ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2012. Том 19, № 6. С. 72–98

УДК 519.728

РАЗЛОЖЕНИЕ НЕДООПРЕДЕЛЁННЫХ ДАННЫХ *)

Л. А. Шоломов

Аннотация. Рассмотрена задача разложения недоопределённого источника произвольного вида в произведение источников, порождающих символы 0, 1 и неопределённый символ $*$, а также задача лучшего (в условленном смысле) приближённого разложения источника, если точное разложение невозможно. Показано, что для любого недоопределённого источника лучшее приближённое разложение существует и с точностью до некоторого отношения равносильности единственно (для разложимого источника оно является разложением). Описан полиномиальный алгоритм его построения. Изучены задачи, связанные с упрощением и равносильными преобразованиями разложений, предложены некоторые полиномиальные алгоритмы.

Ключевые слова: недоопределённый источник, информационная равносильность, разложение, нижняя аппроксимация, полиномиальный алгоритм.

Введение

Рассматриваются последовательности недоопределённых символов. С каждым таким символом связано некоторое множество полностью определённых символов, одним из которых он может быть замещён (доопределён). Считается, что последовательности порождаются источниками, генерирующими недоопределённые символы независимо с заданными вероятностями [6].

Изучается задача разложения недоопределённых источников X общего вида в произведение $X_1 \dots X_s$ источников, порождающих символы 0, 1 и $*$, где $*$ означает символ, доопределимый до 0 и 1. Источники, допускающие такое представление, называются *разложимыми*. В результате разложения каждый символ источника X заменяется набором длины s символов 0, 1 и $*$. Число доопределений этого набора равно 2^t, где t — число содержащихся в нём символов $*$. Поэтому разложимым

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН по программе «Информационные технологии и методы анализа сложных систем» (проект 1–1 «Теория и методы эффективного использования недоопределённых данных»).

может быть лишь источник, порождающий символы, у которых число доопределений равно степени двух. Чтобы ослабить это ограничение, источники в работе различаются с точностью до некоторого отношения равносильности.

Источники X и Y считаются (*информационно*) *равносильными*, если для любого источника Z произведения XZ и YZ имеют равную энтропию (определение энтропии недоопределённых источников см. далее). Равносильные источники могут быть переведены друг в друга добавлением и изъятием так называемых *мажорируемых символов* [5]. В задачах сжатия данных мажорируемые символы источника X не оказывают влияния на характеристики кодирования этого источника, а также источников XZ при любом Z, и в этом смысле могут рассматриваться как несущественные. Переход к равносильному источнику позволяет изменить число доопределений символов источника и расширить область существования разложений.

Тем не менее, даже ослабленная постановка задачи не гарантирует возможности разложения произвольных источников. В связи с этим рассматриваются приближения (аппроксимации) источников разложениями. Считается, что источник X *сильнее* Y (Y *слабее* X), если произведение XY равносильно X. Разложение $X_1 \ldots X_s$ аппроксимирует (снизу) источник X, если оно слабее X, и является самым сильным среди разложений, которые слабее X. В работе доказано, что для всякого источника существует разложение, аппроксимирующее его в указанном смысле (оно единственно с точностью до равносильности). Если источник разложим, то для него аппроксимирующее разложение является разложением. Было бы естественно рассматривать и аппроксимации сверху, определённые двойственным образом. Но они существуют не для всех источников, в связи с чем ограничимся только нижними аппроксимациями.

В работе найден эффективный (полиномиальный) алгоритм построения аппроксимаций для произвольных недоопределённых источников. Затем изучена задача упрощения разложений за счёт устранения из них некоторых источников. Построен эффективный алгоритм для выяснения возможности устранения заданного источника из разложения. На его основе получен эффективный алгоритм проверки равносильности двух различных разложений. Этот алгоритм позволяет узнавать, равносильны ли заданные разложения, но не даёт возможности их строить. В заключение представлена полная система равносильных преобразований, позволяющая по всякому разложению получить любое равносильное ему

разложение.

При описании в [5] информационно равносильных преобразований недоопределённых источников использовались функции специального вида на множестве недоопределённых символов (см. функциональное преобразование источников на с. 76 данной работы). Функции такого (и более общего) типа применялись в [1] для описания дискретных управляющих систем, свободных от состязаний, и были названы там минимальными точечными функциями. В данной статье при построении и упрощении разложений особую роль играют функции этого вида со значениями функций и значениями аргументов из множества $\{0, 1, *\}$. Такие функции изучались в [3] в контексте проблем полноты и выразимости, а в [4] рассматривались их формульные представления.

1. Недоопределённые источники и их преобразования

С множеством $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ свяжем алфавит $A_0 = \{a_i \mid i \in M\}$, символы которого будем называть *основными*. Каждому непустому подмножеству $T \subseteq M$ сопоставим символ a_T и через A обозначим алфавит всех символов a_T. Символы a_T будем называть *недоопределёнными*, и *доопределением* символа a_T считать всякий основной символ a_i, $i \in T$. Скажем, что символ $a_{T'}$ *чётче* символа a_T (a_T *размытее* $a_{T'}$), если $T' \subseteq T$. *Доопределением последовательности в алфавите* A назовём результат замены всех её символов некоторыми доопределениями, а *частичным доопределением* этой последовательности — результат замены её символов более чёткими. Символ a_M, доопределимый любым основным символом, будем называть *неопределённым* и обозначать через $*$.

Пусть задан источник X, порождающий символы $a_T \in A$ независимо с вероятностями $p_T \geqslant 0$, $\sum\limits_T p_T = 1$. Набор вероятностей $(p_T,\ T \subseteq M)$ обозначим через P и для источника X будем использовать обозначение (A, P). Такой источник будем называть *недоопределённым*, а при выполнении условия $p_T = 0$ для $a_T \notin A_0$ — *полностью определённым*. Зададимся некоторым набором вероятностей $Q = (q_i,\ i \in M)$ символов $a_i \in A_0$ ($q_i \geqslant 0$, $q_0 + \ldots + q_{m-1} = 1$) и введём функцию

$$\mathcal{H}(P, Q) = -\sum_{T \subseteq M} p_T \log \sum_{i \in T} q_i \tag{1}$$

(здесь и дальше логарифмы двоичные). *Энтропией недоопределённого источника* X назовём величину

$$\mathcal{H}(X) = \min_Q \mathcal{H}(P, Q). \tag{2}$$

В задаче кодирования источников [2] эта величина для недоопределённых источников играет роль, подобную той, какую для полностью определённых играет обычная энтропия (подробнее см. в [6]). Всюду в данной статье под источниками подразумеваются недоопределённые источники, а энтропия понимается в смысле (1)–(2).

Пусть выход источника $X = (A, P)$, $P = (p_T,\ T \subseteq M)$, подан на вход вероятностного преобразователя φ, который переводит символы алфавита A в символы (недоопределённые) алфавита $A' = \{a'_{T'}, T' \subseteq M'\}$ и описывается набором переходных вероятностей $p_{T'|T} = p(a_{T'}|a_T)$, $T \subseteq M$, $T' \subseteq M'$, $\sum\limits_{T'} p_{T'|T} = 1$. На выходе преобразователя реализуется источник $X' = (A', P')$, $P' = (p'_{T'},\ T' \subseteq M')$, где $p'_{T'} = \sum\limits_{T} p_T p_{T'|T}$. Этот источник будем обозначать через $X\varphi$. В произведении $X{\cdot}X\varphi = XX'$ пары $(a_T, a'_{T'})$ встречаются с вероятностями $p_{TT'} = p_T p_{T'|T}$.

Если наряду с $X = (A, P)$ задан источник $Y = (B, Q)$ и произведению XY соответствует совместное распределение p_{TU} пар (a_T, b_U), то преобразование $X' = X\varphi$ источника X может быть распространено на произведение XY равенством $(XY)\varphi = (X\varphi)Y = X'Y$, где в произведении $X'Y$ пары $(a'_{T'}, b_U)$ порождаются с вероятностями $p_{T'U} = \sum\limits_{T} p_{TU} p_{T'|T}$.

Опишем некоторые операции над недопределёнными источниками [5]. Операция *частичного доопределения источника* X заменяет некоторые символы источника более чёткими. Ей соответствует преобразование φ, в котором $A' = A$ и переходные вероятности $p_{T'|T}$ положительны лишь для $T' \subseteq T$. Будем рассматривать также операцию *размытия источника* X, осуществляющую замену некоторых символов более размытыми. Она соответствует преобразователю φ, в котором $A' = A$ и $p_{T'|T} > 0$ лишь для $T' \supseteq T$. Будем говорить, что источник X' *чётче* (*размытее*) источника X, если существует операция частичного доопределения (размытия) φ такая, что $X' = X\varphi$.

В данной работе будем в основном иметь дело с детерминированными преобразованиями $\varphi :\ A \to A'$. Они заменяют всякий символ a_T источника X на $\varphi(a_T)$. В терминах вероятностных преобразователей это означает, что $p_{T'|T} = 1$ для $a'_{T'} = \varphi(a_T)$ и $p_{T'|T} = 0$ для $a'_{T'} \in A' \setminus \{\varphi(a_T)\}$. В источнике $X\varphi$ символы $a'_{T'}$ порождаются с вероятностями

$$p'_{T'} = \sum_{T|\varphi(a_T)=a'_{T'}} p_T. \tag{3}$$

Частным случаем операции частичного доопределения является операция *исключения символа*, применимая к символу a_i источника

$X = (A, P)$, для которого $p_i = 0$ ($p_i = p(a_i)$), и производящая детерминированную замену символов a_T на $a_{T\setminus\{i\}}$. Ей соответствует преобразование φ, в котором $M' = M \setminus \{i\}$, $A' = \{a_{T'},\, T' \subseteq M'\}$, $p_{T'|T} = 1$ для $T' = T \setminus \{i\}$ и $p_{T'|T} = 0$ для $T' \neq T \setminus \{i\}$. Результатом является источник $X' = (A', P')$, где $p'_{T'} = p_{T'} + p_{T'\cup\{i\}}$, $T' \subseteq M'$.

Опишем ещё один тип преобразований источника $X = (A, P)$, $A = \{a_T \mid T \subseteq M\}$. Пусть $F : M \to L$, $L = \{0, 1, \ldots, l-1\}$ и с L связан алфавит $B = \{b_U,\, U \subseteq L\}$. Функция F индуцирует отображение алфавитов:

$$F : A \to B, \quad F(a_T) = b_{F(T)}, \quad F(T) = \{F(i),\, i \in T\},$$

и, в частности, отображение $F : A_0 \to B_0$, $F(a_i) = b_{F(i)}$, основных алфавитов. Детерминированное преобразование с входным и выходным алфавитами A и B, которое переводит символы a_T в $b_{F(T)}$, будем называть *функциональным.* Оно описывается переходными вероятностями $p_{F(T)|T} = 1$ и $p_{T'|T} = 0$ для $T' \neq F(T)$. При подаче на вход преобразователя выхода источника X на выходе преобразователя реализуется источник (B, P'), $P' = (p'_U, U \subseteq L)$, $p'_U = \sum\limits_{T:\, F(T)=U} p_T$, который будем обозначать через $F(X)$ и называть *функцией от источника* X. В произведении $X \cdot F(X)$ пары $(a_T, F(a_T))$ возникают с вероятностями p_T.

Если $|L| = |M|$ и функция $F : M \to L$ является биекцией, то источники X и $F(X)$ будем называть *идентичными.* Другими словами, источники идентичны, если значения на выходе одного из них получаются из значений на выходе другого некоторым переобозначением (без отождествления) основных символов. Очевидно, что если источники X и Y идентичны, то $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(Y)$.

2. Равносильность и адекватность источников

Будем говорить, что источники X и Y *равносильны* и писать $X \approx Y$, если для любого источника Z справедливо равенство [1)]

$$\mathcal{H}(XZ) = \mathcal{H}(YZ). \tag{4}$$

Понятие «равносильности» можно считать некоторым формальным уточнением понятия «информационной равноценности» источников.

Равносильные источники имеют равную энтропию. Действительно, из (4) при $Z = Y$ получаем $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(YY) = \mathcal{H}(Y)$ (здесь YY — произведение идентичных источников). Аналогично $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X)$, откуда

[1)] Когда говорится о взаимоотношении нескольких источников, считается, что для них задано совместное распределение. В частности, в данном определении предполагается заданным распределение для XYZ.

$\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(Y)$. Очевидно, что отношение равносильности транзитивно. Для него также выполнено свойство

$$X_1 \approx X_2,\ Y_1 \approx Y_2 \Longrightarrow X_1Y_1 \approx X_2Y_2, \qquad (5)$$

следующее из цепочки соотношений

$$\mathcal{H}(X_1Y_1Z) = \mathcal{H}(X_2Y_1Z) = \mathcal{H}(Y_1X_2Z) = \mathcal{H}(Y_2X_2Z).$$

Скажем, что источник Y *адекватен* источнику X, если он чётче X и равносилен X. Очевидно, что отношение адекватности транзитивно. Кроме того, из (5) следует, что если X_1 адекватен X_2 и Y_1 адекватен Y_2, то X_1Y_1 адекватен X_2Y_2.

Свойства адекватных источников изучены в [5], где имеются доказательства приводимых ниже четырёх утверждений.

Будем говорить, что символ a_i *мажорирует* в источнике $X = (A, P)$, $P = (p_T,\ T \subseteq M)$, символ a_j $(i, j \in M)$, если для любого $T \subseteq M$ такого, что $p_T > 0$, из вхождения $j \in T$ следует $i \in T$. Если a_j мажорируется некоторым a_i, то $p_j = 0$ и к источнику X применима операция исключения символа a_j. Отметим, что эта операция может рассматриваться также как частный случай операции функционального преобразования $F(X)$, где $F(j) = i$, $F(u) = u$ для $u \neq j$. В общем случае исключение символа не сводится к функциональному преобразованию.

Утверждение 1. *Исключение из источника мажорируемого символа приводит к адекватному источнику.*

Утверждение 2. *Если источник Y адекватен источнику X, то из X в результате последовательного исключения мажорируемых символов может быть получен источник, который чётче Y и адекватен X.*

Источник назовём *минимальным*, если не существует строго более чёткого адекватного ему источника.

Утверждение 3. *Минимальный адекватный X источник может быть получен из X последовательным исключением (в произвольном порядке) мажорируемых символов, пока они есть. Все минимальные адекватные X источники идентичны.*

Утверждение 3 даёт эффективный алгоритм построения минимального источника, адекватного заданному. Как обычно, эффективными считаются алгоритмы, завершающие работу за время, ограниченное полиномом от размера исходных данных.

Впредь будем понимать адекватность с точностью до идентичности, т. е., говоря об адекватности Y источнику X, будем подразумевать, что Y

идентичен некоторому источнику, адекватному X. При таком понимании можно говорить о единственности минимального источника, адекватного заданному. Из утверждения 3 следует, что этот источник может быть однозначно (с точностью до идентичности) определён как адекватный источник, имеющий минимальный по мощности основной алфавит. Его алфавит недоопределённых символов также имеет минимальную мощность.

Утверждение 4. *Источник X адекватен источнику XY тогда и только тогда, когда Y может быть получен из X применением операций функционального преобразования φ_1 и размытия φ_2, т. е представим в виде $Y = X\varphi_1\varphi_2$.*

В [5] преобразования источников изучались в связи с задачей повышения их чёткости. Поэтому там рассматривался лишь частный случай равносильности — адекватность. Построение адекватного источника сопровождается удалением мажорируемых символов. В данной работе чаще будет возникать ситуация, когда в результате преобразования будут появляться дополнительные мажорируемые символы.

Вернёмся от адекватности к свойству равносильности общего вида.

Лемма 1. *Источники X и Y равносильны тогда и только тогда, когда адекватные им миниальные источники $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ идентичны.*

Доказательство. 1. Покажем, что источники X и XY равносильны тогда и только тогда, когда источник X адекватен XY. При доказательстве в утверждении 4 того факта, что из адекватности X источнику XY следует, что Y может быть получен из X применением операций функционального преобразования и размытия, используется лишь соотношение (4) (см. доказательство теоремы 4 в [5]), и эти рассуждения могут быть перенесены на равносильность. Таким образом, из равносильности X и XY следует, что Y может быть получен из X операциями функционального преобразования и размытия. Обратно, если Y может быть получен указанным способом, то X адекватен источнику XY по утверждению 4 и, следовательно, равносилен ему. Это означает, что условие равносильности X источнику XY совпадает с условием адекватности.

2. Если $X \approx Y$, то $XY \approx XX \approx X$, и по доказанному в п. 1 источник X адекватен XY. Поэтому $\widehat{X}$ является минимальным источником, адекватным XY. Аналогично $\widehat{Y}$ является минимальным источником, адекватным XY. Из утверждения 3 вытекает, что $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ идентичны.

Обратно, если $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ идентичны, то с учётом того, что адекватные источники, а также идентичные источники равносильны, получаем $X \approx$

$\widehat{X} \approx \widehat{Y} \approx Y$. Лемма 1 доказана.

Из леммы следует, что понятия минимального равносильного и минимального адекватного источников совпадают. Поэтому всякому источнику соответствует единственный (с точностью до идентичности) минимальный равносильный источник, который может быть эквивалентно определён как равносильный источник с минимальным по мощности основным алфавитом.

Будем говорить, что источник X *не слабее* Y (Y *не сильнее* X), и записывать $X \gtrsim Y$ (соответственно $Y \lesssim X$), если $XY \approx X$.

Лемма 2. *Соотношение $X \gtrsim Y$ эквивалентно тому, что источник Y может быть получен из X применением операций функционального преобразования и размытия.*

Доказательство. Соотношение $X \gtrsim Y$ означает, что источники X и XY равносильны. В п. 1 доказательства леммы 1 установлено, что это эквивалентно адекватности X источнику XY. Остаётся воспользоваться утверждением 4. Лемма 2 доказана.

Укажем теперь некоторые свойства отношения $X \gtrsim Y$, которые понадобятся дальше.

Лемма 3.
(i) *Отношение $X \gtrsim Y$ транзитивно.*
(ii) *Если $X_1 \gtrsim X_2$ и $Y_1 \gtrsim Y_2$, то $X_1Y_1 \gtrsim X_2Y_2$.*
(iii) *Если $X \gtrsim X_1$ и $X \gtrsim X_2$, то $X \gtrsim X_1X_2$.*
(iv) *Для любых X и Y справедливо соотношение $XY \gtrsim X$.*
(v) *$X \approx Y$ тогда и только тогда, когда $X \gtrsim Y$ и $Y \gtrsim X$.*

Доказательство. Пусть в п. (i) имеют место соотношения $X \gtrsim Y$ и $Y \gtrsim Z$. Тогда из определения отношения $\gtrsim$ с учётом транзитивности $\approx$ выводим $XZ \approx (XY)Z = X(YZ) \approx XY \approx X$. Это означает, что $X \gtrsim Z$. П. (ii) получается применением соотношения (5):

$$(X_1X_2)(Y_1Y_2) = (X_1Y_1)(X_2Y_2) \approx X_1X_2.$$

П. (iii) вытекает из соотношений $X(X_1X_2) = (XX_1)X_2 \approx XX_2 \approx X$, а к утверждению п. (iv) приводят соотношения $(XY)X = (XX)Y \approx XY$.

В п. (v) если $X \gtrsim Y$ и $Y \gtrsim X$, то $XY \approx X$ и $XY \approx Y$, что с учётом транзитивности и симметрии отношения $\approx$ даёт $X \approx Y$. Обратно, если $X \approx Y$, то $X \approx XX \approx XY$ и, следовательно, $X \gtrsim Y$. Лемма 3 доказана.

Далее под алфавитом A источника (A, P) будем понимать множество символов a_T, для которых $p_T > 0$ (для источника XY алфавитом счита-

ется множество пар (a_T, b_U) с $p(a_T, b_U) > 0$). Под алфавитом A_0 основных символов источника (A, P) будем понимать множество символов a_i, являющихся доопределениями каких-либо символов из A.

Теорема 1. *Проверка соотношений $X \approx Y$ и $X \succsim Y$ осуществима со сложностью, ограниченной полиномом от размеров алфавитов основных и недоопределённых символов источников X и Y.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть соотношение $X \approx Y$. Пусть φ и ψ — преобразования, переводящие заданные источники X и Y в минимальные адекватные им. В силу детерминированности φ и ψ произведению XY однозначно соответствует произведение $(X\varphi)(Y\psi)$. Пусть (a_{T_s}, b_{U_s}), $s = 1, 2, \ldots, N$, — все различные пары (a_T, b_U), имеющие в $(X\varphi)(Y\psi)$ положительные вероятности $p(a_T, b_U)$. Положим $M_\varphi = \bigcup\limits_s T_s$ и $L_\psi = \bigcup\limits_s U_s$.

Для $i \in M_\varphi$ введём набор $\eta_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{iN})$, где η_{is} равны 1 и 0 в случаях $i \in T_s$ и $i \notin T_s$ соответственно. Поскольку в M_φ мажорируемых символов нет, все наборы η_i различны. Аналогично с каждым $j \in L_\psi$ свяжем набор $\xi_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{jN})$, определяемый принадлежностью j множествам U_s. Все наборы ξ_j также различны.

Легко видеть, что источники $X\varphi$ и $Y\psi$ идентичны тогда и только тогда, когда мощности множеств M_φ и L_ψ совпадают и для каждого $i \in M_\varphi$ имеется (единственное) $j \in L_\psi$, при котором $\eta_i = \xi_j$. Если обозначить это j через $F(i)$, то получим отображение $F : M_\varphi \to L_\psi$, задающее биекцию, участвующую в определении идентичности. Трудоёмкость описанной процедуры полиномиальна. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отношения $\approx$, $\succsim$ и их свойства фактически не зависят от величин ненулевых вероятностей и их нетрудно сформулировать в терминах взаимоотношения алфавитов источников X, Y и XY. Из доказательства теоремы 1 видно, что алгоритмы проверки этих свойств работают с алфавитами и не зависят от величин вероятностей.

3. Декомпозиция и аппроксимация

Пусть задан некоторый класс $\mathcal{S}$ источников. Источник $Y \in \mathcal{S}$ будем называть *нижней аппроксимацией* источника X в классе $\mathcal{S}$, если $Y \precsim X$ и для всякого $Z \in \mathcal{S}$ такого, что $Z \precsim X$, выполнено $Y \succsim Z$. Двойственно (заменой $\precsim$ на $\succsim$ и $\succsim$ на $\precsim$) определяется *верхняя аппроксимация*. В случае, когда аппроксимация Y (нижняя либо верхняя) существует, она определена однозначно с точностью до равносильности. Если, например, Y_1 и Y_2 — две нижние аппроксимации, то $Y_1 \succsim Y_2$ и $Y_2 \succsim Y_1$,

откуда $Y_1 \approx Y_2$ по п. (v) леммы 3. Очевидно также, что если $X \in \mathcal{S}$ и Y — аппроксимация X, то $Y \approx X$.

Скажем, что источник X *разлагается в произведение* источников $X_1, \ldots, X_k$, если $X \approx X_1 \ldots X_k$. Недоопределённый источник с алфавитом $\{0, 1, *\}$ будем называть *простым.* Источник X, который разлагается в произведение простых источников $X_1, \ldots, X_k$, назовём *разложимым*, а само произведение $X_1 \ldots X_k$ будем называть *разложением* X. Обозначим через $\mathcal{D}$ класс всех разложимых источников.

Теорема 2. *Всякий недоопределённый источник имеет нижнюю аппроксимацию в классе* $\mathcal{D}$.

Доказательство. Для заданного источника $X = (A, P)$ рассмотрим все различные отображения

$$F_i : A \to \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad N = 2^{|A|}.$$

Напомним, что под алфавитом A понимается множество символов a_T, для которых $p_T > 0$. Положим $Y_i = F_i(X)$ и образуем источник $Y = Y_1 \ldots Y_N$. Покажем, что Y является нижней аппроксимацией X в классе $\mathcal{D}$.

Из леммы 2 следует, что имеет место соотношение $X \gtrsim Y_i$. Отсюда, используя п. (iii) леммы 3, заключаем, что $X \gtrsim Y_1 \ldots Y_N = Y$.

Рассмотрим теперь произвольное произведение $Z = Z_1 \ldots Z_k$ такое, что $X \gtrsim Z$. Из п. (iv) леммы 3 и транзитивности отношения $\gtrsim$ вытекает, что $X \gtrsim Z_j$, $j = 1, \ldots, k$. В силу леммы 2 это означает, что источник Z_j может быть получен из X некоторым функциональным преобразованием F_j и размытием. Положим $Z'_j = F_j(X)$ и $Z' = Z'_1 \ldots Z'_k$. По лемме 2 выполнено $Z'_j \gtrsim Z_j$. С использованием п. (ii) леммы 3 это даёт $Z' \gtrsim Z$. Можно считать, что каждый источник Z'_j встречается в произведении Z' не более одного раза, поскольку $Z'_j Z'_j \approx Z'_j$. Все сомножители из Z присутствуют в Y и согласно п. (iv) леммы 3 выполнено $Y \gtrsim Z'$. Из $Y \gtrsim Z'$ и $Z' \gtrsim Z$ по транзитивности получаем $Y \gtrsim Z$. Теорема 2 доказана.

Верхние аппроксимации в классе $\mathcal{D}$ существуют не для всех источников, поэтому дальше будем вести речь только о нижних аппроксимациях, которые назовём просто *аппроксимациями.* Если источник Y аппроксимирует X (в классе $\mathcal{D}$), то всякое разложение $Y \approx Y_1 \ldots Y_s$ будем называть *аппроксимирующим разложением* источника X. Все аппроксимирующие разложения заданного источника X равносильны. Отметим, что если источник разложим, то аппроксимирующее разложение является его разложением.

4. Своде́ние к операциям над матрицами

Рассмотрим некоторое аппроксимирующее разложение (в частности, разложение) $X_1 \ldots X_s$ источника X. Каждому символу a_T алфавита A соответствует набор $\lambda_T = \left(\lambda_T^1, \ldots, \lambda_T^s\right)$ символов алфавита $\{0, 1, *\}$, порождаемых вместо него в произведении $X_1 \ldots X_s$. Аппроксимирующее разложение $X_1 \ldots X_s$ будем задавать $(s \times |A|)$-матрицей $\Lambda = \left\|\lambda_T^i\right\|$ с s строками $\lambda^i = \left(\lambda_T^i,\, a_T \in A\right)$, соответствующими источникам X_i, и $|A|$ столбцами λ_T. Столбцу λ_T приписана вероятность $p_T > 0$.

В соответствии с доказательством теоремы 2 можно считать, что аппроксимирующее разложение $X_1 \ldots X_s$ образовано источниками $X_i = F_i(X)$ при некоторых F_i. С отображением $F_i : M \to \{0, 1\}$ свяжем множество $W_i = \{j \in M \mid F_i(j) = 1\}$. Легко видеть, что элементами строки λ^i являются

$$\lambda_T^i = \begin{cases} 1, & \text{если } T \subseteq W_i, \\ 0, & \text{если } T \cap W_i = \varnothing, \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{6}$$

Эффективный способ построения аппроксимирующих разложений и соответствующих им матриц указан в разд. 6.

Задачи преобразования и упрощения аппроксимирующих разложений $X_1 \ldots X_s$ будем решать в более общей постановке — применительно к произвольным произведениям $X_1 \ldots X_s$ простых источников. Эти произведения будем называть *разложениями* и представлять матрицами $\Lambda = \left\|\lambda_j^i\right\|$, $\lambda_j^i \in \{0, 1, *\}$, с приписанными столбцам положительными вероятностями. При этом будем допускать произвольные матрицы над $\{0, 1, *\}$. Строкам λ^i, $i = 1, \ldots, s$, матрицы соответствуют источники X_i, а разложению $X_1 \ldots X_s$ — источник $X = X_1 \ldots X_s$, разложением которого оно является. Столбец λ_j матрицы содержит разложение символа a_T источника X, где T находится следующим образом. Если некоторым образом занумеровать все наборы множества $\{0, 1\}^s$ (например, числами, двоичными записями которых они являются), то T образовано номерами всех доопределений столбца λ_j.

Замечание 2. Поскольку при построении аппроксимирующих разложений могут возникнуть матрицы Λ с совпадающими столбцами, применительно к матрицам разложений также не будем исключать такой возможности. При совпадении нескольких столбцов в матрице разложения соответствующий им символ a_T источника X порождается с вероятностью, равной суммарной вероятности этих столбцов.

Будем рассматривать матрицы с фиксированными числом столбцов и набором положительных вероятностей, приписанных столбцам. Матрицы назовём *равносильными*, если соответствующие им разложения равносильны. Из леммы 1 и утверждения 3 следует, что понятие равносильности матриц не зависит от значений вероятностей. Для обозначения равносильности матриц будем применять символ $\approx$. На матрицы также распространим отношение $\succsim$, считая, что $\Lambda_1 \succsim \Lambda_2$, если $\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix} \approx \Lambda_1$, где через $\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix}$ обозначена матрица, полученная записыванием друг под другом строк матриц Λ_1 и Λ_2. Свойства отношений $\approx$ и $\succsim$, доказанные для источников, переносятся на матрицы.

Для $I \subseteq \{1, \ldots, s\}$ обозначим через Λ^I множество строк λ^i, $i \in I$, а также матрицу, составленную из этих строк. Множество строк Λ^I назовём *образующим*, если $\Lambda^I \approx \Lambda$. Из пп. (iv) и (v) леммы 3 можно заключить, что множеству I', $\{1, \ldots, s\} \supseteq I' \supseteq I$, также соответствует образующее множество $\Lambda^{I'}$.

Строку λ^i, $i \in I$, назовём *устранимой* из Λ^I, если $\Lambda^{I \setminus \{i\}} \approx \Lambda^I$. Из (5) вытекает, что если строка устранима из некоторого множества, то она устранима из всякого большего множества. Поэтому образующее множество может быть получено из строк матрицы Λ последовательным удалением устранимых строк.

Чтобы сформулировать условие устранимости строк, введём ряд понятий. Пусть $f(x_1, \ldots, x_s)$ — булева функция. Расширим функцию f на множество $\{0, 1, *\}^s$ недоопределённых наборов, положив $f(\alpha) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ равным σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, если на всех доопределениях набора α функция принимает одинаковое значение σ, и равным $*$, если на некоторых доопределениях она принимает разные значения. Распространим функцию f на $(s \times t)$-матрицу Λ, понимая под $f(\Lambda)$ набор значений функции f от столбцов Λ: $f(\Lambda) = (f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_t))$. Аналогично можно определить операцию $f(\Lambda^I)$, используя булеву функцию $f(x_i,\, i \in I)$.

Скажем, что строка λ^i *функционально выразима* через множество строк Λ^I, если существует булева функция f, для которой строка $f(\Lambda^I)$ чётче λ^i, т. е. может быть получена из λ^i частичным доопределением (заменой $*$ на 0 и 1).

Теорема 3. *Строка λ^i устранима из матрицы Λ^I тогда и только тогда, когда она функционально выразима через множество строк $\Lambda^{I \setminus \{i\}}$.*

Доказательство. Если X_u, $u \in I$, — некоторое множество источников, то через X_I будем обозначать источник, являющийся их произве-

дением.

Из п. 1 доказательства леммы 1 следует, что соотношение $X_I \precsim X_{I\setminus\{i\}}$ эквивалентно тому, что источник X_i может быть образован размытием источника $F(X_{I\setminus\{i\}})$ при некотором F. Поскольку основным алфавитом источника X_i является $\{0,1\}$, а основной алфавит источника $X_{I\setminus\{i\}}$ содержится в $\{0,1\}^{|I|-1}$, отображение F основных алфавитов представляет собой частичную булеву функцию. Она может быть доопределена до всюду определённой функции $f : \{0,1\}^{|I|-1} \to \{0,1\}$.

Применительно к матрицам отсюда заключаем, что $\Lambda^I \precsim \Lambda^{I\setminus\{i\}}$ равносильно тому, что существует булева функция f, для которой строка $f(\Lambda^{I\setminus\{i\}})$ чётче строки λ^i. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Множество строк Λ^I является образующим тогда и только тогда, когда все строки матрицы Λ функционально выразимы через Λ^I.*

5. Формулы над строками

Вычисление значения $f(\alpha)$, $\alpha \in \{0,1,*\}^s$, требует просмотра всех доопределений набора α, число которых может быть экспоненциальным. Поэтому алгоритмы, использующие такой способ вычисления f, неэффективны. Ниже описан подход, позволяющий работать непосредственно с элементами 0, 1 и $*$ без перехода к доопределениям.

Будем рассматривать формулы в базисе $\{\wedge, \vee, {}^{-}, 0, 1\}$ на трёхэлементном множестве $\{0,1,*\}$. Для этого обычные определения операций на $\{0,1\}$ дополним соотношениями

$$\begin{aligned} 0\wedge * = *\wedge 0 = 0, &\quad 1\wedge * = *\wedge 1 = *, \quad *\wedge * = *,\\ 1\vee * = *\vee 1 = 1, &\quad 0\vee * = *\vee 0 = *, \quad *\vee * = *, \end{aligned}$$

$$\bar{*} = *.$$

Можно проверить непосредственно, что при таком расширении операций на множество $\{0,1,*\}$ сохраняются все основные эквивалентности для базиса $\{\wedge, \vee, {}^{-}, 0, 1\}$ [8] за исключением $x\vee\bar{x} = 1$ и $x\wedge\bar{x} = 0$ (нарушаются при $x = *$), из-за отсутствия последних некоторые эквивалентные формулы булевой алгебры становятся неэквивалентными. Примером могут служить эквивалентные на $\{0,1\}$ формулы $x \vee y$ и $x \vee \bar{x}y$. На наборе $(*,1)$ первая из них равна 1, вторая обращается в $*$.

Пусть $\Phi(x) = \Phi(x_1, \ldots, x_s)$ — формула над $\{0,1,*\}$. Под *доопределением набора $\alpha \in \{0,1,*\}^s$ в формуле* Φ будем понимать двоичный набор $\dot{\alpha}$, длина которого равна числу вхождений переменных в формулу,

а компоненты соответствуют вхождениям. Если компонента соответствует переменной, принимающей в α булево значение, то она полагается равной этому значению, а если — переменной со значением $*$, то может быть произвольно назначена равной 0 или 1. Отметим, что разные вхождения одной и той же переменной в формулу могут доопределяться по-разному.

Для сравнения напомним, что при рассмотрении функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_s)$ над $\{0, 1, *\}$ доопределением набора $\alpha \in \{0, 1, *\}^s$ считается всякий набор $\dot{\alpha} \in \{0, 1\}^s$, полученный из α заменой каждого символа $*$ некоторым булевым элементом. Если функция $f(x)$ представлена формулой, то при вычислении $f(\dot{\alpha})$ все вхождения одной и той же переменной в ней доопределяются одинаково. При интерпретации символа $*$ как множества $\{0, 1\}$ значение $f(\alpha)$ представляет собой множество значений $f(\dot{\alpha})$ для всех доопределений набора α. Аналогом этого факта для формул является

Лемма 4. *Значение $\Phi(\alpha)$, вычисленное по формуле над $\{0, 1, *\}$, совпадает с множеством значений $\Phi(\dot{\alpha})$ для всех доопределений $\dot{\alpha}$ набора α в формуле Φ.*

Доказательство проводится индукцией по построению формулы, и его опускаем.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции над $\{0, 1, *\}$ от одних и тех же переменных. Будем говорить, что *функция f чётче функции g*, если для любого недоопределённого набора α значение $f(\alpha)$ чётче значения $g(\alpha)$. Это означает, что если $g(\alpha) = \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$, то и $f(\alpha) = \sigma$.

Лемма 5. *Если формула Φ реализует булеву функцию f, то на множестве $\{0, 1, *\}$ функция $f(x)$ чётче функции $\Phi(x)$.*

Доказательство. Пусть α — произвольный набор значений переменных функции f (над $\{0, 1, *\}$). Каждое его доопределение $\dot{\alpha}$ индуцирует доопределение в формуле Φ, которое также будем обозначать через $\dot{\alpha}$. Поскольку Φ реализует (на $\{0, 1\}$) булеву функцию f, $\Phi(\dot{\alpha}) = f(\dot{\alpha})$ и $f(\alpha)$ совпадает с множеством значений $\Phi(\dot{\alpha})$ для всех доопределений $\dot{\alpha}$ набора α. Оно включено в множество значений $\Phi(\dot{\alpha})$ для всех доопределений $\dot{\alpha}$ в формуле Φ, которое по лемме 4 даёт значение $\Phi(\alpha)$. Отсюда следует, что $f(x)$ чётче $\Phi(x)$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любой булевой функции f имеется реализующая её (на $\{0, 1\}$) формула Φ такая, что функции $f(x)$ и $\Phi(x)$ на $\{0, 1, *\}$ совпадают.*

Доказательство. В тривиальном случае, когда функция равна кон-

станте 0 или 1, можно использовать формулу, совпадающую с этой константой. Будем считать, что имеет место нетривиальный случай.

В силу леммы 5 достаточно установить существование формулы Φ, для которой $\Phi(x)$ чётче $f(x)$. Убедимся, что для этой цели может быть использована *сокращённая ДНФ* функции f. Напомним соответствующие понятия.

Конъюнкция K некоторых переменных булевой функции f или их отрицаний называется *импликантом* функции f, если для любого двоичного набора β значений переменных функции f такого, что $K(\beta) = 1$, выполнено $f(\beta) = 1$. Импликант называется *простым*, если при вычеркивании из него какой-либо переменной он перестаёт быть импликантом. Сокращённая ДНФ представляет собой дизъюнкцию всех простых импликантов.

Пусть $f(x)$ — булева функция и Φ — её сокращённая ДНФ. Покажем, что если на недоопределённом наборе α функция f принимает булево значение, то это же значение принимает формула Φ. Будем считать для простоты, что в наборе α булевы элементы предшествуют неопределённым, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_u, *, \ldots, *)$.

Если $f(\alpha) = 1$, то на всех доопределениях $\grave{\alpha}$ набора α булева функция f обращается в 1, а потому конъюнкция $x_1^{\alpha_1} \ldots x_u^{\alpha_u}$ является её импликантом. Вычеркиванием сомножителей из него может быть образован некоторый простой импликант K. Поскольку $K(\alpha) = 1$ и простой импликант K входит в состав сокращённой ДНФ для Φ, выполнено $\Phi(\alpha) = 1$.

Пусть теперь $f(\alpha) = 0$. Это означает, что на всех доопределениях $\grave{\alpha}$ набора α все конъюнкции ДНФ Φ равны 0. Каждая из них должна содержать хотя бы один сомножитель $x_i^{\bar{\alpha}_i}$, $i = 1, \ldots, u$, ибо иначе найдётся доопределение $\grave{\alpha}$, обращающее её в 1. Отсюда следует, что все эти конъюнкции, рассматриваемые на $\{0, 1, *\}$, на наборе α принимают значение 0, а потому $\Phi(\alpha) = 0$. Лемма 6 доказана.

Отметим, что сокращённая ДНФ является единственной минимальной по числу вхождений символов переменных ДНФ функции f (рассматриваемой на $\{0, 1, *\}$). Это следует из того, что всякий простой импликант должен присутствовать в минимальной ДНФ для f, ибо если, например, он имеет вид $x_1^{\alpha_1} \ldots x_u^{\alpha_u}$, то на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_u, *, \ldots, *)$ он и функция f обращаются в 1, а все остальные простые импликанты принимают значение 0 или $*$.

Тот факт, что функция над $\{0, 1, *\}$ представима сокращённой ДНФ и это представление является лучшим в классе ДНФ, приведён в [4] как

следствие теоремы, сформулированной без доказательства. На [4] (а затем на [1, 3]) я обратил внимание уже после завершения данного исследования и публикации его кратких результатов в [7].

Подобно тому, как это делалось для функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, определим результат применения заданной формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_s)$ к $(s \times t)$-матрице Λ, считая, что операция Φ выполняется над столбцами:

$$\Phi(\Lambda) = (\Phi(\lambda_1), \ldots, \Phi(\lambda_t)).$$

Аналогично определим $\Phi(\Lambda^I)$, используя формулу $\Phi(x_i,\, i \in I)$. Будем говорить, что строка λ^i *формульно выразима* через множество строк Λ^I, если существует формула Φ такая, что строка $\Phi(\Lambda^I)$ чётче λ^i.

Теорема 4. *Строка λ^i устранима из матрицы Λ^I тогда и только тогда, когда она формульно выразима через множество строк $\Lambda^{I\setminus\{i\}}$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 достаточно доказать, что строка λ^i функционально выразима через некоторое множество строк Λ^J тогда и только тогда, когда она формульно выразима через Λ^J.

Пусть строка λ^i выразима через Λ^J с помощью формулы Φ, т. е. $\Phi(\Lambda^J)$ чётче λ^i. Возьмём булеву функцию f, реализуемую Φ над $\{0, 1\}$, и рассмотрим её расширение на $\{0, 1, *\}$. В силу леммы 5 строка $f(\Lambda^J)$ чётче $\Phi(\Lambda^J)$ и, следовательно, чётче λ^i. Это означает её функциональную выразимость через Λ^J.

Обратно, если строка λ^i выразима через Λ^J с помощью функции f, то она выразима с помощью формулы Φ, гарантируемой леммой 6. Теорема 4 доказана.

Из этой теоремы и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Множество строк Λ^I является образующим тогда и только тогда, когда строки матрицы Λ формульно выразимы через Λ^I.*

6. Построение аппроксимаций

Доказательство теоремы 2 о существовании для произвольных недоопределённых источников аппроксимирующих разложений не даёт эффективного метода их нахождения. Этот раздел посвящён эффективному построению аппроксимирующих разложений. Понятия, связанные с аппроксимацией источника разложениями, фактически не зависят от величин ненулевых вероятностей p_T, приписанных его символам. Поэтому в качестве исходных данных источника можно рассматривать лишь

его алфавит A, образованный символами a_T, имеющими ненулевую вероятность p_T. Каждый символ a_T может быть задан указанием множества T, мощность которого не превышает мощности основного алфавита A_0. В связи с этим эффективными будем считать алгоритмы, полиномиальные относительно $|A|$ и $|A_0|$. Матрицу, задающую аппроксимирующее разложение, будем называть *матрицей аппроксимации*.

Дальше обозначение T (возможно с индексами) будем использовать только для множеств, которым соответствует символ a_T алфавита A. Такие множества будем называть *допустимыми*.

Теорема 5. *Существует эффективный алгоритм построения аппроксимации недоопределённого источника.*

Доказательство. Аппроксимирующее разложение, построенное в теореме 2, задаётся матрицей Λ, строки λ^i которой соответствуют всевозможным подмножествам $W_i \subseteq M$. Элементы λ^i_T строк λ^i находятся согласно (6). В обозначениях строк и элементов иногда вместо номера i множества W_i будем указывать само множество $W = W_i$, т. е. записывать λ^W и λ^W_T (обозначение T используется для допустимых множеств).

Построим квадратную $(|A| \times |A|)$-матрицу Λ_0, строки λ^T которой соответствуют всем допустимым множествам. Докажем, что множество строк Λ_0 является образующим для матрицы Λ. Для этого в соответствии с теоремой 4 достаточно показать, что все строки матрицы Λ формульно выразимы через Λ_0.

Возьмём произвольную строку λ^W. Если множество W не включает ни одного допустимого множества, то согласно (6) эта строка состоит из элементов $*$ и 0, допускает доопределение до нулевой строки и для её представления может быть использована формула 0.

Будем считать теперь, что W включает некоторое допустимое множество. Образуем строку

$$\lambda^{\square} = \bigvee_{T\colon T \subseteq W} \lambda^T.$$

Убедимся, что строка $\lambda^{\square}$ чётче λ^W.

Если при некотором T имеет место $\lambda^W_T = 1$, то $T \subseteq W$ и элемент $\lambda^{\square}_T$ строки $\lambda^{\square}$ содержит дизъюнктивно член λ^T_T. Учитывая, что $\lambda^T_T = 1$, получаем $\lambda^{\square}_T = 1$.

Если при некотором T_1 выполнено $\lambda^W_{T_1} = 0$, то $T_1 \cap W = \varnothing$ и, следовательно, $T_1 \cap T = \varnothing$ для любого T, включённого в W. При таких T элемент $\lambda^T_{T_1}$ равен 0 и $\lambda^{\square}_{T_1} = 0$ как дизъюнкция этих элементов.

Тем самым установлено, что строки матрицы Λ формульно выразимы через строки матрицы Λ_0. Отсюда $\Lambda_0 \precsim \Lambda$. Поскольку Λ задаёт матрицу аппроксимации исходного источника, и Λ_0 является его матрицей аппроксимации.

Очевидно, что сложность построения матрицы Λ_0 ограничена полиномом от мощности алфавитов A и A_0. Теорема 5 доказана.

Понятия, относящиеся к аппроксимациям, введены с точностью до равносильности источников. Поэтому для построения матрицы аппроксимации в соответствии с теоремой 5 может быть использован любой равносильный источник, например, минимальный. Равносильные друг другу источники могут обладать алфавитами разной мощности, вследствие чего формально построенные по ним матрицы аппроксимаций могут иметь разное число столбцов. На этот случай не распространяется введённое понятие равносильности матриц. Поэтому здесь следует действовать более аккуратно.

Пусть в результате преобразования φ источника X из него получен $X\varphi$. Равносильность этих источников означает, что по отношению к любому другому источнику они ведут себя одинаково (в смысле (4)). Поэтому $X\varphi$ следует рассматривать не сам по себе, а как сомножитель произведения $X \cdot X\varphi$. В случае детерминированного преобразования φ символы a_T переходят в $\varphi(a_T)$, и пары $(a_T, \varphi(a_T))$ порождаются с вероятностями p_T. Пусть при построении матрицы аппроксимации источника X используется некоторое упорядочение символов a_T алфавита A, т. е. в такой последовательности располагаются столбцы λ_T матрицы. При переходе к источнику $X\varphi$ символы a_T этой последовательности заменяются на $\varphi(a_T)$. Для построения матрицы аппроксимации источника $X\varphi$ следует использовать полученную последовательность. Один и тот же символ $\varphi(a_T)$ может встречаться в ней несколько раз и при построении матрицы методом теоремы 5 соответствующие столбцы совпадут. В интерпретации замечания 2 это означает, что вероятность порождения источником некоторого столбца равна сумме вероятностей, приписанных ему и совпадающим с ним столбцам в матрице. Это согласуется с (3). Матрицы аппроксимации для X и $X\varphi$ имеют одинаковое число столбцов $|A|$, и к ним применимы понятия, связанные с равносильностью.

Рассмотрим случай, когда в качестве $X\varphi$ используется минимальный для X источник $\widehat{X}$. Он находится однозначно (с точностью до идентичности) применением утверждения 3. Если $\widehat{M}$ — множество индексов основных символов источника $\widehat{X}$, то все допустимые множества $\widehat{T}$ для $\widehat{X}$ получаются из допустимых множеств T для X как $T \cap \widehat{M}$. Обозначим

через Λ_0 и $\widehat{\Lambda}_0$ матрицы аппроксимации источников X и $\widehat{X}$, построенные методом теоремы 5. В соответствии с вышесказанным строки матрицы $\widehat{\Lambda}_0$ соответствуют множествам $\widehat{T}$, а столбцы — множествам T. Элементы столбца с индексом T находятся согласно (6) при использовании вместо T множества $T \cap \widehat{M}$.

Приведём прямое доказательство факта равносильности матриц Λ_0 и $\widehat{\Lambda}_0$ с явным указанием равносильных преобразований, переводящих одну из них в другую.

Утверждение 5. *Матрицы аппроксимаций Λ_0 и $\widehat{\Lambda}_0$ исходного и минимального источников равносильны.*

Доказательство. 1. С допустимым множеством $\widehat{T}$ свяжем две системы допустимых множеств T:

$$\mathcal{T}_{\alpha,\widehat{T}} = \{T \mid T \cap \widehat{M} = \widehat{T}\}, \quad \mathcal{T}_{\beta,\widehat{T}} = \{T \mid T \cap \widehat{M} \subseteq \widehat{T}\}.$$

Пусть λ^T означает строку матрицы Λ_0, соответствующую допустимому множеству T. Каждому допустимому множеству $\widehat{T}$ сопоставим строку

$$\lambda^{\widehat{T},\Sigma} = \bigvee_{T \in \mathcal{T}_{\beta,\widehat{T}}} \lambda^T.$$

Обозначим через Λ_1 матрицу, полученную дописыванием к Λ_0 строк $\lambda^{\widehat{T},\Sigma}$ для всех допустимых $\widehat{T}$. Поскольку добавленные строки формульно выразимы через исходные, выполнено $\Lambda_1 \approx \Lambda_0$.

2. Покажем, что строка $\lambda^{\widehat{T},\Sigma}$ чётче каждой строки λ^T, $T \in \mathcal{T}_{\alpha,\widehat{T}}$. Для этого рассмотрим произвольный разряд $\lambda^T_{T_1}$ строки λ^T. Если $\lambda^T_{T_1} = 1$, то и $\lambda^{\widehat{T},\Sigma}_{T_1} = 1$, ибо разряд $\lambda^T_{T_1}$ входит дизъюнктивно в выражение для $\lambda^{\widehat{T},\Sigma}_{T_1}$.

Пусть теперь $\lambda^T_{T_1} = 0$. По построению матрицы Λ_0 это означает, что $T \cap T_1 = \varnothing$. Принимая во внимание равенство $\widehat{T} = T \cap \widehat{M}$, заключаем, что $\widehat{T} \cap (T_1 \cap \widehat{M}) = \varnothing$. Рассмотрим произвольное $T_2 \in \mathcal{T}_{\beta,\widehat{T}}$. Для него $T_2 \cap \widehat{M} \subseteq \widehat{T}$, а потому $(T_2 \cap \widehat{M}) \cap (T_1 \cap \widehat{M}) = \varnothing$. Покажем, что

$$(T_2 \setminus \widehat{M}) \cap (T_1 \setminus \widehat{M}) = \varnothing.$$

Предположим, что это не так и $j \in (T_2 \setminus \widehat{M}) \cap (T_1 \setminus \widehat{M})$. Существует $i \in \widehat{M}$ такое, что символ a_i мажорирует a_j. В соответствии с определением мажорирования $i \in T_2 \cap \widehat{M}$ и $i \in T_1 \cap \widehat{M}$. Это противоречит тому, что множества $T_2 \cap \widehat{M}$ и $T_1 \cap \widehat{M}$ не пересекаются. В результате установлено,

что $T_2 \cap T_1 = \varnothing$, а потому $\lambda_{T_1}^{T_2} = 0$. С учётом произвольности $T_2 \in \mathcal{T}_{\beta,\widehat{T}}$, взяв дизъюнкцию по T_2 членов $\lambda_{T_1}^{T_2}$, приходим к равенству $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma} = 0$.

Тем самым доказано, что строка $\lambda^{\widehat{T},\Sigma}$ чётче строки λ^T. Образуем матрицу Λ_2, строками которой являются все строки $\lambda^{\widehat{T},\Sigma}$. Эта матрица может быть получена из Λ_1 устранением строк λ^T, и, поскольку для каждой из них в Λ_2 имеется более чёткая строка, справедлива равносильность $\Lambda_2 \approx \Lambda_1$. Отсюда и из п. 1 доказательства получаем $\Lambda_2 \approx \Lambda_0$.

3. Убедимся теперь, что матрица Λ_2 совпадает с $\widehat{\Lambda}_0$. Для этого сравним соответствующие элементы $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma}$ и $\widehat{\lambda}_{T_1}^{\widehat{T}}$ матриц.

Если $\widehat{\lambda}_{T_1}^{\widehat{T}} = 0$, то $\widehat{T} \cap (T_1 \cap \widehat{M}) = \varnothing$. Отсюда, как в п. 2 доказательства, заключаем, что $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma} = 0$. Обратно, если $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma} = 0$, то для $T \in \mathcal{T}_{\alpha,\widehat{T}}$ элемент $\lambda_{T_1}^{T}$ матрицы Λ_0 равен 0, а потому $T \cap T_1 = \varnothing$. Следовательно, $\widehat{T} \cap (T_1 \cap \tilde{M}) = \varnothing$ и $\widehat{\lambda}_{T_1}^{\widehat{T}} = 0$,

Пусть теперь $\widehat{\lambda}_{T_1}^{\widehat{T}} = 1$. Тогда $T_1 \cap \widehat{M}$ содержится в $\widehat{T}$ и, значит, $T_1 \in \mathcal{T}_{\beta,\widehat{T}}$. Отсюда $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma} \geqslant \lambda_{T_1}^{T_1} = 1$, т. е. $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma} = 1$. Обратно, если $\lambda_{T_1}^{\widehat{T},\Sigma} = 1$, то для некоторого $T \in \mathcal{T}_{\beta,\widehat{T}}$ имеет место $T \supseteq T_1$. Тогда

$$\widehat{T} \supseteq T \cap \widehat{M} \supseteq T_1 \cap \widehat{M}.$$

Это означает, что $\widehat{\lambda}_{T_1}^{\widehat{T}} = 1$. Утверждение 5 доказано.

Из доказательства теоремы 5 следует, что для всякого источника $X = (A, P)$ существует аппроксимирующее разложение, являющееся произведением не более $|A|$ простых источников. Если источник X разложим, то аппроксимирующее разложение является его разложением, и, следовательно, разложимый источник X обладает разложением, содержащим не более $|A|$ сомножителей. Из утверждения 5 вытекает, что в этих оценках величину $|A|$ можно заменить на $|\widehat{A}|$, где $\widehat{A}$ — алфавит минимального равносильного источника.

7. Упрощение разложений

Под упрощением будем понимать сокращение числа сомножителей в разложениях, а в терминах матриц — сокращение числа строк.

Рассмотрим некоторую строку λ^j. Пусть всеми единичными разрядами этой строки являются $\lambda_{T_1}^j, \ldots, \lambda_{T_v}^j$. Образуем строки $\lambda^{j,u}$, $u = 1, \ldots, v$, где строка $\lambda^{j,u}$ получается из λ^j заменой всех единичных значений, исключая $\lambda_{T_u}^j$, неопределённым значением $*$.

Лемма 7. *Строка λ^j формульно выразима через некоторое множество строк Λ^I тогда и только тогда, когда через Λ^I формульно выразима каждая из строк $\lambda^{j,u}$.*

Доказательство. Если строка λ^j выразима через множество Λ^I посредством формулы Φ, то формулой Φ выразима и каждая строка $\lambda^{j,u}$, поскольку λ^j является её частичным доопределением. Обратно, если строки $\lambda^{j,u}$, $u = 1, \ldots, v$, выразимы посредством формул Φ_u, то строка λ^j выразима формулой $\Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_v$. Лемма 7 доказана.

Тем самым задача о формульной выразимости строк сведена к задаче о формульной выразимости строк с одной единицей.

Лемма 8. *Если строка λ^j содержит единственную единицу в разряде λ_T^j и всеми булевыми элементами столбца λ_T матрицы Λ^I являются $\lambda_T^{i_1} = \sigma_1, \ldots, \lambda_T^{i_k} = \sigma_k$, то строка λ^j формульно выразима через Λ^I тогда и только тогда, когда она выразима через Λ^I посредством конъюнкции $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 6 следует, что λ^j , формульно выразимая через Λ^I, выразима с использованием некоторой ДНФ формулы Φ. Поскольку $\Phi(\lambda_T) = \lambda_T^j = 1$, найдётся конъюнкция K' этой ДНФ, для которой $K'(\lambda_T) = 1$. Эта конъюнкция выражает λ^j через Λ^I, ибо для всех столбцов $\lambda_{T'}$, где $\Phi(\lambda_{T'}) = 0$, выполнено $K'(\lambda_{T'}) = 0$. Так как $K'(\lambda_T) = 1$, переменные входят в K' в той же форме, что и в K, т. е. K' является подконъюнкцией конъюнкции K. Учитывая, что $K(\lambda_T) = 1$ и $K(\lambda_{T'}) = 0$ для всех столбцов $\lambda_{T'}$, для которых $K'(\lambda_{T'}) = 0$, заключаем, что K выражает λ^j через Λ^I. Лемма 8 доказана.

При рассмотрении алгоритмов над матрицами эффективными считаются алгоритмы, полиномиальные относительно размеров матриц.

Лемма 9. *Существует эффективный алгоритм проверки формульной выразимости строки λ^j через матрицу Λ^I.*

Доказательство. Пусть всеми единичными разрядами строки λ^j являются $\lambda_{T_1}^j, \ldots, \lambda_{T_v}^j$. Образуем строки $\lambda^{j,u}$, $u = 1, \ldots, v$, как описано перед леммой 7. По каждой строке $\lambda^{j,u}$ построим конъюнкцию K_u аналогично тому, как в формулировке леммы 8 по строке λ^j построена конъюнкция K. Из доказательства леммы 7 и из леммы 8 следует, что строка λ^j формульно выразима через матрицу Λ^I тогда и только тогда, когда она выразима посредством ДНФ $\Phi = K_1 \vee \ldots \vee K_v$.

Очевидно, что сложность построения формулы Φ и проверки того, что строка $\Phi(\Lambda^I)$ чётче λ^j, ограничена полиномом от размеров матри-

цы Λ^I. Лемма 9 доказана.

Из теоремы 4 и леммы 9 вытекает

Теорема 6. *Существует эффективный алгоритм проверки устранимости заданной строки из матрицы.*

Алгоритм построения и упрощения аппроксимаций проиллюстрируем примером.

Пример. Пусть $M = \{0.1, 2, 3, 4, 5\}$ и допустимы множества $T_1 = \{0, 1\}$, $T_2 = \{1, 2\}$, $T_3 = \{2, 3\}$, $T_4 = \{3, 4\}$, $T_5 = \{4, 5\}$ и $T_6 = \{0, 5\}$, т. е. алфавитом источника является $A = \{a_{01}, a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{05}\}$. Значения вероятностей символов несущественны, и их указывать не будем.

Методом теоремы 5 построим матрицу аппроксимации Λ_0:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	
λ^1	1	$*$	0	0	0	$*$	T_1
λ^2	$*$	1	$*$	0	0	0	T_2
λ^3	0	$*$	1	$*$	0	0	T_3
λ^4	0	0	$*$	1	$*$	0	T_4
λ^5	0	0	0	$*$	1	$*$	T_5
λ^6	$*$	0	0	0	$*$	1	T_6

(справа указаны множества, применяемые для построения строк). Используя метод леммы 9, находим, что строки λ_5 и λ_6 представимы в виде $\lambda^5 = \bar\lambda^1 \wedge \bar\lambda^2 \wedge \bar\lambda^3$ и $\lambda^6 = \bar\lambda^2 \wedge \bar\lambda^3 \wedge \bar\lambda^4$, а потому устранимы. По той же лемме убеждаемся, что среди оставшихся строк $\lambda^1, \ldots, \lambda^4$ устранимых нет. Исключив из Λ_0 строки λ_5 и λ_6, приходим к матрице Λ_1:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
λ^1	1	$*$	0	0	0	$*$
λ^2	$*$	1	$*$	0	0	0
λ^3	0	$*$	1	$*$	0	0
λ^4	0	0	$*$	1	$*$	0

.

Согласно лемме 1 аппроксимирующее разложение является разложением тогда и только тогда, когда ей и исходному источнику соответствуют идентичные минимальные источники. Воспользуемся этим применительно к данному разложению.

Из доказательства теоремы 5 и из (6) следует, что λ^i, $i = 1, \ldots, 4$, из Λ_1 соответствует отображению $F_i : M \to \{0, 1\}$, при котором элементам множества T_i приписывается значение 1, а остальным — 0. Совокупность отображений (F_1, F_2, F_3, F_4) сопоставляет каждому основному

символу a_j, $j \in M$, набор, который обозначим через $\widetilde{j}$. Тогда $\widetilde{0} = (1000)$, $\widetilde{1} = (1100)$, $\widetilde{2} = (0110)$, $\widetilde{3} = (0011)$, $\widetilde{4} = (0001)$, $\widetilde{5} = (0000)$ (вид набора $\widetilde{1}$, например, определяется тем, что элемент 1 принадлежит множествам T_1, T_2 и не принадлежит T_3, T_4). Помимо $\widetilde{0},\ldots,\widetilde{5}$ среди доопределений столбцов матрицы Λ_1 присутствуют наборы (0100), (1110), (0010) и (0111), которые обозначим через $\widetilde{6}$, $\widetilde{7}$, $\widetilde{8}$ и $\widetilde{9}$. Столбцам матрицы соответствуют множества доопределений $\{\widetilde{0},\widetilde{1}\}$, $\{\widetilde{1},\widetilde{2},\widetilde{6},\widetilde{7}\}$, $\{\widetilde{2},\widetilde{3},\widetilde{8},\widetilde{9}\}$, $\{\widetilde{3},\widetilde{4}\}$, $\{\widetilde{4},\widetilde{5}\}$ и $\{\widetilde{0},\widetilde{5}\}$. Символы $\widetilde{6}$ и $\widetilde{7}$ мажорируются символом $\widetilde{1}$, а $\widetilde{8}$ и $\widetilde{9}$ — символом $\widetilde{2}$. В результате удаления мажорируемых символов придём к системе множеств, отличающейся от исходной системы $T_1,\ldots,T_6$ лишь обозначениями элементов. Отсюда следуют требуемая идентичность минимальных источников и тот факт, что матрица Λ_1 (и матрица Λ_0) задаёт разложение исходного источника.

8. Равносильные преобразования разложений

Задача о равносильности разложений состоит в том, чтобы по двум матрицам разложений узнать, равносильны ли они.

Теорема 7. *Существует эффективный алгоритм проверки равносильности разложений.*

Доказательство. Пусть разложения заданы матрицами Λ_1 и Λ_2. Из п. (v) леммы 3 следует, что эти матрицы равносильны тогда и только тогда, когда $\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix} \approx \Lambda_1$ и $\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{bmatrix} \approx \Lambda_2$. Это означает, что множество строк каждой из матриц Λ и Λ' является образующим для $\begin{bmatrix}\Lambda\\ \Lambda'\end{bmatrix}$, а это по следствию 2 эквивалентно формульной выразимости строк матрицы Λ_1 через матрицу Λ_2 и строк матрицы Λ_2 через Λ_1. Согласно лемме 9 факт формульной выразимости строки через матрицу эффективно проверяем. Теорема 7 доказана.

Будем рассматривать равносильные преобразования матриц, выполняемые посредством операций над строками. Систему равносильных преобразований назовём *полной*, если для любых двух равносильных матриц Λ и Λ' в этой системе найдётся последовательность преобразований, переводящих Λ в Λ'.

Введём следующие преобразования матриц.

1°. Добавление либо удаление полностью нулевой или полностью единичной строки.

2°. Добавление либо удаление инверсии некоторой строки (т. е. строки, полученной из неё заменой всех булевых элементов их отрицаниями).

3°. Добавление либо удаление конъюнкции некоторых строк.

4°. Добавление либо удаление дизъюнкции некоторых строк.

5°. Добавление либо удаление строки, менее чёткой, чем некоторая строка матрицы.

Отметим, что эта система избыточна: в правиле 1° можно ограничиться добавлением и удалением константы-строки одного вида, а из правил 3° и 4° можно оставить одно (для формул над $\{0, 1, *\}$ справедливы законы де Моргана).

Теорема 8. *Преобразования* 1°–5° *образуют полную систему равносильных преобразований.*

Доказательство. Равносильность преобразований 1°–5° следует из того, что добавляемая либо удаляемая строка формульно выразима через остальные. Докажем полноту.

Пусть Λ и Λ' — произвольные равносильные матрицы. Укажем вначале, как к матрице Λ путём применения преобразований 1°–5° может быть добавлена любая строка λ' матрицы Λ'. Если строка λ' доопределима до константы, то в соответствии с 1° к матрице Λ дописывается соответствующая строка-константа, затем на основании 5° добавляется λ', после чего применением 1° удаляется строка-константа.

Если λ' не доопределима до константы, то она формульно выразима через Λ, причём, как следует из доказательства леммы 6, в качестве формулы можно использовать ДНФ. Это означает, что применением данной ДНФ к некоторым строкам матрицы Λ можно получить строку λ'', которая чётче λ'. Присоединим к матрице Λ последовательность строк, получаемую применением правил 2°–4° и моделирующую вычисление строки λ'', после чего в соответствии с 5° добавим строку λ'. Затем добавленную последовательность, оканчивающуюся строкой λ'', удалим в обратном порядке, пользуясь правилами 2°–4°.

Допишем подобным образом к матрице Λ все строки матрицы Λ', в результате чего придём к матрице $\begin{bmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{bmatrix}$. Далее будем последовательно исключать строки λ матрицы Λ. Если, например, λ не доопределима до константы, то применением некоторой ДНФ к строкам матрицы Λ' может быть образована строка λ'', которая чётче λ. Присоединим к матрице последовательность строк, моделирующую вычисление строки λ'', затем удалим строку λ, после чего устраним в обратном порядке добавленную последовательность. После исключения всех строк матрицы Λ придём к Λ'. Теорема 8 доказана.

Для иллюстрации возможностей, предоставляемых равносильными

преобразованиями, продолжим рассмотрение предыдущего примера.

Пример (продолжение). Допишем к строкам $\lambda^1, \dots, \lambda^4$ матрицы Λ_1 строки

$$\lambda^1_+ = \lambda^1 \vee \lambda^2, \quad \lambda^2_+ = \lambda^2 \vee \lambda^3, \quad \lambda^3_+ = \lambda^3 \vee \lambda^4. \tag{7}$$

Получим равносильную матрицу Λ_2:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
λ^1	1	$*$	0	0	0	$*$
λ^2	$*$	1	$*$	0	0	0
λ^3	0	$*$	1	$*$	0	0
λ^4	0	0	$*$	1	$*$	0
λ^1_+	1	1	$*$	0	0	$*$
λ^2_+	$*$	1	1	$*$	0	0
λ^3_+	0	$*$	1	1	$*$	0

.

Методом леммы 9 находим, что $\lambda^1 = \lambda^1_+ \wedge \bar{\lambda}^3_+$, $\lambda^2 = \lambda^1_+ \wedge \lambda^2_+$, $\lambda^3 = \lambda^2_+ \wedge \lambda^3_+$, $\lambda^4 = \bar{\lambda}^1_+ \wedge \lambda^3_+$. Поэтому строки $\lambda^1, \dots, \lambda^4$ могут быть исключены, в результате чего возникает матрица Λ_3:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
λ^1_+	1	1	$*$	0	0	$*$
λ^2_+	$*$	1	1	$*$	0	0
λ^3_+	0	$*$	1	1	$*$	0

,

которая, как и предыдущие, является матрицей разложения. Проверим этот факт непосредственно. Преобразования строк (7) порождают преобразование наборов $\widetilde{0}, \dots, \widetilde{5}$, приобретающих вид $\widetilde{0}_+ = (100)$, $\widetilde{1}_+ = (110)$, $\widetilde{2}_+ = (111)$, $\widetilde{3}_+ = (011)$, $\widetilde{4}_+ = (001)$, $\widetilde{5}_+ = (000)$. Столбцам Λ_2 соответствуют множества доопределений $\{\widetilde{0}_+, \widetilde{1}_+\}$, $\{\widetilde{1}_+, \widetilde{2}_+\}$, $\{\widetilde{2}_+, \widetilde{3}_+\}$, $\{\widetilde{3}_+, \widetilde{4}_+\}$, $\{\widetilde{4}_+, \widetilde{5}_+\}$ и $\{\widetilde{0}_+, \widetilde{5}_+\}$, которые отличаются от исходных множеств $T_1, \dots, T_6$ лишь обозначениями элементов.

Матрица Λ_3 содержит 3 строки. Это меньше, чем в предшествующих матрицах разложений. Достигнуть трёх строк без применения равносильных преобразований невозможно — легко проверить, что исключениями строк из Λ_0 могут быть получены лишь равносильные матрицы с самое меньшее 4 строками.

Задание источников путём указания алфавита A и вероятностей p_T символов $a_T \in A$ будем называть *естественным*. Всякое произведение $X_1 \dots X_s$ также задаёт источник, разложением которого оно является. Возникают три варианта проблемы равносильности источников, относящиеся к случаям:

(а) для обоих источников использовано естественное задание,

(б) оба источника представлены разложениями,

(в) один источник задан естественным образом, второй представлен разложением.

В случаях (а) и (б) проблема равносильности решается эффективно (теоремы 1 и 7).

Задача о равносильности источников в постановке (в) тесно связана с проблемой разложимости, состоящей в том, чтобы по заданному источнику $X = (A, P)$ узнать, разложим ли он.

Утверждение 6. *Задачи о разложимости источников и о равносильности источников, один из которых задан естественным образом, а второй представлен разложением, полиномиально эквивалентны* (*полиномиально сводятся друг к другу*).

Доказательство. Для проверки разложимости источника достаточно с полиномиальной сложностью построить его аппроксимирующее разложение и проверить его равносильность исходному.

Обратно, пусть требуется решить задачу о равносильности источника $X = (A, P)$ и разложения $X_1 \ldots X_s$. Фиксируем некоторый неразложимый источник X_0. Найдём аппроксимирующее разложение $Y_1 \ldots Y_t$ источника X и введём источник Z, положив

$$Z = \begin{cases} X, & \text{если } X_1 \ldots X_s \approx Y_1 \ldots Y_t, \\ X_0, & \text{если } X_1 \ldots X_s \not\approx Y_1 \ldots Y_t. \end{cases} \tag{8}$$

В силу теорем 2 и 7 сложность построения источника Z полиномиальна. Покажем, что равносильность $X \approx X_1 \ldots X_s$ имеет место тогда и только тогда, когда источник Z разложим.

Если $X \approx X_1 \ldots X_s$, то источник X разложим и в силу равносильности аппроксимирующих разложений выполнено $X_1 \ldots X_s \approx Y_1 \ldots Y_t$. В этом случае источник Z совпадает с X и потому разложим.

Обратно, если Z разложим, то он задаётся в (8) верхней строкой. Это означает, что $X_1 \ldots X_s \approx Y_1 \ldots Y_t$ и источник $X = Z$ разложим. Отсюда следует, что $X \approx Y_1 \ldots Y_t \approx X_1 \ldots X_s$. Утверждение 6 доказано.

Вопрос о возможности эффективной проверки разложимости источника (и соотношения $\approx$ в постановке (в)) пока остаётся открытым. Способ проверки отношения $\approx$ сведением постановки (в) к (а) путём перехода от разложения к естественному заданию (которым мы пользовались при рассмотрении примера) в общем случае не эффективен, поскольку мощность основного алфавита источника $X_1 \ldots X_s$ может достигать 2^s

и оценивается величиной $2^{|A|}$. Таким образом, если источник разложим, то его разложение будет эффективно найдено путём построения аппроксимации, но мы не можем (в данный момент) эффективно убедиться в том, что оно является разложением этого источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агибалов Г. П.** Конечные автоматы на полурешетках. — Томск: Изд-во ТГУ, 1993. – 209 с.
2. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь. — М.: Сов. радио, 1974. — 720 с.
3. **Парватов Н. Г.** Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 61–78.
4. **Парватов Н. Г.** О формах представления монотонных и квазимонотонных функций на трехэлементной полурешетке // Мат. IX Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения». — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. — С. 127–130.
5. **Шоломов Л. А.** Преобразование нечётких данных с сохранением информационных свойств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 85–104.
6. **Шоломов Л. А.** Элементы теории недоопределённой информации // Прикл. дискрет. математика. Прил. № 2. — 2009. — С. 18–42.
7. **Шоломов Л. А.** Декомпозиция недоопределённых данных // «Проблемы теоретической кибернетики». Мат. XVI Междунар. конф. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2011. — С. 570–573.
8. **Яблонский С. В.** Элементы математической кибернетики. — М.: Высш. шк., 2007. — 188 с.

Шоломов Лев Абрамович,
e-mail: sholomov@isa.ru

Статья поступила
16 января 2012 г.

Переработанный вариант —
9 апреля 2012 г.