества. Тогда по утверждению 8 и следствию 2 можно построить инъективное отображение из $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m$ в $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_{m+1}$, следовательно, $|(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_{m+1}| \geqslant |(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m|$. Чтобы показать, что $\mathcal{G}$ не является m-исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, осталось убедиться в том, что

$$|\mathcal{G} \cap \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| \geqslant |\mathcal{G} \cap \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m + (|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1} - \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m|).$$

Это неравенство получается применением к $\mathcal{C}_1(n,k)$ и $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k) \setminus \mathcal{C}_1(n,k)$ утверждения 6.

Таким образом, $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m$ содержит хотя бы одно исключительное множество. Предположим, что $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m$ содержит исключительное множество второго типа

$$B = \{1, 2, \ldots, p, p+2, p+3, \ldots, p+q, b_{p+q}, b_{p+q+1}, \ldots, b_{k-2},\\ n-m+p-1, n-m+p\},$$

где $b_{p+q} > p+q+1$. Покажем, что в этом случае не выполнено условие m-исключительности $\mathcal{G}$ относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $b_{p+q} = p+q+2$, $b_{p+q+1} = p+q+3$, $\ldots$, $b_{k-2} = k$. По определению исключительного множества второго типа и по определению идеала семейство $\mathcal{G}|_m$ содержит все множества вида

$$\{1, 2, \ldots, p+i,\ p+i+2, p+i+3, \ldots, p+q,\ b_{p+q}, b_{p+q+1}, \ldots, b_{k-2},\\ s, n-m+p+i\},$$

где $0 \leqslant i \leqslant q-1$, $p+q \leqslant j \leqslant k-2$, $b_{k-2} \leqslant s \leqslant n-m+p-1$. Обозначим семейство этих множеств через $\mathcal{G}'$. Заметим, что $p+q \leqslant k-1$, поскольку в противном случае $B \in \mathcal{C}_1(n,k)$. Если $p+q=k-1$, то при фиксированном i получаем $(n-m+p-1)-(p+q)=n-m-q-1$ различных множеств. Если $p+q<k-1$, то получаем, что при фиксированном i существует как минимум $(n-m+p-1)-k+k-(p+q)+1=n-m-q$ множеств. Таким образом, семейство $\mathcal{G}|_m$ содержит не менее $q(n-m-q-1)$ элементов. Поскольку $B \notin \mathcal{C}_1(n,k)$, выполнено $n-m+p>k+1$ и $p+q<k$, следовательно, $n-m-q-1 \geqslant 2$. Учитывая, что $q \geqslant 2$, имеем $\mathcal{G}|_m \geqslant 2(n-m-3)$. Заметим, что среди рассмотренных множеств вида

$$\{1,2,\ldots,p+i,\, p+i+2,\ldots,p+q,\, b_{p+q}, b_{p+q+1},\ldots,b_{k-2},\, s, n-m+p+i\}$$

нет исключительных, кроме множества B, поэтому по следствию 5 верно, что $\mathcal{G}|_{m+1} \geqslant 2n-2m-7$. Теперь рассмотрим семейство $\mathcal{G}' \cap \mathcal{C}_1(n,k)$, состоящее из q множеств вида

$$\{1,2,\ldots,p+i,p+i+2,p+i+3,\ldots,k,n-m+p+i\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant q-1.$$

Поскольку $n-m+p-1 \geqslant k$, семейство порождённых этими точками множеств состоит из $q+1$ элементов вида

$$\{1,2,\ldots,p+i,p+i+2,p+i+3,\ldots,k,n-m+p+i-1\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant q,$$

следовательно, $|\mathcal{G}|_{m+1}| \geqslant 2n-2m-6 \geqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}$, что противоречит m-исключительности $\mathcal{G}$.

Итак, семейство $(\mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))|_m$ содержит как минимум одно исключительное множество первого типа. Пусть это множество имеет вид

$$\{1,2,\ldots,p,a_{p+1},a_{p+2},\ldots,a_{k-2},\, n-m+p-1, n-m+p\}, \quad a_{p+1}>p+2.$$

Тогда $\mathcal{G}|_m$ содержит также исключительное множество

$$B=\{1,2,\ldots,p,p+3,p+4,\ldots,k,n-m+p-1,n-m+p\},$$

а следовательно, и все множества вида

$$\{1,2,\ldots,p,p+2,p+3,\ldots,p+q,p+q+2,p+q+3,\ldots,k,s,n-m+p\},$$

где $0 \leqslant q \leqslant k-p-2$, $k<s<n-m+p$. Заметим, что выполнены неравенства $n-m+p>k+2$ и $p \leqslant k-2$, так как $B \notin \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$.

Если $p<k-2$, то $\mathcal{G}|_m$ содержит ещё и множество

$$B'=\{1,2,\ldots,p,p+2,p+3,\ldots,k,n-m+p\},$$

и, таким образом,

$$|\,\mathcal{G}|_m\,| \geqslant (k-p-1)(n-m+p-1-k)+1 \geqslant 2(n-m-4)+1 = 2n-2m-7.$$

Покажем, что рассмотренные множества порождают не менее $2n-2m-6$ множеств в $\mathcal{G}|_{m+1}$. Так как все эти множества, кроме B, не являются исключительными, из утверждения 8 следует, что $|\,\mathcal{G}|_{m+1}\,| \geqslant 2n-2m-8$. Далее, из рассмотренных множеств лишь B' лежит в $\mathcal{C}_1(n,k)$, и это множество порождает два множества, поэтому по следствию 1 одно из этих порождённых множеств не использовано при построении инъективного отображения, и $|\,\mathcal{G}|_{m+1}\,| \geqslant 2n-2m-7$. Наконец, только одно из рассмотренных множеств — $\{1,2,\ldots,p,p+2,p+3,\ldots,k-1,k+1,n-m+p\}$ — лежит в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)\backslash\mathcal{C}_1(n,k)$, и оно также порождает два множества. Применяя следствие 2, получаем

$$|\,\mathcal{G}|_{m+1}\,| \geqslant 2n-2m-6 \geqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}|,$$

что противоречит m-исключительности $\mathcal{G}$.

Таким образом, m-исключительное относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ семейство $\mathcal{G}$ содержит единственное исключительное множество

$$B = \{1,2,\ldots,k-2,n-m+k-3,n-m+k-2\}.$$

Утверждение 9 доказано.

Утверждение 10. *Если $\mathcal{G}$ является m-исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, то*

$$0 \leqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m| \leqslant 1,$$

причём $\max\{n-2k,k-2\} \leqslant m \leqslant n-k-3$.

Доказательство. Докажем, что если m не удовлетворяет условию утверждения, то никакое семейство $\mathcal{G}$ не является m-исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$. Заметим, что величина $|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m|$ может принимать значения $-2,-1,0,1$ и 2 по следствию 4.

Пусть $\mathcal{G} \subseteq \binom{[n]}{k}$ — произвольное семейство, и пусть $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}\cap\mathcal{C}_1(n,k)$, $\widehat{\mathcal{G}}_1 = (\mathcal{G}\cap\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k))\backslash\mathcal{C}_1(n,k)$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}\backslash\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$. Поскольку всякое семейство, содержащее $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m$, содержит также и $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}$ и, следовательно, не является m-исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, достаточно рассмотреть случай $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m \not\subseteq \mathcal{G}$, т. е. $\mathcal{G}'|_m \neq \varnothing$. Не ограничивая общности, будем считать, что $|\,\mathcal{G}|_m\,| = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m|$.

Применяя следствие 5 к семейству $\mathcal{G}$, а затем используя следствие 2 и учитывая, что $\mathcal{G}|_m$ содержит не более одного исключительного множества, получаем

$$|\mathcal{G}'|_{m+1}| \geqslant |\mathcal{G}'|_m| - 1. \tag{1}$$

Поскольку для любого $A \in \binom{[n]}{k}|_m \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m$ существуют множества A_1 и A_1', для которых выполнено

$$A_1 \sqsubseteq A_1' \sqsubseteq A, A_1 \in \mathcal{C}_1(n,k)|_m, \quad A_1' \in (\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k) \setminus \mathcal{C}_1(n,k))|_m,$$

имеем $\mathcal{G}_1|_m \neq \varnothing$, $\widehat{\mathcal{G}}_1|_m \neq \varnothing$. Таким образом, к семействам $\mathcal{G}_1$, $\widehat{\mathcal{G}}_1$ применимо утверждение 6.

Пусть $|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m| = -2$. Из пп. (iii) и (iv) утверждения 6 следует, что $|\mathcal{G}_1|_{m+1}| \geqslant |\mathcal{G}_1|_m| - 1$ и $|\widehat{\mathcal{G}}_1|_{m+1}| \geqslant |\widehat{\mathcal{G}}_1|_m|$, поскольку $(\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k) \setminus \mathcal{C}_1(n,k))|_m \not\subseteq \mathcal{G}$. Отсюда и из (1) вытекает, что

$$|\mathcal{G}|_{m+1}| \geqslant |\ \mathcal{G}|_m\ | - 2 = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}|,$$

следовательно, $\mathcal{G}$ не m-исключительное.

Пусть $|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m| = -1$. В этом случае по следствию 4 выполняется $|\mathcal{C}_1(n,k)|_{m+1}| - |\mathcal{C}_1(n,k)|_m| = 0$, и из пп. (ii) и (iii) утверждения 6 следует, что $|\mathcal{G}_1|_{m+1}| \geqslant |\mathcal{G}_1|_m|$ и $|\widehat{\mathcal{G}}_1|_{m+1}| \geqslant |\widehat{\mathcal{G}}_1|_m|$. Отсюда и из (1) вытекает, что $|\mathcal{G}|_{m+1}| \geqslant |\mathcal{G}|_m| - 1 = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}|$, следовательно, $\mathcal{G}$ не является m-исключительным.

Пусть $|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m| = 2$, т.е. $m < k-2$. Поскольку $s_l(A) = k-2$ влечёт $s(A) \geqslant k-2$, никакое семейство $\mathcal{G}$ не удовлетворяет необходимому условию m-исключительности относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ в утверждении 9.

Таким образом, если $\mathcal{G}$ m-исключительное относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, то $0 \leqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_m| \leqslant 1$, поэтому $k-2 \leqslant m \leqslant n-k-3$. Осталось доказать, что $m \geqslant n-2k$. По утверждению 9 $\mathcal{G}|_m$ содержит исключительное множество $A = \{1,2,\ldots,k-2, n-m+k-3, n-m+k-2\}$, следовательно, $\mathcal{G}|_{m+1}$ содержит все множества вида $\{1,2,\ldots,k-2,s,n-m+k-3\}$, $k \leqslant s \leqslant n-m+k-4$, а также множество $\{1,2,\ldots,k-1,n-m+k-2\}$. Таким образом, $|\mathcal{G}|_{m+1}| \geqslant n-m-2$. Поскольку $\mathcal{G}$ — m-исключительное семейство относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, выполнено также

$$|\mathcal{G}|_{m+1}| < |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}| = 2k-1,$$

откуда и следует, что $m \geqslant n-2k$. Утверждение 10 доказано.

3. Оптимальные семейства

Теорема 3. *Семейство $\widehat{\mathcal{C}}_1(n, n/2)$ минимальное по двусторонней тени.*

Доказательство. Покажем, что никакое семейство $\mathcal{G} \subseteq \binom{[n]}{n/2}$ мощности $|\mathcal{C}_1(n, n/2)| = 2 - n + n^2/2$ не является исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n, n/2)$. При $k = n/2$ имеем

$$\left|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)\Big|_m\right| = \begin{cases} 2m+2 & \text{при } 0 \leqslant m \leqslant n/2-2, \\ 2n-2m-4 & \text{при } n/2-1 \leqslant m \leqslant n-3, \\ 1 & \text{при } m = n-2 \text{ и } m = n \end{cases}$$

и необходимое условие существования m-исключительного множества из утверждения 10 выполнено только при $m = n/2 - 2$. Так же, как и при доказательстве утверждения 10, достаточно рассмотреть случай

$$\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{n/2-2} \not\subseteq \mathcal{G}, \quad |\mathcal{G}|_{n/2-2}| = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{n/2-2}|.$$

Обозначим

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \cap \mathcal{C}_1(n,k), \quad \widehat{\mathcal{G}}_1 = (\mathcal{G} \cap \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)) \setminus \mathcal{C}_1(n,k), \quad \mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \widehat{\mathcal{C}}_1(n,k).$$

Пусть $|\mathcal{G}|_{n/2-2}| = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{n/2-2}|$. Заметим, что

$$|\mathcal{C}_1(n,k)|_{n/2-1}| = |\mathcal{C}_1(n,k)|_{n/2-2}| + 1$$

и $|\mathcal{G}_1|_{n/2-1}| \geqslant |\mathcal{G}_1|_{n/2-2}| + 1$ по п. (i) утверждения 6. По п. (iii) утверждения 6 выполнено $|\widehat{\mathcal{G}}_1|_{n/2-1}| \geqslant |\widehat{\mathcal{G}}_1|_{n/2-2}|$, поскольку $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{n/2-2} \not\subseteq \mathcal{G}$. Наконец, $\mathcal{G}|_{n/2-2}$ содержит не более одного исключительного множества по утверждению 9, и поэтому утверждение 8 даёт $|\mathcal{G}'|_{n/2-1}| \geqslant |\mathcal{G}'|_{n/2-2}| - 1$. Таким образом, $|\mathcal{G}|_{n/2-1}| \geqslant |\mathcal{G}|_{n/2-2}| = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{n/2-1}|$, и $\mathcal{G}$ не является исключительным относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ семейством. Теорема 3 доказана.

Обозначим через $\mathcal{R}_q(n,k)$ следующие семейства: $\mathcal{R}_0(n,k) = \varnothing$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{r+1}(n,k) = \mathcal{R}_r(n,k) \\ \cup \left\{ \max_{lex} \left\{ A \in \binom{[n]}{k} \setminus \mathcal{R}_r(n,k) \mid \mathcal{R}_r(n,k) \cup \{A\} \text{— идеал} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Если $k = 2$ и $q = (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-i) + r$, $0 \leqslant r \leqslant n-i-1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_q(n,k) = \big\{ \{a_1, a_2\} \mid 1 \leqslant a_1 \leqslant i, a_1 < a_2 \big\} \\ \cup \big\{ \{i+1, a_2\} \mid i+2 \leqslant a_2 \leqslant i+r+1 \big\}. \end{aligned}$$

Семейства $\mathcal{R}_q$ являются идеалами, изоморфными правому лексикографическому отрезку, и по теореме Краскала — Катоны они являются минимальными семействами по верхней тени.

Теорема 4. *Семейства $\mathcal{R}_q(n, 2)$ минимальны по двусторонней тени.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный идеал $\mathcal{M}(n, 2)$, $|\mathcal{F}| = q$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{R}_q(n, 2)$ и $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{R}_q(n, 2)| = s$. Убедимся, что существует последовательность преобразований, не увеличивающих характеристику $\sum\limits_{A \in \mathcal{F}} s(A)$, которая переводит $\mathcal{F}$ в $\mathcal{R}_q(n, 2)$. Для этого достаточно показать, что существует идеал $\mathcal{F}'$, для которого $|\mathcal{F}'| = q$, $|\boxtimes\mathcal{F}'| \leqslant |\boxtimes\mathcal{F}|$, $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{R}_q(n, 2)| = s - 1$.

Выберем максимальную точку A идеала $\mathcal{F}$ из $\mathcal{F} \setminus \mathcal{R}_q(n, 2)$. Такая точка существует, так как по определению идеала из того, что $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R}_q(n, 2)$ и $A \sqsubseteq B$, следует, что $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{R}_q(n, 2)$. Пусть $A = \{a_1, a_2\}$, $a_1 < a_2$. Ввиду того, что $A \notin \mathcal{R}_q(n, 2)$, из определения семейства $\mathcal{R}_q(n, 2)$ вытекает, что для множеств $B = \{b_1, b_2\}$, входящих в $\mathcal{R}_q(n, 2)$, верно $b_1 \leqslant a_1$. Учитывая, что $\mathcal{F}$ — идеал, и все множества $\{b_1, b_2\}$ такие, что $b_1 \leqslant a_1, b_2 \leqslant a_2$, входят в $\mathcal{F}$, получаем, что для любого множества $B = \{b_1, b_2\}$, входящего в $\mathcal{R}_q(n, 2) \setminus \mathcal{F}$, выполнено $b_2 > a_2$ и, следовательно, $s(B) \leqslant n - b_2 - 1 \leqslant s(A)$.

Выберем такое множество $B \in \mathcal{R}_q(n, 2) \setminus \mathcal{F}$, что $\mathcal{F} \cup \{B\}$ — идеал, и положим $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{B\} \setminus \{A\}$. Нетрудно видеть, что семейство $\mathcal{F}'$ обладает требуемыми свойствами. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Если $n \geqslant 13$, то $\widehat{\mathcal{C}}_1(n, 3)$ является минимальным по двусторонней тени семейством.*

Доказательство. Из утверждений 7, 9 и 10 вытекает, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть $(n-6)$-исключительные относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n, 3)$ семейства, содержащие исключительное множество первого типа $\{1, 6, 7\}$.

Заметим, что $|\widehat{\mathcal{C}}_1(n, 3)|_m|$ равно 2, 4, 5, 4, 2, 1, 1 соответственно при $m = 0, 1$, $2 \leqslant m \leqslant n-5$, $m = n-4, n-3, n-2, n$, а $|\mathcal{I}(\{1, 6, 7\})|_m|$ равно $5, 4, 3, 2, 1, 1$ соответственно при $m = n-6, n-5, n-4, n-3, n-2, n$.

Пусть $\mathcal{G}$ — $(n-6)$-исключительное семейство относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n, 3)$. Тогда $\mathcal{G}|_{n-5} \subseteq \mathcal{I}(\{1, 6, 7\})$, в частности, $\{2, 3, 5\} \notin \mathcal{G}$, поскольку

$$\mathcal{G}|_{n-5} < \widehat{\mathcal{C}}_1(n, 3)|_{n-5} = 5$$

и $\{1, 6, 7\} \in \mathcal{G}$. Следовательно, если $B \in \mathcal{G}$, $s_l(B) = 0$, то $B = \{2, 3, 4\}$.

Обозначим $\mathcal{F} = \big\{\{1, b_2, b_3\}, 1 < b_2 < b_3 \leqslant n\big\}$. Так как

$$|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{2} > |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,3)| = 5n - 16 \quad \text{при } n \geqslant 13$$

и $s(A) < n - 6 < s(\{2,3,4\}) = n - 4$ для любого $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{I}(\{1,6,7\})$, не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Заметим, что $\mathcal{F}$ изоморфно $\binom{[n-1]}{2}$. Действительно, множеству $\{1, b_2, b_3\}$ из $\mathcal{F}$ сопоставим $\{b_2 - 1, b_3 - 1\} \in \binom{[n-1]}{2}$. Ясно, что это отображение взаимно однозначно и $\{1, b_2', b_3'\} \sqsubseteq \{1, b_2'', b_3''\}$ тогда и только тогда, когда $\{b_2' - 1, b_3' - 1\} \sqsubseteq \{b_2'' - 1, b_3'' - 1\}$. Также заметим, что

$$s(\{1, b_2, b_3\}) = 1 + n - b_3 = 1 + s(\{b_2 - 1, b_3 - 1\}),$$

следовательно, идеалу $\mathcal{F}$ с минимальным весом соответствует минимальный идеал $\binom{[n-1]}{2}$, которым по теореме 4 является $\mathcal{R}_q(n,2)$. Несложно видеть, что соответствующее $\mathcal{R}_q(n,2)$ семейство в $\mathcal{F}$ есть $\mathcal{R}_q(n,3)$.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что верно неравенство $|\boxtimes\mathcal{R}_{5n-16}(n,3)| \geqslant |\boxtimes\widehat{\mathcal{C}}_1(n,3)|$. По определению

$$\mathcal{R}_{5n-16}(n,3) = \big\{\{1, b_2, b_3\} \mid 1 < b_2 \leqslant 6,\ b_2 < b_3 \leqslant n\big\} \\ \cup \big\{\{1, 7, b_3\} \mid 8 \leqslant b_3 \leqslant 11\big\},$$

следовательно,

$$\mathcal{R}_{5n-16}(n,3)|_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0, \\ 4 & \text{при } m = 1, \\ 5 & \text{при } 2 \leqslant m \leqslant n - 11, \\ 6 & \text{при } n - 10 \leqslant m \leqslant n - 7, \\ 5 & \text{при } m = n - 6, \\ 4 & \text{при } m = n - 5, \\ 3 & \text{при } m = n - 4, \\ 2 & \text{при } m = n - 3, \\ 1 & \text{при } m = n - 2 \text{ и } m = n \end{cases}$$

и $|\boxtimes\mathcal{R}_{5n-16}(n,3)| - |\boxtimes\widehat{\mathcal{C}}_1(n,3)| = 4n - 34 - 2n + 9 = 2n - 25 > 0$. Теорема 5 доказана.

Заметим, что при $10 \leqslant n \leqslant 12$ семейство $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,3)$ не является минимальным по двусторонней тени, так как размер его тени превышает размер тени семейства $\mathcal{R}_{5n-16}(n,3)$. При $n < 10$ семейство $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,3)$ минимально по двусторонней тени.

Теорема 6. *Если $n \geqslant \frac{1}{2}k^4$, то $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ — минимальное по двусторонней тени семейство.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ — m-исключительное относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ семейство, $|\mathcal{F}| = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|$ и $\mathcal{F}$ не является m'-исключительным при $m' < m$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $|\boxtimes\mathcal{F}| \geqslant |\boxtimes\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|$.

Заметим, что идеал, содержащий исключительное множество первого типа с весом $r < m$

$$A = \{1, 2, \ldots, p, p+3, p+4, \ldots, k, n-r+p-1, n-r+p\}, \quad p \leqslant k-3,$$

содержит также не входящие в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ исключительные множества

$$A_{u,v} = \{1, 2, \ldots, u, u+3, u+4, \ldots, k, v-1, v\},$$

где $p \leqslant u \leqslant k-3,\ k+3 \leqslant v \leqslant n-r+p$.

Заметим, что для любого числа w, $r \leqslant w \leqslant n-6$, можно подобрать u и v так, что $s(A_{u,v}) = w$. По утверждению 10 $m \leqslant n-6$, а по утверждению 9 $\mathcal{F}|_m$ не может содержать исключительное множество первого типа $A_{u,v}$. Следовательно, $\mathcal{F}$ не содержит исключительных множеств первого вида A, для которых выполнено $s(A) < m$ и $s_l(A) < k-2$.

Аналогично можно показать, что если $\mathcal{F}$ содержит исключительное множество A, $s(A) = r$, $s_l(A) = k-2$, то для всех u, удовлетворяющих условию $r \leqslant u \leqslant n-6$, $\mathcal{F}$ содержит исключительное множество веса u.

Пусть идеал содержит исключительное множество второго типа с весом $r < m$

$$A = \{1, 2, \ldots, p, p+2, p+3, \ldots, p+q, p+q+2, p+q+3, \ldots, k,\\ n-r+p-1, n-r+p\},$$

где $n-r+p \geqslant k+3$. Тогда этот идеал содержит также не входящие в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ исключительные множества второго типа

$$A_u = \{1, 2 \ldots, p, p+2, p+3, \ldots, p+q, p+q+2, p+q+3, \ldots, k, u-1, u\},$$

где $k+3 \leqslant u \leqslant n-r+p$. Заметим, что $s(A_u) = n-u+p$, и, поскольку $n-2k \leqslant m \leqslant n-k-3$ по утверждению 10, найдётся A_u такое, что $s(A_u) = m$. Следовательно, m-исключительное семейство $\mathcal{F}$ не содержит исключительных множеств второго типа с весом, меньшим m.

Таким образом, при $r < m$ семейство $\mathcal{F}|_r$ может содержать лишь одно не входящее в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ исключительное множество A, для которого выполнено $s_l(A) = k-2$. Более того, существует число r' такое, что $\mathcal{F}|_r$ содержит не входящее в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$ исключительное множество тогда и только тогда, когда $r' \leqslant r \leqslant n-5$.

Покажем, что $\mathcal{C}_1(n,k)|_m \not\subseteq \mathcal{F}|_m$. Поскольку $\mathcal{F}$ m-исключительное относительно $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, имеем

$$A = \{1, 2, \ldots, k-2, n-m+k-3, n-m+k-2\} \in \mathcal{F}.$$

Осталось заметить, что $|\,\mathcal{I}(A)|_{m+1}\,| = n-m-2 > k$, $|\,\mathcal{C}_1(n,k)|_{m+1}\,| = k$ и $|\mathcal{I}(A) \cap \mathcal{C}_1(n,k)|_{m+1}| = 2$. Следовательно,

$$|\,\mathcal{I}(A) \cup \mathcal{C}_1(n,k)|_{m+1}\,| \geqslant 2k-1 = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m+1}|.$$

Таким образом, $\mathcal{C}_1(n,k) \not\subseteq \mathcal{F}$, откуда следует, что $|\,\mathcal{F}|_0\,| = 0$.

Поскольку $|\mathcal{F}| = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|$, имеем

$$\sum_{i:|\mathcal{F}|_i| > |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|} (|\mathcal{F}|_i| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|) = \sum_{i:|\mathcal{F}|_i| < |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|} (|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i| - |\mathcal{F}|_i|). \quad (2)$$

Так как $\mathcal{F}$ не m'-исключительное при $m' < m$, для любого $m' < m$ неравенство $|\mathcal{F}|_{m'}| \leqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{m'}|$ влечёт при всех $i < m'$ выполнение $|\mathcal{F}|_i| \leqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|$. Поскольку $|\mathcal{F}|_0| = 0 < 2 = |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_0|$, существует такое $u \geqslant 0$, что

$$[0,u] \subseteq \{i \mid |\mathcal{F}|_i| < |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|\}, \quad [u+1,m] \subseteq \{i \mid |\mathcal{F}|_i| \geqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|\}.$$

Из утверждений 6, 8 и того факта, что при $r' \leqslant v \leqslant m$ семейство $\mathcal{F}|_v$ содержит ровно одно исключительное множество, не входящее в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, следует, что $|\mathcal{F}|_v| \leqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_v| + m - v$ при $r' < v \leqslant m$, а при $v \leqslant r'$ выполнено неравенство

$$|\mathcal{F}|_v| \leqslant |\mathcal{F}|_{v+1}| + |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_v| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_{v+1}|.$$

Также из утверждений 6, 8 и того факта, что если $|\mathcal{F}|_v| < |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_v|$, то $\mathcal{F}|_v$ содержит не более одного исключительного множества, не входящего в $\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)$, следует, что при $m \leqslant v \leqslant n-k-2$ верно $|\mathcal{F}|_v| \geqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_v| + m - v$, при $n-k-1 \leqslant v \leqslant 2n-2k-3-m$ верно $|\mathcal{F}|_v| \geqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_v| + v - 2n + 2k + 3 + m$ и при $2n-2k-3-m \leqslant v \leqslant n$ выполняется $|\mathcal{F}|_v| \geqslant |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_v|$.

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{u}(|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i| - |\mathcal{F}|_i|) \geqslant 2,$$

$$\sum_{i>m,\ |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|>|\mathcal{F}|_i|}(|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i| - |\mathcal{F}|_i|) \leqslant (k-2)(k-1).$$

Обозначим вторую сумму через $W(\mathcal{F})$. Так как выполнено (2), имеем

$$\sum_{i:|\mathcal{F}|_i|>|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|}(|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i| - |\mathcal{F}|_i|) \geqslant W(\mathcal{F}) + 2.$$

Рассмотрим мультимножество $Q(\mathcal{F})$, состоящее из чисел из множества $\{i \mid |\mathcal{F}|_i| > |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|\}$, в которое ровно $(|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i| - |\mathcal{F}|_i|)$ раз входит число i. Упорядочим элементы этого мультимножества по убыванию и обозначим через $L(\mathcal{F})$ его $(W(\mathcal{F})+2)$-й элемент, а через $Q'(\mathcal{F})$ — мультимножество элементов, имеющих номер, больший $(W(\mathcal{F})+2)$. Поскольку все элементы $Q'(\mathcal{F})$ превосходят u, имеем

$$\sum_{i\in Q'} i - \sum_{0<i\leqslant u} i(|\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i| - |\mathcal{F}|_i|) \geqslant 0,$$

а из неравенств, описывающих размер $\mathcal{F}|_v$ при $v < m$, следует оценка $L(\mathcal{F}) \geqslant m - W(\mathcal{F}) - 3$. Поэтому

$$\begin{aligned}
|\boxtimes\mathcal{F}| - |\boxtimes\mathcal{C}_1(n,k)| &= \sum_{i=0}^{n} i(|\mathcal{F}|_i| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|) \\
&= \sum_{i>m} i(|\mathcal{F}|_i| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|) + \sum_{u<i<m} i(|\mathcal{F}|_i| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|) \\
&+ \sum_{0<i\leqslant u} i(|\mathcal{F}|_i| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|) \geqslant -\max\{p \mid |\mathcal{F}|_p| < |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_p|\} \cdot W(\mathcal{F}) \\
&+ L(\mathcal{F})(2+W(\mathcal{F})) + \sum_{i\in Q'(\mathcal{F})} i + \sum_{0<i\leqslant u} i(|\mathcal{F}|_i| - |\widehat{\mathcal{C}}_1(n,k)|_i|) \\
&\geqslant -nW(\mathcal{F}) + (m - W(\mathcal{F}) - 3)(2 + W(\mathcal{F})) \\
&= (m - W(\mathcal{F}) - 3 - n)W(\mathcal{F}) + 2(m - W(\mathcal{F}) - 3) \\
&\geqslant (n - 2k - (k-1)(k-2) - 3 - n)(k-1)(k-2) \\
&\qquad + 2(n - 2k - (k-1)(k-2) - 3) \geqslant 2n - k^4 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Башов М. А.** Минимизация двусторонней тени в единичном кубе // Дискрет. математика. — 2011. — Т. 23, № 4. — С. 115–132.
2. **Ahlswede R., Aydinian H., Khachatrian L. H.** More about shifting techniques // Eur. J. Comb. — 2003. — Vol. 24. — P. 551–556.
3. **Clements G. F., Lindström B.** A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Comb. Theory. — 1969. — Vol. 7. — P. 230–238.
4. **Katona G. O. H.** A theorem of finite sets // Proc. Tihany Conf. — New York: Academic Press, 1966. — P. 187–207.
5. **Kruskal J.** The number of simplices in a complex // Mathematical optimization techniques. — Berkeley; Los Angeles: Univ. California Press, 1963. — P. 251–278.

Башов Максим Александрович,
e-mail: max.bashov@gmail.com

Статья поступила
8 января 2012 г.