ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2012. Том 19, № 6. С. 23–36

УДК 519.8

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С МАКСИМИННЫМИ КРИТЕРИЯМИ ВАЛЬДА *)

В. А. Емеличев, В. В. Коротков

Аннотация. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля многокритериальной инвестиционной булевой задачи с максиминными критериями эффективности Вальда в случае, когда во всех пространствах параметров задачи задана одна и та же линейная норма l_1.

Ключевые слова: многокритериальная инвестиционная задача, парето-оптимальный инвестиционный портфель, эффективность портфеля, максиминный критерий Вальда, радиус устойчивости, устойчивость.

Введение

В [5] в результате проведённого параметрического анализа многокритериальной булевой задачи портфельной оптимизации Марковица с минимаксными критериями рисков Сэвиджа получены оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума в случае, когда в критериальном пространстве рисков задана чебышёвская норма l_∞, а в пространствах портфелей и состояний рынка — линейная норма l_1. Ниже устанавливаются нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля той же инвестиционной задачи Марковица, но с другими целевыми функциями, а именно, с максиминными критериями эффективности Вальда. При этом анализ устойчивости проводится в предположении, что во всех перечисленных выше пространствах параметров задачи задана одна и та же линейная норма l_1.

1. Постановка задачи

Рассмотрим многокритериальный дискретный вариант задачи управления инвестициями Марковица [12]. Для этого введём ряд обозначений:

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11К–095).

$N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — альтернативные инвестиционные проекты (активы);

N_m — возможные состояния рынка (рыночные ситуации, сценарии развития);

N_s — виды (показатели) эффективности инвестиционного проекта;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbb{E}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ — инвестиционный портфель, где $|X| \geqslant 2$, $\mathbb{E} = \{0, 1\}$, $0_{(n)} = (0, 0, \ \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если проект } j \text{ реализуется,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Существует несколько подходов к оценке эффективности инвестиционных проектов (NPV, NFV, PI и др.), по-разному учитывающих влияние неопределённости и риска (см., например, [1, 2, 4, 10]). Для любой пары $(i, k) \in N_m \times N_s$ эффективность инвестиционного портфеля x будем оценивать величиной $\sum\limits_{j \in N_n} e_{ijk} x_j$, где e_{ijk} — ожидаемая оценка эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$. В этом контексте исходными данными задачи является трёхмерная матрица E эффективности инвестиционных проектов размера $m \times n \times s$ с элементами e_{ijk} из $\mathbb{R}$.

На множестве инвестиционных портфелей X зададим векторную целевую функцию

$$f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s))^T,$$

компонентами которой являются *максиминные критерии Вальда* [3, 14]

$$f_k(x, E_k) = \min_{i \in N_m} E_{ik} x = \min_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \to \max_{x \in X}, \qquad k \in N_s,$$

где $E_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — k-е сечение матрицы $E = [e_{ijk}]$, $E_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$ — i-я строка этого сечения. Таким образом, следуя критерию Вальда, инвестор проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя эффективность портфеля $E_{ik} x$ в предположении, что рынок находится в самом невыгодном для него состоянии, а именно, когда эффективность минимальна. Очевидно, что подобный пессимистический подход в оценке рыночной ситуации целесообразно использовать только тогда, когда речь идёт о необходимости достижения гарантированного результата.

Под *многокритериальной инвестиционной булевой задачей* $Z^s(E)$, $s \geqslant 1$, с критериями Вальда будем понимать задачу поиска множества парето-оптимальных инвестиционных портфелей (множества Парето)

$$P^s(E) = \{x \in X \mid P^s(x, E) = \varnothing\},$$

где $P^s(x,E) = \{x' \in X \mid x' \underset{E}{\succ} x\}$, а символ $\underset{E}{\succ}$ означает бинарное отношение, задаваемое на множестве X формулой

$$x' \underset{E}{\succ} x \quad \Leftrightarrow \quad g(x',x,E) \geqslant 0_{(s)} \ \ \& \ \ g(x',x,E) \neq 0_{(s)}.$$

Здесь $g(x',x,E) = (g_1(x',x,E_1), g_2(x',x,E_2), \ \ldots, g_s(x',x,E_s))^T$,

$$g_k(x',x,E_k) = f_k(x',E_k) - f_k(x,E_k) = \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k}x' - E_{ik}x), \ k \in N_s.$$

Легко видеть, что в частном случае при $m = 1$ наша задача $Z^s(E)$ превращается в многокритериальную булеву задачу с линейными критериями (на максимум). Такой случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние рынка не вызывает сомнений.

В пространстве портфелей $\mathbb{R}^n$, состояний рынка $\mathbb{R}^m$ и в критериальном пространстве эффективности $\mathbb{R}^s$ зададим одну и ту же линейную норму l_1, т. е. положим

$$\|E_{ik}\| = \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|, \quad i \in N_m, \ k \in N_s,$$

$$\|E_k\| = \sum_{i \in N_m} \|E_{ik}\| = \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|, \quad k \in N_s,$$

$$\|E\| = \sum_{k \in N_s} \|E_k\| = \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} \sum_{k \in N_s} |e_{ijk}|.$$

Отсюда

$$\|E\| \geqslant \|E_k\| \geqslant \|E_{ik}\|, \quad i \in N_m, \ k \in N_s.$$

Кроме того, используя соотношения $E_{ik}x \geqslant -\|E_{ik}\|$, $k \in N_s$, очевидные при $x \in \mathbb{E}^n$, легко убедиться, что при любых портфелях x и x' верны неравенства

$$E_{i'k}x' - E_{ik}x \geqslant -\|E_k\|, \quad i, \ i' \in N_m, \ k \in N_s. \tag{1}$$

Следуя [6–9], *радиусом устойчивости инвестиционного портфеля* $x^0 \in P^s(E)$ назовём число

$$\rho^s(x^0,E) = \begin{cases} \sup \ \Xi, & \text{если } \ \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \ \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 \mid \forall E' \in \Omega(\varepsilon) \ (x^0 \in P^s(E+E'))\}$, $\Omega(\varepsilon) = \{E' \in \mathbb{R}^{m \times n \times s} \mid \|E'\| < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $P^s(E+E')$ — множество Парето возмущённой задачи $Z^s(E+E')$.

Тем самым радиус устойчивости задаёт предельный уровень возмущений исходных данных задачи (элементов матрицы E), которые сохраняют парето-оптимальность портфеля.

2. Вспомогательные утверждения

Для вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)^T \in \mathbb{R}^s$ введём оператор положительной срезки

$$a^+ = [a]^+ = (a_1^+, a_2^+, \ldots, a_s^+)^T,$$

где $a_k^+ = [a_k]^+ = \max\{0, a_k\}$, $k \in N_s$.

Лемма 1. *Пусть число γ и портфели x^0 и x таковы, что*

$$\|g^+(x^0, x, E)\| \geqslant \gamma > 0. \tag{2}$$

Тогда для каждой возмущающей матрицы $E' \in \Omega(\gamma)$ существует такой индекс $l \in N_s$, что выполняется неравенство $g_l(x^0, x, E_l + E'_l) > 0$.

Доказательство. От противного. Пусть существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega(\gamma)$, что

$$g_k\bigl(x^0, x, E_k + E_k^0\bigr) \leqslant 0, \quad k \in N_s. \tag{3}$$

Ввиду (1) для любого индекса $k \in N_s$ получаем

$$g_k\bigl(x^0, x, E_k + E_k^0\bigr) = \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} \bigl(E_{i'k}x^0 - E_{ik}x + E_{i'k}^0 x^0 - E_{ik}^0 x\bigr)$$
$$\geqslant g_k(x^0, x, E_k) - \bigl\|E_k^0\bigr\|.$$

Отсюда и из (3) имеем $g_k(x^0, x, E_k) \leqslant \bigl\|E_k^0\bigr\|$, $k \in N_s$. Поэтому

$$\|g^+(x^0, x, E)\| \leqslant \|E^0\| < \gamma,$$

так как $E^0 \in \Omega(\gamma)$; противоречие с (2). Лемма 1 доказана.

Методом от противного легко доказывается

Лемма 2. *Пусть $x^0 \in P^s(E)$, $\gamma > 0$. Если при любых возмущающей матрице $E' \in \Omega(\gamma)$ и портфеле $x \in X \setminus \{x^0\}$ найдётся индекс $l \in N_s$ такой, что $g_l\bigl(x^0, x, E_l + E'_l\bigr) > 0$, то x^0 — парето-оптимальный портфель возмущённой задачи $Z^s(E + E')$, т. е. $x^0 \in P^s(E + E')$ при $E' \in \Omega(\gamma)$.*

Лемма 3. *Пусть портфели x^0 и x различны, причём $x^0 \neq 0_{(n)}$. Тогда для любого вектора $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)^T \in \mathbb{R}^s$ с положительными компонентами*

$$\delta_k > g_k^+(x^0, x, E_k), \quad k \in N_s, \tag{4}$$

существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ с нормой

$$\|E^0\| = 2\|\delta\|, \tag{5}$$

что справедливо бинарное отношение $x \underset{E+E^0}{\succ} x^0$.

Доказательство. Достаточно построить такую возмущающую матрицу E^0 с сечениями E^0_k, $k \in N_s$, что выполняется равенство (5), а для каждого индекса $k \in N_s$ — неравенство

$$g_k\big(x^0, x, E_k + E^0_k\big) < 0. \tag{6}$$

Пусть $i(k) = \arg\min\limits_{i \in N_m} E_{ik}x^0$, $k \in N_s$. Рассмотрим два возможных случая (при фиксированном индексе $k \in N_s$).

Случай 1. Существует $p \in N_n$ такой, что $x^0_p = 1$ и $x_p = 0$. Используя компоненты вектора δ, зададим элементы e^0_{ijk} k-го сечения E^0_k возмущающей матрицы E^0 по правилу

$$e^0_{ijk} = \begin{cases} -2\delta_k, & \text{если } \ i = i(k), \ j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$E^0_{i(k)k}x^0 = -2\delta_k, \quad E^0_{i(k)k}x = 0,$$

$$E^0_{ik}x^0 = E^0_{ik}x = 0, \ i \in N_m \setminus \{i(k)\}, \quad \|E^0_k\| = 2\delta_k, \ k \in N_s.$$

Отсюда получаем (5) и равенства

$$f_k\big(x^0, E_k + E^0_k\big) = \min\big\{\big(E_{i(k)k} + E^0_{i(k)k}\big)x^0, \min_{i \neq i(k)} \big(E_{ik} + E^0_{ik}\big)x^0\big\}$$
$$= f_k(x^0, E_k) - 2\delta_k,$$

$$f_k\big(x, E_k + E^0_k\big) = \min\{\big(E_{i(k)k} + E^0_{i(k)k}\big)x, \min_{i \neq i(k)} \big(E_{ik} + E^0_{ik}\big)x\} = f_k(x, E_k).$$

Поэтому, используя неравенства (4), имеем

$$g_k\big(x^0, x, E_k + E^0_k\big) = g_k(x^0, x, E_k) - 2\delta_k \leqslant g^+_k(x^0, x, E_k) - 2\delta_k < 0,$$

т. е. неравенство (6) справедливо.

Случай 2. Пусть $x^0 \leqslant x$. Тогда ввиду неравенств $x \neq x^0 \neq 0_{(n)}$ существует такая пара различных индексов $(p \times q) \in N_n \times N_n$, что $x^0_p = 0$, $x_p = 1$, $x^0_q = x_q = 1$. Вновь используя компоненты вектора δ, элементы e^0_{ijk} k-го сечения E^0_k возмущающей матрицы E^0 зададим по правилу

$$e^0_{ijk} = \begin{cases} -\delta_k, & \text{если } i = i(k), \ j = q, \\ \ \ \delta_k, & \text{если } i = i(k), \ j = p, \\ \ \ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее рассуждаем, как в случае 1. Лемма 3 доказана.

Матрицу $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $m \geqslant 2$, со столбцами $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ при $\gamma > 0$ назовём *γ-особой*, если

$$\min_{i\in N_m}(u_i + v_i) - \min_{i\in N_m} u_i < \gamma.$$

Лемма 4. *Всякая матрица $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $m \geqslant 2$, с нормой $\|W\| < 2\gamma$, где $\gamma > 0$, является γ-особой.*

Доказательство. Проведём индукцию по числу $m \geqslant 2$. Сначала докажем утверждение леммы при $m = 2$. Пусть $W = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$. Убедимся, что неравенство

$$\min\{u_1 + v_1, u_2 + v_2\} - \min\{u_1, u_2\} < \gamma \tag{7}$$

следует из $\|W\| < 2\gamma$, т. е. из

$$|u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2| < 2\gamma. \tag{8}$$

Не исключая общности, будем полагать, что

$$u_1 + v_1 \leqslant u_2 + v_2. \tag{9}$$

Здесь могут представиться два случая.

Случай 1: $u_1 \leqslant u_2$. Неравенство (7) ввиду (9) принимает вид $v_1 < \gamma$. Доказательство этого неравенства проведём от противного. Пусть $v_1 \geqslant \gamma$. Тогда из (9) следует, что $-u_1 + u_2 + v_2 \geqslant \gamma$, а из (8) — $|u_1| + |u_2| + |v_2| < \gamma$. Эти неравенства приводят к противоречию:

$$0 \leqslant |u_2| - u_2 + |v_2| - v_2 < -(u_1 + |u_1|) \leqslant 0.$$

Случай 2: $u_1 > u_2$. Тогда (7) согласно (9) превращается в неравенство $u_1 + v_1 - u_2 < \gamma$. Пусть, напротив,

$$u_1 + v_1 - u_2 \geqslant \gamma. \tag{10}$$

Тем самым, учитывая (9), имеем $v_2 \geqslant \gamma$, откуда в силу (8) получаем $|u_1| + |u_2| + |v_1| < \gamma$. Это неравенство вместе с (10) даёт противоречие:

$$0 \leqslant |u_1| - u_1 + |v_1| - v_1 < -(u_2 + |u_2|) \leqslant 0.$$

Далее будем предполагать, что при $m \geqslant 2$ утверждение леммы верно. Покажем, что матрица $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{(m+1)\times 2}$ с нормой $\|W\| < 2\gamma$

и столбцами $u = (u_1, u_2, \dots, u_{m+1})^T$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_{m+1})^T$ γ-особа. Положим $i_1 = \arg \min\limits_{i \in N_{m+1}} (u_i + v_i)$, $i_2 = \arg \min\limits_{i \in N_{m+1}} u_i$, и пусть индекс $h \in N_{m+1}$ таков, что

$$h \neq i_1, \quad h \neq i_2. \tag{11}$$

Через $W' \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ обозначим матрицу, полученную из W путём удаления строки с номером h. Тогда $\|W'\| \leqslant \|W\| < 2\gamma$, и по предположению индукции матрица W' является γ-особой, т. е. выполняется неравенство $\min\limits_{i \in N_{m+1} \setminus \{h\}} (u_i + v_i) - \min\limits_{i \in N_{m+1} \setminus \{h\}} u_i < \gamma$. Кроме того, учитывая (11), нетрудно убедиться, что справедливы равенства

$$\min_{i \in N_{m+1}} (u_i + v_i) = u_{i_1} + v_{i_1} = \min_{i \in N_{m+1} \setminus \{h\}} (u_i + v_i),$$

$$\min_{i \in N_{m+1}} u_i = u_{i_2} = \min_{i \in N_{m+1} \setminus \{h\}} u_i.$$

Следовательно, матрица W γ-особая. Лемма 4 доказана.

3. Оценки радиуса устойчивости

Для парето-оптимального портфеля x^0 задачи $Z^s(E)$ введём обозначение $\varphi = \min\limits_{x \in X \setminus \{x^0\}} \|g^+(x^0, x, E)\|$. Очевидно, что $\varphi \geqslant 0$.

Теорема 1. *При $m \geqslant 1$ для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, E)$, $s \geqslant 1$, любого парето-оптимального инвестиционного портфеля x^0 многокритериальной задачи $Z^s(E)$ справедливы оценки $\varphi \leqslant \rho^s(x^0, E) \leqslant 2\varphi$.*

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(E)$. Сначала докажем неравенство $\rho^s(x^0, E) \geqslant \varphi$, очевидное при $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ для любого портфеля $x \neq x^0$ справедливо неравенство

$$\|g^+(x^0, x, E)\| \geqslant \varphi.$$

Отсюда согласно лемме 1 верна формула

$$\forall E' \in \Omega(\varphi)\ \exists\, l \in N_s \quad (g_l(x^0, x, E_l + E'_l) > 0).$$

Поэтому в силу леммы 2 портфель x^0 остаётся парето-оптимальным в любой возмущённой задаче $Z^s(E + E')$, $E' \in \Omega(\varphi)$. Следовательно, $\rho^s(x^0, E) \geqslant \varphi$.

Далее убедимся в справедливости верхней оценки 2φ. Пусть $\varepsilon > 2\varphi$ и портфель $x^* \neq x^0$ таков, что

$$\|g^+(x^0, x^*, E)\| = \varphi. \tag{12}$$

Тогда подберём такой вектор $\delta \in \mathbb{R}^s$ с положительными компонентами

$$\delta_k > g_k^+(x^0, x^*, E_k), \quad k \in N_s, \tag{13}$$

что $\varphi < \|\delta\| < \varepsilon/2$. Отсюда по лемме 3 найдётся такая возмущающая матрица E^0 с нормой $\|E^0\| = 2\|\delta\|$, что

$$x^* \underset{E+E^0}{\succ} x^0, \quad E^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 2\varphi$ портфель $x^0 \in P^s(E)$ перестаёт быть парето-оптимальным портфелем возмущённой задачи $Z^s(E + E^0)$, $E^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Следовательно, $\rho^s(x^0, E) \leqslant 2\varphi$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Радиус устойчивости $\rho^s(x^0, E)$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$.*

Замечание 1. Нетрудно видеть, что при обосновании нижней оценки φ допустима принадлежность нулевого вектора $0_{(n)}$ множеству X. Отсутствие нулевого вектора необходимо лишь при установлении верхней оценки, поскольку доказательство неравенства $\rho^s(x^0, E) \leqslant 2\varphi$ основано на использовании леммы 3.

4. Достижимость нижней оценки

Теорема 2. *При $\varphi > 0$ и $m \geqslant 1$ существует такой класс многокритериальных инвестиционных задач $Z^s(E)$, $s \geqslant 1$, что для радиуса устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(E)$ любой задачи из этого класса справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, E) = \varphi.$$

Доказательство. Пусть портфель $x^* \neq x^0$ таков, что выполняется (12). Тогда при $\varepsilon > \varphi$ существует вектор $\delta \in \mathbb{R}^s$, компоненты которого удовлетворяют неравенствам (13) и $\varphi < \|\delta\| < \varepsilon$. Будем предполагать, что существует индекс $p \in N_n$ с условием $x_p^0 = 1$, $x_p^* = 0$. Далее рассмотрим возмущающую матрицу $E^0 = \left[e_{ijk}^0\right] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$, элементы любого k-го сечения E_k^0 которой зададим по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} -\delta_k, & \text{если } i = i(k),\ j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{14}$$

где $i(k) = \arg\min\limits_{i \in N_m} E_{ik}x^0$.

Тогда для каждого индекса $k \in N_s$ имеем

$$E_{i(k)k}^0 x^0 = -\delta_k, \quad E_{ik}^0 x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i(k)\},$$

$$E^0_{ik}x^* = 0,\ i \in N_m, \quad \left\|E^0_k\right\| = \delta_k, \quad \varphi < \|E^0\| = \|\delta\| < \varepsilon.$$

Отсюда с учётом (13) выводим

$$\begin{aligned} g_k\big(x^0, x^*, E_k + E^0_k\big) &= \min_{i \in N_m} \big(E_{ik} + E^0_{ik}\big)x^0 - \min_{i \in N_m} \big(E_{ik} + E^0_{ik}\big)x^* \\ &= g_k(x^0, x^*, E_k) - \delta_k \leqslant g^+_k(x^0, x^*, E_k) - \delta_k < 0, \quad k \in N_s. \end{aligned}$$

Следовательно, верно бинарное отношение $x^* \underset{E+E^0}{\succ} x^0$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > \varphi$ портфель $x^0 \in P^s(E)$ перестаёт быть парето-оптимальным портфелем возмущённой задачи $Z^s(E + E^0)$, $E^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Это значит, что $\rho^s(x^0, E) \leqslant \varphi$. Следовательно, в силу теоремы 1 радиус устойчивости парето-оптимального портфеля любой задачи введённого класса равен φ. Теорема 2 доказана.

Приведём числовой пример, иллюстрирующий теорему 2.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $n = 3$, $s = 2$, $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (0, 1, 1)^T$, $x^* = (1, 1, 0)^T$, $E \in \mathbb{R}^{2\times3\times2}$ — матрица с сечениями

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x^0, E) = (1, 1)^T$, $f(x^*, E) = (-3, -2)^T$, $p = 3$, $i(1) = 1$, $i(2) = 2$. Поэтому $x^0 \in P^2(E)$, $g^+(x^0, x^*, E) = (4, 3)^T$,

$$\varphi = \|g^+(x^0, x^*, E)\| = 7.$$

Если сечения E^0_1 и E^0_2 возмущающей матрицы E^0 задать согласно правилам (14)

$$E^0_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{pmatrix}, \quad \delta_1 > 4,\ \delta_2 > 3,$$

то легко убедиться, что

$$g_1\big(x^0, x^*, E_1 + E^0_1\big) = 4 - \delta_1 < 0 \quad \text{и} \quad g_2\big(x^0, x^*, E_2 + E^0_2\big) = 3 - \delta_2 < 0,$$

т. е. $x^0 \notin P^2(E + E^0)$. Отсюда и из соотношений $\|E^0\| = \delta_1 + \delta_2 > 7$, $x^0 \in P^2(E)$ следует, что $\rho^2(x^0, E) \leqslant 7$. Поэтому в силу теоремы 1 заключаем, что $\rho^2(x^0, E) = \varphi = 7$.

5. Достижимость верхней оценки

Теорема 3. *При $\varphi > 0$ и $m \geqslant 2$ существует такой класс мнококритериальных инвестиционных задач $Z^s(E)$, $s \geqslant 1$, что для радиуса устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(E)$ любой задачи из этого класса справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, E) = 2\varphi.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(E)$, $\varphi > 0$ и $m \geqslant 2$. Согласно теореме 1 достаточно построить класс задач $Z^s(E)$ с условием, что $\rho^s(x^0, E) \geqslant 2\varphi$. Покажем, что такой класс существует при $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 \in P^s(E)$, $x^* \neq x^0$. Непосредственно из определения числа φ следует равенство

$$\varphi = \|g^+(x^0, x^*, E)\|. \tag{15}$$

Будем предполагать, что все строки E_{ik}, $i \in N_m$, любого сечения E_k, $k \in N_s$, матрицы $E \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ одинаковы. Тогда, обозначив такую строку через e^*, имеем

$$g_k(x^0, x^*, E_k) = f_k(x^0, E_k) - f_k(x^*, E_k) = e^*(x^0 - x^*), \quad k \in N_s. \tag{16}$$

Учитывая это, из (15) получаем

$$\varphi = s[e^*(x^0 - x^*)]^+. \tag{17}$$

Далее будем полагать, что выполняются неравенства (a) $e^*(x^0 - x^*) > 0$ и (b) $x^0 \leqslant x^*$. Поэтому ввиду (17) имеем

$$e^*(x^0 - x^*) = \varphi/s. \tag{18}$$

Пусть $E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ — произвольная матрица с сечениями E'_k, $k \in N_s$. Тогда из (16) и (18) для любого индекса $k \in N_s$ вытекает соотношение

$$g_k(x^0, x^*, E_k + E'_k) = e^*(x^0 - x^*) - \zeta_k = \varphi/s - \zeta_k, \tag{19}$$

где

$$\zeta_k = \min_{i\in N_m} E'_{ik}(x^0 + \widehat{x}) - \min_{i\in N_m} E'_{ik}x^0, \quad k \in N_s, \tag{20}$$

$$x^0 + \widehat{x} = x^*. \tag{21}$$

Заметим, что $\widehat{x} \in \mathbb{E}^n$ в силу неравенств (b) и $x^0 \neq x^*$.

Пусть $E' = [e'_{ijk}] \in \Omega(2\varphi)$ — возмущающая матрица. Тогда существует хотя бы один такой индекс $l \in N_s$, что для l-го сечения E'_l матрицы E' справедливо неравенство $\|E'_l\| < 2\varphi/s$. Рассмотрим матрицу

$W = [u, v] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ со столбцами $u = E'_l x^0$ и $v = E'_l \widehat{x}$. Далее, введя для портфеля $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ обозначение $N(x) = \{j \in N_n \mid \ x_j = 1\}$, убеждаемся, что ввиду (21) справедливо равенство $N(x^0) \cap N(\widehat{x}) = \varnothing$. Отсюда легко выводим

$$\|W\| = \|E'_l x^0\| + \|E'_l \widehat{x}\| = \sum_{i\in N_m} \Big| \sum_{j\in N(x^0)} e'_{ijl} \Big| + \sum_{i\in N_m} \Big| \sum_{j\in N(\widehat{x})} e'_{ijl} \Big| \\ \leqslant \sum_{i\in N_m} \sum_{j\in N(x^*)} |e'_{ijl}| \leqslant \|E'_l\| < 2\varphi/s.$$

Поэтому в силу леммы 4 ($m \geqslant 2$) матрица W является φ/s-особой, т. е. согласно (20) выполняется неравенство $\zeta_l < \varphi/s$, которое вместе с (19) даёт $g_l(x^0, x^*, E_l + E'_l) > 0$.

На основании леммы 2 заключаем, что $x^0 \in P^s(E + E')$ при всякой возмущающей матрице $E' \in \Omega(2\varphi)$, т. е. $\rho^s(x^0, E) \geqslant 2\varphi$. Теорема 3 доказана.

Приведём числовой пример, иллюстрирующий теорему 3.

Пример 2. Пусть $m = 3$, $n = 3$, $s = 1$, $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (0, 1, 1)^T$, $x^* = (1, 1, 1)^T$,

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x^0 \leqslant x^*$, $\widehat{x} = (1, 0, 0)^T$, $N(x^0) \cap N(\widehat{x}) = \varnothing$, $f(x^0, E) = -1$, $f(x^*, E) = -2$. Поэтому $x^0 \in P^1(E)$, $\varphi = g(x^0, x^*, E) = 1$. Покажем, что $\rho^1(x^0, E) = 2$. Пусть $E' = [e'_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\|E'\| < 2\varphi = 2$, и пусть $W = [u, v]$ — матрица со столбцами $u = E'x^0$ и $v = E'\widehat{x}$. Тогда, повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 3, заключаем, что $\|W\| < 2$. Тем самым по лемме 4 матрица W 1-особая, и потому $g(x^0, x^*, E + E') > 0$, т. е. $x^0 \in P^1(E + E')$ при любой матрице $E' \in \Omega(2)$. Это значит, что $\rho^1(x^0, E) \geqslant 2\varphi = 2$. Следовательно, в силу теоремы 1 верно равенство $\rho^1(x^0, E) = 2$.

6. Случай линейных критериев ($m = 1$)

При $m = 1$ наша многокритериальная инвестиционная задача превращается в многокритериальную задачу линейного булева программирования, которую запишем в удобном для нас виде:

$$Z^s_B(E): \ Ex \to \max_{x\in X},$$

где $X \subseteq \mathbb{E}^n$, $E = [e_{kj}] \in \mathbb{R}^{s \times n}$ — матрица со строками $E_k = (e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kn}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in N_s$, при этом, как и ранее, в критериальном пространстве $\mathbb{R}^s$ и в пространстве решений $\mathbb{R}^n$ задана одна и та же линейная норма l_1. Следующий известный результат свидетельствует о том, что нижняя оценка радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля инвестиционной задачи $Z^s(E)$ превращается в формулу при $m = 1$.

Теорема 4 [8, 9]. *Для радиуса устойчивости парето-оптимального решения x^0 многокритериальной задачи линейного булева программирования $Z^s_B(E)$ справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, E) = \varphi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \|[E(x^0 - x)]^+\|.$$

Замечание 2. В [11] получена формула радиуса устойчивости парето-оптимального решения многокритериальной задачи линейного булева программирования $Z^s_B(E)$ при условии, что $X = \{x \in \mathbb{E}^n \mid Ax \leqslant b\}$, а возмущениям подвергались все параметры задачи, т. е. не только элементы матрицы E, но и элементы матрицы $A \in \mathbb{R}^{q \times n}$ и вектора $b \in \mathbb{R}^q$, при этом во всех пространствах варьирующих параметров $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^s$ и $\mathbb{R}^q$ задавалась одна и та же чебышёвская норма l_∞.

7. Условия устойчивости

Парето-оптимальный инвестиционный портфель $x^0 \in P^s(E)$ задачи $Z^s(E)$ назовём *устойчивым*, если $\rho^s(x^0, E) > 0$. Кроме того, введём множество инвестиционных портфелей задачи $Z^s(E)$, оптимальных по Смейлу [13]:

$$\mathrm{Sm}^s(E) = \{x \in X \mid \forall x' \in X \setminus \{x\} \ \exists l \in N_s \ \ (g_l(x, x', E_l) > 0)\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Sm}^s(E) \subseteq P^s(E)$ при любой матрице $E \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$. Кроме того, понятно, что множество $\mathrm{Sm}^s(E)$ может быть пустым.

Теорема 5. *Для инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(E)$ многокритериальной задачи $Z^s(E)$ следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $x^0 \in \mathrm{Sm}^s(E)$,

(ii) *портфель x^0 устойчив,*

(iii) $\varphi > 0$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Если $x^0 \in \mathrm{Sm}^s(E)$, то легко видеть, что $\xi(x) = \|g^+(x^0, x, E)\| > 0$ для любого портфеля $x \in X \setminus \{x^0\}$. Поэтому в силу теоремы 1 для радиуса устойчивости справедливы соотношения

$$\rho^s(x^0, E) \geqslant \varphi = \min\{\xi(x) \mid x \in X \setminus \{x^0\}\} > 0,$$

т. е. портфель x^0 устойчив.

(ii)⇒(iii). Эта импликация согласно следствию 1 очевидна.

(iii)⇒(i). Из определения числа φ непосредственно следует, что

$$\|g^+(x^0, x, E)\| \geqslant \varphi$$

для любого портфеля $x \neq x^0$. Поэтому ввиду того, что $\varphi > 0$, существует такой индекс $l \in N_s$, что $g_l(x^0, x, E_l) > 0$. Тем самым $x^0 \in \mathrm{Sm}^s(E)$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бронштейн Е. М., Качкаева М. М., Тулупова Е. В.** Управление портфелем ценных бумаг на основе комплексных квантильных мер риска // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 1. — С. 178–183.
2. **Бронштейн Е. М., Черняк Д. А.** Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов // Экономика и мат. методы. — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 21–28.
3. **Вальд А.** Статистические решающие функции // Позиционные игры. — М.: Наука, 1967. — С. 300–522.
4. **Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.** Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. — М.: Дело, 2008. — 1104 с.
5. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** Оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 41–50.
6. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** О радиусе устойчивости эффективного решения векторной квадратичной булевой задачи на узкие места // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 3–16.
7. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Анализ чувствительности эффективного решения векторной булевой задачи минимизации проекций линейных функций на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 24–43.
8. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гёльдера // Кибернетика и систем. анализ. — 2006. — № 4. — С. 175–181.
9. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 79–83.

10. **Царёв В. В.** Оценка экономической эффективности инвестиций. — СПб: Питер, 2004. — 464 с.
11. **Emelichev V., Podkopaev D.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming // Discrete Optimization. — 2010. — Vol. 7, N 1–2. — P. 48–63.
12. **Markowitz H. M.** Portfolio selection: efficient diversification of investments. — Oxford: Blackwell Publ., 1991. — 384 p.
13. **Smale S.** Global analysis and economics. V: Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — Vol. 1, N 3. — P. 213–221.
14. **Wald A.** Statistical decision functions. — New York: John Wiley, 1950. — 179 p.

Емеличев Владимир Алексеевич,
e-mail: emelichev@bsu.by,
emelichev@tut.by
Коротков Владимир Владимирович,
e-mail: wladko@tut.by

Статья поступила
13 января 2012 г.

Переработанный вариант —
11 февраля 2012 г.