ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2012. Том 19, № 6. С. 37–48

УДК 519.178

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧ О РАСКРАСКЕ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Понятие граничного класса графов является полезным инструментом для анализа вычислительной сложности задач на графах в семействе наследственных классов. В предыдущих работах автора исследовались общие черты и особенности семейств граничных классов графов для задачи о вершинной k-раскраске и её «предельного варианта» — задачи о хроматическом числе. В данной работе эта проблематика рассматривается применительно к рёберному варианту задачи о раскраске. Оказывается, что любой класс, граничный для задачи о рёберной 3-раскраске, является граничным для задачи о хроматическом индексе. Вместе с тем, при любом $k > 3$ существует континуум классов графов, граничных для задачи о рёберной k-раскраске, каждый из которых не является граничным для задачи о хроматическом числе. Формулируется необходимое условие существования граничных классов графов для задачи о вершинной 3-раскраске, не являющихся граничными для задачи о хроматическом числе. По мнению автора, заключение этого условия никогда не выполняется, поэтому таковых классов вовсе не существует.

Ключевые слова: вычислительная сложность, граничный класс графов, задача о раскраске.

Введение

В работе продолжено изучение границы между «простыми» и «сложными» классами графов для задач о раскраске в семействе наследственных классов графов, т. е. классов графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00107–а и 12–01–00749–а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракт 14.B37.21.0393), лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ и гранта Правительства РФ (11.G34.31.0057).

порождённых подграфов $\mathcal{S}$, при этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{S})$. Если $\mathcal{S}$ конечно, то класс $\mathcal{X}$ называется *конечно определённым.*

Пусть Π — какая-либо задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. На протяжении всей работы предполагается, что P$\neq$NP, и это условие не включается явно в формулировки утверждений. Например, если задача Π для графов из некоторого наследственного класса NP-полна, то этот класс Π-сложный.

Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ называется Π-*предельным*, если существует бесконечная последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ из Π-сложных классов графов такая, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным.* В [4] введено понятие граничного класса графов и доказано следующее утверждение, раскрывающее значение данного понятия.

Теорема 1. *Конечно определённый класс графов $\mathcal{X}$ Π-сложный тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ содержит какой-нибудь Π-граничный класс.*

Итак, известное множество Π-граничных классов графов позволяет полностью описать всё множество конечно определённых Π-простых классов графов. Однако на настоящее время такого описания не получено ни для одной задачи Π. Вместе с тем, возникающие при получении таких описаний трудности натолкнули автора на мысль о том, что для некоторых задач на графах множество граничных классов может быть весьма сложно устроенным, поэтому попытки дать его описание, по-видимому, обречены на неудачу. Эта мысль нашла своё подтверждение в том, что для обеих задач о 3-раскраске (вершинного и рёберного вариантов) в [2] выявлены континуальные множества граничных классов. Тем самым конструктивно доказано предположение из [5] о существовании задач на графах с бесконечным множеством граничных классов.

Исследование строения граничных классов графов для задач о раскраске продолжено в [3, 7], где рассмотрены задачи о вершинной k-раскраске и соответствующая «предельная» задача (задача о хроматическом числе). Напомним, что хроматическим числом графа G называется наименьшее число цветов, в которые можно покрасить вершины G так, что любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. В задаче о вершинной k-раскраске (задаче k-ВР) требуется определить, верно ли, что хроматическое число задаваемого графа G не больше фиксированного числа k. В задаче о хроматическом числе (задаче ХЧ) необходимо дать ответ на тот же вопрос при условии, что k задаётся вместе с гра-

фом G.

В центре внимания публикаций [3, 7] находятся общие и различные черты граничных классов графов для задач о k-раскраске и о хроматическом числе. В [7] для каждого $k > 3$ выявлена континуальная совокупность k-ВР-граничных классов графов, ни один из которых не является ХЧ-граничным. С другой стороны, в [3] найден ХЧ-граничный класс, который не является k-ВР-граничным ни при каком k.

Настоящая работа, в основном, посвящена сравнительному анализу семейств граничных классов графов для задач о рёберной k-раскраске и о хроматическом индексе. Напомним, что *правильной рёберной k-раскраской* (*рёберной k-раскраской*) графа G называется отображение $f : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ такое, что $f(e_1) \neq f(e_2)$ для любых смежных рёбер e_1 и e_2 графа G. Определения хроматического индекса графа G, задач о рёберной k-раскраске и о хроматическом индексе формулируются аналогично вершинному случаю.

В данной работе доказано, что любой 3-РР-граничный класс также и ХИ-граничный. Этот результат резко контрастирует с тем обстоятельством, что для любого $k > 3$ существует континуум k-РР-граничных классов, каждый из которых не ХИ-граничный. Обсуждаются трудности, препятствующие выявлению ХИ-граничного класса, не являющегося k-РР-граничным ни при каком k. Наконец, намечается путь к получению ответа на вопрос о существовании 3-ВР-граничных классов, не являющихся ХЧ-граничными (напомним, что ответ на данный вопрос не получен в [3, 7]). Именно, доказывается, что если такой класс существует, то он обязан содержать некоторый 4-ВР-граничный класс. Такое включение малоправдоподобно (по мнению автора), поэтому скорее всего класса $\mathcal{X}$ не существует.

В статье приняты следующие обозначения:

$[\mathcal{X}]$ — *наследственное замыкание* $\mathcal{X}$, т. е. множество всех графов, изоморфных порождённым подграфам графов из $\mathcal{X}$;

$\mathcal{T}$ — множество графов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями;

$\mathcal{D}$ — множество рёберных графов к графам из $\mathcal{T}$;

A_k $(k \geqslant 3)$ — граф с множеством вершин $\{x, y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$, в котором множества $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ и $\{y, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$ образуют две клики и имеются рёбра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$;

B_k $(k \geqslant 3)$ — граф с множеством вершин $\{x, y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, в котором множества $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}\}$, $\{y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ образуют три клики и имеются рёбра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots,$

$(x_{k-2}, y_{k-2}), (x, y_{k-1}), (y, y_k)$;

P_n — простой путь с n вершинами.

1. О мощности множества граничных классов графов для задачи о рёберной k-раскраске

Нам понадобятся некоторые преобразования графов, сохраняющие правильную рёберную k-раскрашиваемость. Пусть G — граф, в котором выбраны две вершины такие, что существует автоморфизм G, переводящий эти вершины друг в друга. Операция замены ребра $e = (a, b)$ графом G состоит в удалении e из некоторого графа с последующим отождествлением вершины a с одной из выбранных вершин графа G и вершины b — с другой выбранной вершиной графа G. Понятно, что граф, получаемый при замене ребра, не зависит от того, какая именно из выбранных вершин графа G отождествляется с вершиной a.

Пусть G — произвольный граф, $e = (a, b)$ — его ребро, $k \geqslant 3$. Обозначим через G'_e (G''_e) результат удаления из G ребра e, добавления вершин a', b' и рёбер $(a, a'), (a', b'), (b', b)$ и замены ребра (a', b') графом A_k (B_k), в котором выбранными вершинами являются две вершины степени $k-1$ графа A_k (B_k).

Лемма 1. *Произвольный граф G рёберно k-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда для произвольного его ребра $e = (a, b)$ таковыми являются графы G'_e и G''_e.*

Доказательство. Нетрудно построить k-раскраску рёбер каждого из графов G'_e и G''_e по k-раскраске рёбер графа G. Приведём её построение для более сложного случая — графа G''_e, а построение для G'_e оставим читателю. Рассмотрим два экземпляра клики с k вершинами, в каждом из которых вершины пронумеруем числами от 1 до k. Раскрасим рёбра каждого из экземпляров правильным образом так, что рёбра обеих клик, инцидентные парам вершин с одинаковыми наборами номеров, имеют одинаковые цвета. Для каждого номера i имеется цвет col_i, который не входит в раскраску рёбер, инцидентных вершинам с номером i. Поэтому существует k-раскраска рёбер графа H, получаемого добавлением всех рёбер, инцидентных вершинам и имеющих одинаковые номера. Выберем ребро (x, y) графа H, принадлежащее одной из k-клик, и удалим его из H. Обозначим цвет ребра (x, y) в k-раскраске рёбер графа H через col. Рассмотрим k-раскраску рёбер G, в которой e имеет цвет col (такая раскраска, очевидно, существует). Она порождает раскраску рёбер из $E(G''_e) \cap E(G)$. Окрасим рёбра (a, a') и (b', b) графа G''_e в цвет col. Заметим, что вершины из $V(G''_e) \setminus (V(G) \cup \{a, b\})$ порождают подграф,

изоморфный H, без ребра (x, y). Поэтому можно продолжить текущую частичную раскраску рёбер G''_e до некоторой его k-раскраски рёбер.

Докажем теперь, что в любой k-раскраске рёбер графов G'_e и G''_e рёбра (a, a') и (b', b) окрашены в одинаковые цвета. Отсюда будет следовать утверждение леммы. Предположим напротив, что существует правильная раскраска рёбер хотя бы одного из графов G'_e и G''_e в k цветов такая, что (a, a') и (b', b) окрашены в разные цвета col_1 и col_2.

Рассмотрим множество рёбер подграфа A_k (соответственно B_k) графа G'_e (соответственно G''_e), окрашенных в цвет col_1. Каждая вершина из $V(A_k) \setminus \{a'\}$ (соответственно $V(B_k) \setminus \{a'\}$) должна быть инцидентна некоторому ребру, окрашенному в цвет col_1 (это следует из того, что все вершины A_k (соответственно B_k) имеют в G'_e (соответственно G''_e) степень k, а ребро (b, b') окрашено в цвет $\mathrm{col}_2 \neq \mathrm{col}_1$). Значит, множество $V(A_k) \setminus \{a'\}$ (соответственно $V(B_k) \setminus \{a'\}$) должно содержать чётное число элементов; противоречие. Лемма 1 доказана.

Для произвольной двоичной последовательности π длины l назовём $\pi(k)$-*связкой* $(k \geqslant 3)$ граф, получаемый из простого пути P_{4l+2} заменами его рёбер. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ $2i$-е и $(4l + 2 - 2i)$-е рёбра этого пути заменяются графом A_k, если $\pi_i = 0$, или графом B_k, если $\pi_i = 1$. $\pi(k)$-*Преобразование* графа G состоит в замене каждого его ребра $\pi(k)$-связкой. Обозначим через $G_{\pi(k)}$ граф, получаемый $\pi(k)$-преобразованием графа G.

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Для любой конечной двоичной последовательности π граф $G_{\pi(k)}$ рёберно k-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда граф G рёберно k-раскрашиваем.*

Через $T_{\pi(s)}, s \geqslant 3$, (соответственно $T'_{\pi(s)}, s \geqslant 3$) будем обозначать граф, получаемый применением $\pi(s)$-преобразования к графу $K_{1,s}$ (соответственно $K_{1,3}$). Пусть π — бесконечная двоичная последовательность, а $\pi^{(l)}$ — подпоследовательность π, состоящая из l её первых членов. Через $\mathcal{T}_{\pi(s)}$ (соответственно $\mathcal{T}'_{\pi(s)}$) обозначим множество графов, каждая компонента которых является порождённым подграфом графа из $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\{T_{\pi^{(l)}(k)}\}$ (соответственно $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\{T'_{\pi^{(l)}(k)}\}$). Очевидно, что для любой бесконечной двоичной последовательности π справедливо включение $\mathcal{T}'_{\pi(s)} \subseteq \mathcal{T}_{\pi(s)}$, причём равенство имеет место только при $s = 3$.

Лемма 3. *Для любой бесконечной двоичной последовательности π*

при $k \geqslant 3$ класс $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ k-РР-предельный.

Доказательство. Известно, что всевозможные графы со степенями вершин не более k образуют k-РР-сложный класс [10] для любого $k \geqslant 3$. Обозначим через $\mathcal{X}_{\pi^{(l)}(k)}$ множество графов, получаемых применением $\pi^{(l)}(k)$-преобразования к таким графам. Отсюда и из леммы 2 следует, что для любого l задача k-РР NP-полна в классе $\mathcal{X}_{\pi^{(l)}(k)}$. Таким образом, при любом l класс $\mathcal{Y}^{(l)}_{\pi(k)} = \left[\bigcup\limits_{i=l}^{\infty} \mathcal{X}_{\pi^{(i)}(k)}\right]$ является k-РР-сложным. Очевидно, что $\mathcal{Y}^{(1)}_{\pi(k)} \supseteq \mathcal{Y}^{(2)}_{\pi(k)} \supseteq \ldots$ и $\mathcal{T}_{\pi(k)} = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \mathcal{Y}^{(l)}_{\pi(k)}$. Отсюда для любого $k \geqslant 3$ класс $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ k-РР-предельный. Лемма 3 доказана.

Вершину x некоторого графа G со степенями всех вершин не более k назовём *k-элиминируемой*, если выполнено одно из следующих условий:

(a) вершина x принадлежит компоненте связности графа G, изоморфной порождённому подграфу (возможно, несобственному) либо графа A_k, либо графа B_k, или же граф G содержит перешеек, при удалении которого x принадлежит компоненте связности с таким же свойством;

(b) имеется не более одного соседа x степени k.

Значение понятия k-элиминируемой вершины состоит в том, что G и результат удаления вершины x из G либо одновременно являются рёберно k-раскрашиваемыми графами, либо нет. В случае (a) это очевидно (следует из того, что A_k и B_k имеют рёберную k-раскраску и при удалении перешейка из графа со степенями всех вершин не более k его рёберная k-раскрашиваемость эквивалентна такой же раскрашиваемости каждой из соответствующих компонент), в случае (b) утверждение следует из леммы 4.

Лемма 4 [11]. *Пусть вершина v некоторого графа G и все соседние с ней вершины имеют степени не более k, причём не более чем одна вершина из окрестности v имеет степень в точности k. Тогда если результат удаления вершины v из G является рёберно k-раскрашиваемым графом, то граф G рёберно k-раскрашиваемый.*

Хорошо известно, что многие NP-полные в общем случае задачи на графах становятся полиномиально разрешимыми для деревьев. Это же верно и для совокупностей графов, близких к деревьям по той или иной качественной или количественной мере. Иными словами, если для графов из некоторого класса эта мера медленно растёт (например, для каждого графа она ограничена сверху некоторой абсолютной константой), то можно ожидать, что рассматриваемая задача для таких классов бу-

дет эффективно разрешимой. Одной из даных мер является древесная ширина графов, которая определяется следующим образом. *k-Деревом* называется граф, который может быть получен из $(k+1)$-клики (считающейся простейшим k-деревом) по следующему рекурсивному правилу: «добавить к некоторому k-дереву G новую вершину и k рёбер, инцидентных новой вершине и вершинам какой-либо k-клики графа G». *Древесной шириной* графа называется минимальное k такое, что этот граф является подграфом (не обязательно порождённым) некоторого k-дерева. Многие задачи на графах оказываются эффективно разрешимыми для тех графов, у которых степени всех вершин и древесная ширина ограничены сверху некоторой наперёд заданной константой. Это же верно и для задачи k-РР.

Лемма 5 [6]. *Для любых фиксированных d, t задача k-РР полиномиально разрешима для совокупности графов, у которых степени всех вершин не превосходят d, а древесная ширина не превосходит t.*

Достаточное условие ограниченности древесной ширины даёт

Лемма 6 [8]. *Для любых графов $G_1 \in \mathcal{T}$ и $G_2 \in \mathcal{D}$ и натурального числа d существует натуральное число $C(d, G_1, G_2)$ такое, что древесная ширина каждого графа из $Free(\{G_1, G_2\})$ со степенями всех вершин не более d не превосходит $C(d, G_1, G_2)$.*

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{X}$ — k-РР-граничный класс. Тогда $\mathcal{X}$ обладает следующими двумя свойствами*:

(i) *либо $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, либо $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$;*

(ii) *если граф $G \in \mathcal{X}$ содержит k-элиминируемую вершину x, то существует граф $G' \in \mathcal{X}$, для которого G — порождённый подграф, а x не является k-элиминируемой*

Доказательство. Предположим напротив, что свойство (i) не выполняется. Пусть $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к k-РР-граничному классу $\mathcal{X}$ последовательность из k-РР-сложных классов графов. Поскольку ни один из графов, имеющих вершину со степенью $k+1$ и более, заведомо не является рёберно k-раскрашиваемым, можно считать, что при любом j степени всех вершин графов из $\mathcal{X}_j$ не превосходят k. Так как последовательность $\{\mathcal{X}_j\}$ сходится к $\mathcal{X}$, существуют j' и графы $G_1 \in \mathcal{T}, G_2 \in \mathcal{D}$ такие, что $\mathcal{X}_{j'} \subseteq Free(\{G_1, G_2\})$. Но из лемм 5 и 6 следует, что $\mathcal{X}_{j'}$ k-РР-прост. Поэтому в любой последовательности, сходящейся к $\mathcal{X}$, имеется k-РР-простой класс; противоречие с тем, что этот класс k-РР-граничный. Значит, предположение неверно.

Рассмотрим множество графов из $\mathcal{X}_i$, не имеющих k-элиминируемых вершин. Наследственное замыкание множества таких графов (обозначаемое через $\mathcal{X}'_i$) является k-РР-сложным классом. Вместе с тем, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}'_i = \mathcal{X}$, поскольку $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}'_i \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$, а $\mathcal{X}$ — k-РР-граничный класс. Значит, $\mathcal{X}$ — наследственное замыкание графов без k-РР-элиминируемых вершин. Тем самым для этого класса выполняется свойство (ii). Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Для любой бесконечной двоичной последовательности π существует k-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$, причём любой такой класс включает $\mathcal{T}'_{\pi(k)}$.*

Доказательство. Предельность класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ доказана в лемме 3. Значит, по определению граничного класса графов существует k-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$. Рассмотрим один из таких подклассов и обозначим его через $\mathcal{X}$. Поскольку $\mathcal{D} \nsubseteq \mathcal{T}_{\pi(k)}$ (значит, и $\mathcal{D} \nsubseteq \mathcal{X}$), по лемме 7 выполнено включение $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$. Поэтому при любом i граф $iK_{1,3}$ принадлежит $\mathcal{X}$.

Теперь докажем, что для любого i выполняется включение

$$\left[\bigcup_{j=1}^{\infty}\{iT'_{\pi^{(j)}(k)}\}\right] \subseteq \mathcal{X}.$$

Отсюда будет следовать, что $\mathcal{T}'_{\pi(k)} \subseteq \mathcal{X}$. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого j граф $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$ не принадлежит $\mathcal{X}$. Среди порождённых подграфов графа $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$, содержащих $iK_{1,3}$ в качестве порождённого подграфа и принадлежащих $\mathcal{X}$, выберем любой из максимальных по включению. Очевидно, что такой граф существует, обозначим его через G. Ясно, что $G \neq iT'_{\pi^{(j)}(k)}$. Существует вершина графа G такая, что её степень в графе G отлична от нуля и меньше её степени в графе $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$. Тогда данная вершина будет невисячей вершиной графа G, принадлежащей некоторому его порождённому подграфу A_k, либо некоторому его порождённому подграфу B_k. Легко проверить, что тогда данный подграф обязательно содержит k-РР-элиминируемую вершину x. Из леммы 7 следует, что в классе $\mathcal{X}$ существует граф G', в котором граф G является собственным порождённым подграфом, а вершина x не k-РР-элиминируемая. Удалим из G' все вершины, не принадлежащие $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$. Получившийся граф G'' принадлежит $\mathcal{X}$ (ввиду наследственности этого класса), причём x в нём не будет k-РР-элиминируемой (для

этого отметим, что на k-РР-элиминируемость вершины x в графе G' влияют только вершины, принадлежащие $V(iT'_{\pi^{(j)}(k)}) \cap V(G'))$. Тогда G — собственный порождённый подграф графа G'', поэтому граф G не максимальный по включению; противоречие. Таким образом, предположение о существовании графа $iT'_{\pi^{(j)}(k)}$ неверно. Лемма 8 доказана.

Итак, по лемме 8 каждый 3-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ включает класс $\mathcal{T}'_{\pi(3)} = \mathcal{T}_{\pi(3)}$. Поэтому для любой бесконечной двоичной последовательности π класс $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ 3-РР-граничный. По всей видимости, класс $\mathcal{T}_{\pi(s)}$ является s-РР-граничным для любого $s \geqslant 3$. Хотя этого показать не удаётся (из хода доказательства леммы 8 следует, что достаточно убедиться, что любой s-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(s)}$ включает множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{iK_{1,s}\}$), лемма 8 позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *При любом $k \geqslant 3$ множество граничных классов для задачи k-РР континуальное.*

Доказательство. Заметим, что для любых различных бесконечных двоичных последовательностей π_1 и π_2 не существует k-РР-граничного класса, одновременно являющегося подмножеством и $\mathcal{T}_{\pi_1(k)}$, и $\mathcal{T}_{\pi_2(k)}$. Действительно, по лемме 8 противное означает, что

$$\mathcal{T}'_{\pi_1(k)} \cup \mathcal{T}'_{\pi_2(k)} \subseteq \mathcal{T}_{\pi_1(k)} \cap \mathcal{T}_{\pi_2(k)},$$

что невозможно. Значит, поскольку множество бесконечных двоичных последовательностей континуально, множество k-РР-граничных классов при любом $k \geqslant 3$ также континуально. Теорема 2 доказана.

2. Сравнительный анализ семейств граничных классов графов для задач о раскраске

В теореме 2 установлено, что множество k-РР-граничных классов континуально. Данное утверждение помогает полностью ответить на поставленный во введении вопрос о существовании k-РР-граничных классов, не являющихся ХИ-граничными. Действительно, класс $\mathcal{T}_{\pi(3)}$ для любой бесконечной бинарной последовательности π является 3-РР-граничным. Вместе с тем, для любой такой последовательности π имеет место цепочка включений $\mathcal{T}_{\pi(3)} = \mathcal{T}'_{\pi(3)} \subset \mathcal{T}'_{\pi(4)} \subset \mathcal{T}'_{\pi(5)} \subset \ldots$, и любой k-РР-граничный подкласс класса $\mathcal{T}_{\pi(k)}$ включает $\mathcal{T}'_{\pi(k)}$. Далее показано, что любой 3-РР-граничный класс обязательно ХИ-граничный. Значит, для любой бесконечной двоичной последовательности π класс $T_{\pi(3)}$

ХИ-граничный. Отсюда в силу замеченного включения следует, что для любого $k \geqslant 4$ существует континуальное семейство k-РР-граничных классов графов, не являющихся граничными для задачи о хроматическом индексе.

Теорема 3. *Любой* 3-РР-*граничный класс является* ХИ-*граничным.*

Доказательство. Очевидно, что любой 3-РР-сложный класс является и ХИ-сложным. Значит, любой 3-РР-граничный класс обязательно будет ХИ-предельным. Покажем, что, на самом деле, любой такой класс $\mathcal{X}$ является ХИ-граничным. Предположим напротив, что существует ХИ-граничный класс $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \mathcal{Y}_3 \ldots$ — последовательность из ХИ-сложных классов, сходящаяся к классу $\mathcal{Y}$. При доказательстве леммы 7 показано, что каждый k-РР-граничный класс состоит из графов, степень каждой вершины которых не более k. Поскольку $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, таким свойством обладает и класс $\mathcal{Y}$ для $k = 3$. Заметим, что множество всех графов со степенями вершин не более 3 является конечно определённым классом. Это следует из того, что соответствующие запрещённые порождённые подграфы получаются добавлением к всевозможным графам с 4 вершинами x_1, x_2, x_3, x_4 ещё одной вершины y и рёбер $(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y), (x_4, y)$ (можно убедиться, что данных запретов ровно одинадцать). Поэтому существует i такое, что класс $\mathcal{Y}_i$ не содержит ни одного из данных 11 графов, т. е. состоит из графов со степенями вершин не более 3. Из известной теоремы Визинга [1] следует, что хроматический индекс каждого графа из $\mathcal{Y}_i$ не превосходит 4. Поэтому класс $\mathcal{Y}_j$ k-РР-прост для любых $k > 3$ и $j \geqslant i$. Следовательно, при любом $j \geqslant i$ класс $\mathcal{Y}_j$ 3-РР-сложный. Значит, класс $\mathcal{Y}$ 3-РР-предельный, поэтому класс $\mathcal{X}$ $(\mathcal{Y} \subset \mathcal{X})$ не может быть 3-РР-граничным; противоречие. Теорема 3 доказана.

К сожалению, пока не удаётся выявить примеров ХИ-граничных классов, не являющихся k-РР-граничными ни при каком k (напомним, что для вершинного варианта задачи о раскраске такой пример найден в [3]). По-видимому, получению таких примеров (или хотя бы неконструктивному доказательству их существования) неизбежно предшествует установление NP-полноты задачи ХИ для наследственного класса $\mathcal{X}$ такого, что при любом k графы из $\mathcal{X}$ со степенями вершин не более k образуют ХИ-простой класс. На настоящее время известно совсем немного случаев «труднорешаемости» задачи о хроматическом числе (см. обзор [9, 10]), и все они не удовлетворяют предложенному условию.

Напомним, что в [3, 7] остался открытым вопрос существования 3-ВР-граничных классов, не являющихся ХЧ-граничными. К сожале-

нию, ответ на него не получен и в этой работе. Однако сформулируем некоторое необходимое условие существования таких классов, и, возможно, с его помощью будет проще дать ответ на поставленный вопрос.

Теорема 4. *Для того чтобы* 3-ВР-*граничный класс* $\mathcal{X}$ *содержал собственный* ХЧ-*граничный подкласс* $\mathcal{Y}$, *необходимо, чтобы* $\mathcal{X}$ *содержал* 4-ВР-*граничный подкласс.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \mathcal{X}_3 \ldots$ и $\mathcal{Y}_1 \supseteq \mathcal{Y}_2 \supseteq \mathcal{Y}_3 \ldots$ — последовательности из 3-ВР- и ХЧ-сложных классов соответственно, сходящиеся к классам $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Покажем, что все классы $\mathcal{X}_i$ обязательно являются 4-ВР-сложными. Отсюда следует, что $\mathcal{X}$ — 4-ВР-предельный класс. Значит, $\mathcal{X}$ содержит 4-ВР-граничный подкласс.

Если существует 4-ВР-простой класс $\mathcal{X}_{i^*}$, то в бесконечной последовательности $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ имеется лишь конечное число 4-ВР-сложных членов. Поэтому при любом $j \geqslant i^*$ для произвольного графа $G \in \mathcal{X}_j$ за полиномиальное время от числа его вершин можно определить, верно ли, что хроматическое число G не меньше 5. Обозначим через $\mathcal{X}'_j$ всевозможные графы из $\mathcal{X}_{i^*+j}$, хроматическое число которых не превосходит 4. Нетрудно заметить, что для любого j задача 3-ВР для класса $\mathcal{X}_{i^*+j}$ полиномиально сводима к той же задаче для класса $\mathcal{X}'_j$, причём класс $\mathcal{X}'_j$ 4-ВР-прост. Поэтому при любом j класс $\mathcal{X}'_j$ является 3-ВР-сложным. Очевидно, что $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}'_j \subseteq \mathcal{X}$, и так как $\mathcal{X}$ — 3-ВР-граничный класс, это пересечение в точности равно $\mathcal{X}$. Поскольку $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, существует j^* такое, что $\mathcal{Y}_{j^*} \subseteq \mathcal{X}'_1$. Поэтому в последовательности $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots$ каждый член, начиная с j^*-го, состоит из графов с хроматическим числом не более 4. Это значит, что для каждого такого члена задачи ХЧ и 3-ВР полиномиально эквивалентны. Тем самым класс $\mathcal{Y}$ 3-ВР-предельный; противоречие с тем, что класс $\mathcal{X}$ 3-ВР-граничный. Значит, исходное предположение неверно. Теорема 4 доказана.

Автор считает, что никакой 3-ВР-граничный класс не может содержать 4-ВР-граничного подкласса, поэтому по теореме 4 любой такой класс обязательно будет ХЧ-граничным.

Автор благодарит анонимного рецензента за предложение уточнить понятие k-РР-элиминируемой вершины, облегчающее восприятие некоторых частей данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p-графа // Дискрет. анализ. — 1964. — Т. 3. — С. 25–30.

2. **Малышев Д. С.** Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 41–51.
3. **Малышев Д. С.** О пересечении и симметрической разности семейств граничных классов для задач о раскраске и о хроматическом числе // Дискрет. математика. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 75–78.
4. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 132. — P. 17–26.
5. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theor. Comput. Sci. — 2007. — Vol. 389. — P. 219–236.
6. **Bodlaender H. L.** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, languages, and programming (Tampere, 1988). Proc. — Berlin: Springer-Verl., 1988. — P. 105–118. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 317).
7. **Korpeilainen N., Lozin V. V., Malyshev D. S., Tiskin A.** Boundary properties of graphs for algorithmic graph problems // Theor. Comput. Sci. — 2011. — Vol. 412. — P. 3545–3554.
8. **Lozin V. V., Rautenbach D.** On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // Discrete Math. — 2004. — Vol. 18. — P. 195–206.
9. **Machado R., de Figueiredo C. M. H.** Complexity separating classes for edge-colouring and total-colouring // J. Braz. Comput. Soc. — 2011. — Vol. 17. — P. 281–285.
10. **Machado R., de Figueiredo C. M. H., Vuskovic K.** Chromatic index of graphs with no cycle with a unique chord // Theor. Comput. Sci. — 2010. — Vol. 411. — P. 1221–1234.
11. **Schrijver A.** Combinatorial optimization — polyhedra and efficiency. — Berlin: Springer-Verl., 2003. — 1882 p.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
29 декабря 2011 г.

Переработанный вариант —
24 марта 2012 г.