ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2013. Том 20, № 1. С. 28–36

УДК 621.391.15

СОВЕРШЕННЫЕ 3-РАСКРАСКИ ГРАФОВ ПРИЗМЫ И ЛЕСТНИЦЫ МЁБИУСА

М. А. Лисицына

Аннотация. Исследуются две бесконечные серии транзитивных кубических графов: призма и лестница Мёбиуса. Для рассматриваемых графов получено полное описание допустимых параметров совершенных раскрасок в 3 цвета.

Ключевые слова: призма, лестница Мёбиуса, совершенная раскраска.

Введение

Пусть G — обыкновенный неориентированный граф. *Совершенной раскраской графа* G *с матрицей параметров* $M = (m_{ij})$ называется такая раскраска его вершин, что для каждой вершины цвета i число смежных с ней вершин цвета j равняется m_{ij}. Совершенные раскраски в 3 цвета будем называть *совершенными* 3*-раскрасками.*

Исследуются совершенные 3-раскраски двух бесконечных серий транзитивных кубических графов: призмы и лестницы Мёбиуса.

Призмой $P(n)$ называется прямое произведение простого цикла C_n на ребро. *Лестница Мёбиуса* $M(n)$ локально устроена как призма $P(n)$ (рис. 1), отличие в том, что у лестницы Мёбиуса концы полосы перед соединением перекручиваются на один оборот. На рис. 2 изображены графы $P(n)$ и $M(n)$ для некоторых n.

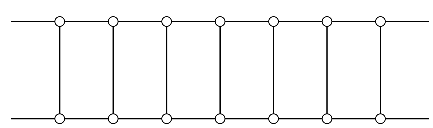

Рис. 1. Локальное строение призмы и лестницы Мёбиуса

Рассматривая всевозможные совершенные раскраски заданного графа или класса графов, исследователи уделяли особое внимание случаю двух цветов, потому что в рамках этого случая представляется возможным разработать инструменты для изучения совершенных раскрасок

объектов и собрать материал для обобщения, не перегружая исследование перебором значений большого числа параметров. К таким работам следует отнести [2], где перечислены все допустимые параметры совершенных раскрасок в 2 цвета призмы и лестницы Мёбиуса, а также работу [5]. Совершенные раскраски в число цветов больше двух изучались в [1, 4]. В [4] описаны все допустимые параметры совершенных 3-раскрасок графа бесконечной прямоугольной плоской решётки.

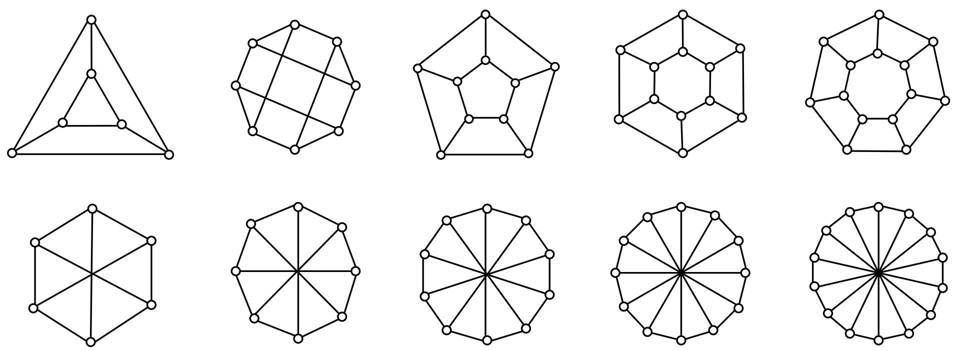

Рис. 2. Диаграммы графов призмы и лестницы Мёбиуса

1. Предварительные сведения

Прежде всего дадим формальные определения исследуемым семействам транзитивных кубических графов.

Пусть n — натуральное число. *Призмой* $P(n)$ называется граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ и рёбер

$$E = \{(i, i+1) \mid i = \overline{0, 2n-1},\ i \text{ — чётное}\} \cup \{(i, i+2) \mid i = \overline{0, 2n-1}\}$$

(сложение по модулю $2n$). Граф с множествами вершин V и рёбер

$$E = \{(i, i+1), (i, i+n) \mid i = \overline{0, 2n-1}\}$$

(сложение по модулю $2n$) называется *лестницей Мёбиуса* $M(n)$.

Матрица $M = (m_{ij})$ называется *допустимой для графа* G, если существует совершенная 3-раскраска его вершин с матрицей параметров M. Очевидно, что если M допустима для некоторого графа, то её элементы являются неотрицательными целыми числами, причём $m_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $m_{ji} = 0$, в силу симметричности отношения смежности.

Допустимые матрицы, полученные друг из друга преобразованием, соответствующим переобозначению цветов, будем считать эквивалентными. Для того чтобы не рассматривать эквивалентные матрицы, в каждом классе эквивалентности допустимых матриц выберем представителя, отвечающего требованию лексикографической минимальности вектора $(m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{12}, m_{21}, m_{31})$, называемого *характеристическим.* Заметим, что допустимая матрица восстанавливается по своему характеристическому вектору однозначно, что гарантирует единственность такого представителя.

В решении задачи полной характеризации матриц, допустимых для исследуемых классов графов, используются результаты и методы из [2, 4]. Основная теорема [4], сформулированная ниже в терминах настоящей статьи, позволяет существенно сократить перебор при решении поставленной задачи.

Теорема 1. *Матрицы, допустимые для графа бесконечной прямоугольной плоской решётки, исчерпываются следующим списком*:

$$\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\1&3&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\2&2&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&3\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\1&1&2\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}0&2&2\\4&0&0\\2&0&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&3&1\\3&0&1\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&4&0\\1&1&2\\0&2&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&2&2\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}0&2&2\\2&2&0\\2&0&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\1&2&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&3\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\1&1&2\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&0\\1&0&3\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&0&3\end{pmatrix}.$$

В [2] введены инструменты для исследования совершенных раскрасок графов $P(n)$ и $M(n)$, которые применимы и в случае трёх цветов: лемма о среднем и техника, связанная с понятием локально жёсткого фрагмента.

Лемма 1. *Если доля вершин данного цвета в некотором фрагменте совершенной раскраски транзитивного графа G больше соответствующей доли во всём графе, то найдётся такое положение фрагмента, в котором доля вершин этого цвета меньше средней, и наоборот.*

Следовательно, если число вершин некоторого цвета, усреднённое по всем положениям фрагмента, дробно, то имеют место обе ситуации.

Локально жёстким фрагментом называется подмножество вершин T графа G такое, что из совпадения на T двух совершенных раскрасок графа G с одинаковыми параметрами вытекает их полное совпадение. Таким образом, для описания всех совершенных раскрасок графа с заданной матрицей параметров достаточно рассмотреть непротиворечивые варианты раскраски его локально жёсткого фрагмента.

Лемма 2 (о локальной жёсткости). *В графах $P(n)$ и $M(n)$ всякий 4-цикл является локально жёстким фрагментом.*

Совершенные раскраски призм и лестниц Мёбиуса являются в некотором смысле периодическими ввиду последней леммы, причём период достаточно мал. Заметим, что вопрос периодичности совершенных раскрасок слабо изучен и представляет интерес [7].

Прежде чем переходить к основным результатам данной работы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Если существует совершенная 3-раскраска призмы $P(n)$ с матрицей параметров M, то существует совершенная 3-раскраска графа бесконечной прямоугольной плоской решётки с матрицей параметров $M+E$.*

Доказательство. Совершенная 3-раскраска призмы $P(n)$ с матрицей параметров M естественным образом продолжается до совершенной 3-раскраски конечного тороидального графа, который является прямым произведением призмы $P(n)$ на ребро. Матрица параметров последней равна $M+E$. Совершенная 3-раскраска графа бесконечной прямоугольной плоской решётки с матрицей параметров $M+E$ получается из совершенной 3-раскраски конечного тороидального графа с той же матрицей параметров в результате применения отображения, обратного естественному гомоморфизму первого графа на второй. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Матрицами параметров совершенных 3-раскрасок призмы $P(n)$ и лестницы Мёбиуса $M(n)$ могут быть только следующие 8 матриц:*

$$A=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&3\\1&2&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&3\\1&1&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix};$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix};\ G=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix};\ H=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Справедливость утверждения леммы для призмы $P(n)$ немедленно следует из леммы 3 и теоремы 1.

Так как существование совершенной 3-раскраски лестницы Мёбиуса $M(n)$ с матрицей параметров M влечёт существование совершенной 3-раскраски призмы $P(2n)$ с той же матрицей параметров, утверждение леммы верно и для лестницы Мёбиуса. Лемма 4 доказана.

Приведённые матрицы являются каноническими представителями своих классов эквивалентности в силу каноничности соответствующих им матриц совершенных раскрасок графа бесконечной прямоугольной плоской решётки [4].

Везде в дальнейшем используются именно эти обозначения для рассматриваемых матриц.

Пусть матрица M допустима для графа G. Число вершин цвета i в совершенной раскраске графа G с матрицей параметров M будем обозначать через N_i. В силу допустимости матрицы M для рассматриваемого графа существуют попарно различные i, j и k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$, для которых $m_{ij} \neq 0$ и $m_{ik} \neq 0$. *Числом пропорциональности матрицы* M назовём величину

$$pr(M) = [m_{ji}/(m_{ij}, m_{ji}), m_{ki}/(m_{ik}, m_{ki})](1 + m_{ij}/m_{ji} + m_{ik}/m_{ki}),$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b, а $[a, b]$ — их наименьшее общее кратное.

Лемма 5. *Пусть G — обыкновенный неориентированный граф. Если в матрице M, допустимой для графа G, $m_{ij} \neq 0$, то $N_i/N_j = m_{ji}/m_{ij}$.*

Доказательство почти очевидно, поскольку вершины цветов i и j в G порождают бирегулярный двудольный граф со степенями долей m_{ij} и m_{ji} соответственно.

Лемма 6. *Пусть задан граф G с N вершинами. Если матрица M допустима для графа G, то N кратно $pr(M)$.*

Доказательство. Достаточно вычислить отношение величин $N_1 : N_2 : N_3$ для соответствующей совершенной раскраски, используя лемму 5. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть G — кубический граф с N вершинами. Следующие ограничения на N являются необходимыми условиями допустимости матриц для графа G:*

(i) *если матрица A допустима для графа G, то N кратно* 6;

(ii) *если матрица D допустима для графа G, то N кратно* 3;

(iii) *если матрица E допустима для графа G, то N кратно* 8;
(iv) *если матрица F допустима для графа G, то N кратно* 3;
(v) *если матрица G допустима для графа G, то N кратно* 5.

Доказательство. В доказательстве нуждается только п. (iii) в силу леммы 6.

Пусть G — кубический граф и матрица E допустима для него. Согласно лемме 5 для совершенной раскраски графа G с матрицей E справедливо равенство $N_1 : N_2 : N_3 = 1 : 1 : 2$. Вершин цвета 1, как и цвета 2, чётное число, так как внутренние степени этих цветов равны 1. Значит, необходимым условием допустимости матрицы E для графа G является кратность N восьми. Лемма 7 доказана.

В доказательстве теорем следующего раздела можно выделить две части. Допустимость матриц подтверждают конструкции, изображённые на рисунках. Вершины первого цвета представлены на них белыми, второго — серыми, а третьего — чёрными, в соответствии с возрастанием интенсивности цвета. Доказательство несуществования раскрасок опирается на доказанные выше леммы.

2. Основные результаты.

Справедлива

Теорема 2. *Допустимые матрицы призмы $P(n)$ исчерпываются следующим списком*:
(1) *A при n, кратных* 6;
(2) *B не является допустимой ни при каких n*;
(3) *C при n, кратных* 4;
(4) *D при n, кратных* 3;
(5) *E при n, кратных* 4;
(6) *F при n, кратных* 3;
(7) *G при n, кратных* 5;
(8) *H при n, кратных* 6.

Доказательство. В доказательстве нуждаются только пп. (1)–(3) и (8), справедливость остальных пунктов следует из рис. 3 и леммы 7.

(1) Заметим, что из совершенной 3-раскраски графа $P(n)$ с матрицей параметров A получается его совершеннная раскраска в 2 цвета с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, если цвета 1 и 2 объединить в один. Необходимым условием существования последней является чётность n [2], что

в совокупности с леммой 7 даёт следующее необходимое условие допустимости матрицы A для графа $P(n)$: n кратно 6. Достаточность этого условия следует из рис. 3.

(2) Рассуждая как в (1), заключаем, что существование совершенной 3-раскраски призмы $P(n)$ с матрицей параметров B влечёт сущестование совершеннной раскраски графа $P(n)$ в 2 цвета с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Последней раскраски не существует [2]. Следовательно, матрица B не является допустимой ни при каких n.

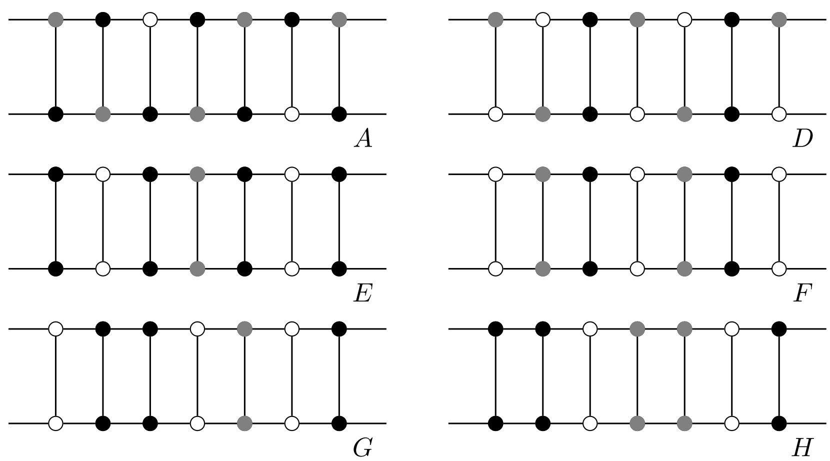

Рис. 3. Совершенные 3-раскраски призмы

(3) В силу леммы о среднем найдётся 4-цикл, в котором не менее двух вершин цвета 3. В 4-цикле более двух вершин этого цвета быть не может, иначе нашлась бы вершина цвета 3, у которой не менее двух соцветных соседей. Легко убедиться в том, что каждый из трёх вариантов расположения двух вершин цвета 3 в 4-цикле допустим и продолжается до одной из двух совершенных раскрасок с периодом 4 (рис. 4). Как следствие, n кратно 4.

(4) Пусть существует совершенная 3-раскраска графа $P(n)$ с матрицей параметров H. Заметим, что во всяком 4-цикле чётное число вершин цвета 2, иначе нашлась бы вершина цвета 1 или 3, которая соседствует с более чем одной вершиной цвета 2. Не могут все 4-циклы, в каждом из которых хотя бы одна вершина покрашена цветом 2, оказаться одноцветными. Кроме того, в 4-цикле с двумя вершинами цвета 2 никакая вершина не может быть покрашена цветом 3. Значит, есть цикл с двумя вершинами цвета 2 и двумя вершинами цвета 1. Антиподальное расположение вершин цвета 1 в таком 4-цикле противоречиво, поскольку влечёт

существование вершины этого цвета с более чем одним соседом цвета 2. Легко убедиться в том, что из двух оставшихся вариантов до совершенной 3-раскраски может быть продолжен лишь один, изображённый на рис. 3. Эта раскраска единственна и существует, если и только если n кратно 6.

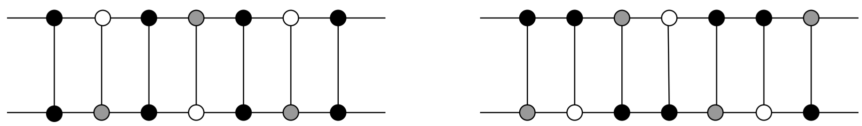

Рис. 4. Совершенные 3-раскраски призмы с матрицей параметров C

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Допустимые матрицы лестницы Мёбиуса $M(n)$ исчерпываются следующим списком*:

(i) A *при* $n = 3p$, *где* p — *нечётное число*;
(ii) B *не является допустимой ни при каких* n;
(iii) C *при* $n = 2p$, *где* p — *нечётное число*;
(iv) D *не является допустимой ни при каких* n;
(v) E *при* n, *кратных 4*;
(vi) F *при* n, *кратных 3*;
(vii) G *при* n, *кратных 5*;
(viii) H *при* n, *кратных 6.*

Доказательство. Пп. (i)–(iii) и (v)–(viii) доказываются аналогично пп. (1)–(3) и (5)–(8) теоремы 4, поэтому в подробном доказательстве нуждается только п. (iv).

(iv) Согласно лемме о среднем найдётся 4-цикл, в котором не менее двух вершин цвета 3. Кроме того, во всяком 4-цикле не более двух вершин этого цвета, в противном случае нашлась бы вершина, у которой не менее двух соседей цвета 3. По той же причине противоречиво антиподальное расположение вершин цвета 3 в 4-цикле с двумя вершинами этого цвета. Ни один из оставшихся вариантов расположения двух вершин цвета 3 в 4-цикле не может быть продолжен до совершенной 3-раскраски лестницы Мёбиуса с матрицей параметров D, убедиться в этом читателю не составит труда. Следовательно, матрица D не является допустимой для графа $M(n)$ ни при каких n. Теорема 5 доказана.

3. Заключение

Данная статья является продолжением изучения совершенных раскрасок транзитивных кубических графов. В работе перечислены все до-

пустимые параметры совершенных 3-раскрасок призмы и лестницы Мёбиуса. Важным инструментом проведённого исследования является понятие локально жёсткого фрагмента, введённое в [2], что доказывает его эффективность.

Представляет интерес предъявить все допустимые параметры совершенных раскрасок графов рассмотренных бесконечных серий в произвольное число цветов, вооружившись описанным методом. Интересно также обнаружить техники, эквивалентные по своей эффективности методу локально жёстких фрагментов, для бесконечных серий транзитивных кубических графов, в которых такие фрагменты отсутствуют, чтобы исследовать их совершенные раскраски в число цветов больше двух.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В.** Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 3–10.
2. **Августинович С. В., Лисицына М. А.** Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 3–17.
3. **Кохов В. А.** Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. — Новосибирск: Наука, 1986. — С. 113–114.
4. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(\mathbb{Z}^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 37–54.
5. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80–92.
6. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. — Киев: Наукова думка, 1984. С. 121–138.
7. **Puzynina S. A., Avgustinovich S. V.** On periodicity of two-dimensional words // Theor. Comput. Sci. — 2008. — Vol. 391 — P. 178–187.

Лисицына Мария Александровна,
e-mail: lisicinama@ngs.ru

Статья поступила
16 ноября 2011 г.

Переработанный вариант —
7 марта 2012 г.