

УДК 519.8

О НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ
СЛУЧАЯХ И ПРИБЛИЖЁННЫХ АЛГОРИТМАХ
ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
КОММУНИКАЦИОННОГО ДЕРЕВА *)

А. И. Ерзин, Р. В. Плотников, Ю. В. Шамардин

Аннотация. В произвольном неориентированном n -вершинном графе с неотрицательными весами рёбер требуется построить остовное дерево, в котором сумма по всем вершинам максимальных весов инцидентных вершине рёбер минимальна. Найдены частные случаи полиномиальной разрешимости. Показано, что минимальный остов, веса рёбер которого принадлежат отрезку $[a, b]$, является $(2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)})$ -приближённым решением и задача построения 1,00048-приближённого решения NP-трудна. Предложен эвристический полиномиальный алгоритм, и осуществлён его апостериорный анализ.

Ключевые слова: беспроводная коммуникационная сеть, остовное дерево, приближённый алгоритм.

Введение

Элементы многих коммуникационных сетей используют беспроводную связь для обмена информацией. При этом потери энергии элемента пропорциональны d^s , где $s \geq 2$, а d — дальность передачи [3]. В некоторых сетях, например, в беспроводных сенсорных сетях, элементы (сенсоры) имеют ограниченный запас энергии, и эффективное использование энергии сенсоров позволяет продлить время функционирования (жизни) сети [1, 10, 13, 14]. Для рационального использования энергии современные сенсоры способны регулировать дальность радиопередачи, и тогда актуальной становится проблема определения дальности передачи каждого элемента сети таким образом, чтобы минимизировать общую

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-33028-мол-а-вед и 13-07-00139-а), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение 8227).

энергию, затрачиваемую на поддержание связного графа. Если предположить, что радиосигнал одинаково распространяется во всех направлениях, то все элементы, находящиеся в зоне передачи (не далее чем дальность передачи), получают сообщение. В этом случае можно считать, что коммуникационная сеть (остовный подграф, по рёбрам которого осуществляется передача) — полный граф [3, 6, 9, 10]. Тем не менее не всегда сигнал распространяется одинаково во всех направлениях и на любое расстояние. Поэтому в общем случае следует считать, что коммуникационный граф $G = (V, E)$ может быть произвольным остовным подграфом, как и потери энергии по обеспечению передачи по ребру графа. Таким образом, если $c_{ij} \geq 0$ — потери энергии, связанные с передачей данных из $i \in V$ в $j \in V$, то в связном подграфе $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, потери энергии вершины $i \in V$ равны $E_i(T) = \max_{j|(i,j) \in E'} c_{ij}$. Целью данной статьи является исследование задачи построения такого остовного подграфа T , в котором сумма $\sum_{i \in V} E_i(T)$ минимальна. Без ограничения общности подграф T можно считать остовным деревом.

Как отмечалось выше, подобные задачи возникают, например, в беспроводных сенсорных сетях, когда расположение сенсоров известно и требуется синтезировать энергоэффективный граф, связывающий все сенсоры [13]. В литературе в качестве коммуникационного графа сенсорной сети принято рассматривать остовное дерево минимального веса P , когда вес ребра, связывающего пару вершин, равен квадрату расстояния между этими вершинами [13]. Однако минимальный остов не всегда является оптимальным коммуникационным графом сенсорной сети.

В [9] исследовалась задача определения дальности передачи каждой вершины, размещённой в евклидовом пространстве таким образом, чтобы индуцировать сильно связный граф, в котором общие энергозатраты на связь минимальны. Для частных случаев, когда вершины расположены на прямой, предложены полиномиальные алгоритмы решения задачи. Доказана NP-трудность задачи в трёхмерном евклидовом пространстве.

В [3] предложены алгоритм с асимптотической точностью $5/3$, полиномиальный алгоритм, строящий $11/6$ -приближённое решение, а также точный алгоритм — метод ветвей и границ, в котором используется новая постановка задачи в виде задачи целочисленного линейного программирования.

В [6] рассмотрена задача определения мощностей радиопередатчиков для передачи данных на два расстояния: «малое» и «большое». Показана NP-трудность этой задачи. Предложен полиномиальный алгоритм, который строит решение с числом передатчиков на большие расстоя-

ния, не превосходящим $11/6$ от числа таких передатчиков в оптимальном решении. Также предложен экспоненциальный $9/5$ -приближённый алгоритм. Эти результаты получены для случая, когда элементы распределены в евклидовом пространстве, однако они легко обобщаются и на произвольную метрику.

В данной работе найдены частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. Показано, что задача построения $1,00048$ -приближённого решения NP-трудна. Предложен эффективный эвристический алгоритм, и осуществлён численный эксперимент, показавший его высокую эффективность.

1. Постановка задачи и анализ сложности

Задан простой неориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$ с множествами вершин V , $|V| = n$, и рёбер E . Пусть $c_{ij} \geq 0$ — вес ребра $(i, j) \in E$. Требуется найти остовное дерево T^* графа G , являющееся решением задачи

$$W(T) = \sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} c_{ij} \rightarrow \min_T, \quad (1)$$

где $N_i(T)$ — множество вершин, смежных с вершиной i в дереве T . В англоязычной литературе такую задачу принято называть Min-Power Symmetric Connectivity Problem [3]. В дальнейшем любое допустимое решение задачи (1) — остовное дерево — будем называть также *коммуникационным деревом (подграфом)*.

Доказательства NP-трудности задачи для случая, когда элементы сети находятся в трёхмерном евклидовом пространстве, представлены в [9], а когда элементы сети находятся в двумерном евклидовом пространстве — в [5]. В обоих случаях вес ребра соответствует квадрату евклидова расстояния между соответствующими вершинами. Естественно, отсюда следует и NP-трудность проблемы в общем случае, но приведённое ниже полиномиальное сведение, которое также доказывает NP-трудность рассматриваемой задачи в сильном смысле, понадобится нам позже для определения границ аппроксимируемости задачи.

Лемма 1. *Задача Минимальное вершинное покрытие полиномиально сводится к задаче (1).*

Доказательство. Осуществим полиномиальное сведение NP-трудной в сильном смысле задачи Минимальное вершинное покрытие (МВП) к частному случаю задачи (1). В задаче МВП задан граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Требуется найти такое подмножество вершин $V' \subseteq V$

минимальной мощности, что для любого ребра $(i, j) \in E$ хотя бы одна из вершин i и j принадлежит V' .

Рассмотрим вспомогательную задачу минимального покрытия (МП), в которой заданы множества объектов J и элементов I и параметры

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если элемент } i \in I \text{ покрывает объект } j \in J, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Требуется найти подмножество $I' \subseteq I$ минимальной мощности, покрывающее все объекты.

Задача МВП полиномиально сводится к МП. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $J = E$, $I = V$ и считать, что элемент $i \in I$ покрывает объект $e = (p, q) \in J$, если $i = p$ или $i = q$.

По произвольной задаче МП построим граф $G = (V, E)$ с множествами вершин $V = \{0\} \cup I \cup J$ и рёбер $E = \{(0, i) \mid i \in I\} \cup \{(i, j) \mid a_{ij} = 1, i \in I, j \in J\}$. Положим веса рёбер $c_{0i} = 0$, $c_{ij} = a_{ij}$, $i \in I, j \in J$. Тогда в любом остовном дереве T графа G для произвольной вершины $j \in J$ имеем $\max_{i \in N_j(T)} c_{ij} = 1$, а для вершины $i \in I$ — либо $\max_{j \in N_i(T)} c_{ij} = 1$ (i связана с некоторой вершиной $j \in N_i(T)$), либо $\max_{j \in N_i(T)} c_{ij} = 0$ (i связана только с вершиной 0).

Решение T^* такой задачи (1) (назовём её задачей \mathcal{P}) определяет минимальное покрытие $I' \subseteq I$, в которое войдут вершины множества I , смежные с вершинами множества J в дереве T^* . Таким образом, NP-трудная в сильном смысле задача МП полиномиально сведена к частному случаю задачи (1). Лемма 1 доказана.

На рис. 1 приведён пример задачи (1), построенной по индивидуальной задаче МП описанным выше полиномиальным сведением. Жирными линиями выделено допустимое решение задачи, которое определяет покрытие всех элементов множества J элементами из I .

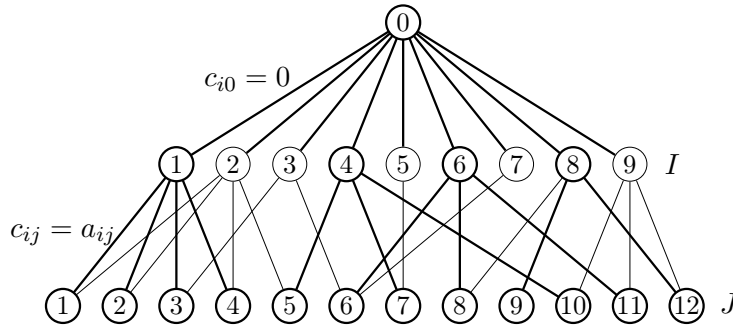


Рис. 1. Пример задачи (1), полученной из индивидуальной задачи МП

2. Частные случаи

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи, которые возникают в различных приложениях [1, 13].

Лемма 2. Пусть граф G полный и веса рёбер принимают два значения $c_{ij} \in \{a, b\}$, $a < b$. Тогда задача (1) полиномиально разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим минимальный (по суммарному весу входящих в него рёбер) остов следующим образом. Начнём с тривиального графа (V, \emptyset) , в который добавим максимальное количество рёбер веса a , чтобы получились ациклические компоненты связности (пусть m — число компонент связности). Для построения остовного дерева необходимо связать компоненты связности $m - 1$ ребром. Для этого в каждой компоненте связности выберем по одной вершине и свяжем их рёбрами веса b , чтобы получилось остовное дерево. Построенный минимальный остов является в данном случае оптимумом задачи (1), поскольку число вершин, смежных с рёбрами веса b , в нём минимально. Лемма 2 доказана.

Приведём два других простых случая построения оптимальных деревьев.

СЛУЧАЙ 1. Пусть a_1, a_2 — два минимальных значения весов рёбер графа G , $a_1 < a_2$. В тривиальное дерево (V, \emptyset) добавим рёбра длины a_1 , чтобы получилось минимальное число ациклических компонент связности. Если в каждой компоненте связности можно выбрать по одной вершине и связать эти вершины рёбрами длины a_2 , то построенное таким образом дерево является оптимальным решением задачи (1).

СЛУЧАЙ 2. Пусть a — минимальный вес рёбер графа G , и пусть веса всех рёбер в минимальном остове P равны a . Тогда P является оптимальным решением задачи (1).

Замечание 1. В [1] рассматриваются регулярные покрытия плоскости кругами двух радиусов. При этом минимальные остовы, связывающие сенсоры, содержат только рёбра минимальной длины. Значит, оптимальным коммуникационным деревом является минимальный остов. С другой стороны, в [13] предлагается покрытие, в котором используются круги трёх радиусов (модель III). Минимальный остов, связывающий сенсоры в модели III, не является оптимальным коммуникационным деревом, и выводы авторов [13], относящиеся к энергоэффективности связи, неверны.

3. Оценки точности полиномиальных алгоритмов

Оценим степень близости минимального остова к оптимальному решению задачи (1).

Лемма 3. Для любого остовного дерева T справедливы неравенства

$$\sum_{(i,j) \in T} c_{ij} \leq \sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} c_{ij} \leq 2 \sum_{(i,j) \in T} c_{ij}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое неравенство очевидно: если выбрать произвольную вершину в качестве корня дерева T , то у каждой вершины i будет одна вершина-предшественник $p(i)$ на пути в корень (предшественник вершины-корня совпадает с корнем), и вес дерева можно записать в виде

$$\sum_{(i,j) \in T} c_{ij} = \sum_{i \in V} c_{i,p(i)} \leq \sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} c_{ij}.$$

Правое неравенство в (2) следует из того факта, что каждое ребро инцидентно двум вершинам, и, следовательно, его вес может войти в целевую функцию не более чем дважды. Лемма 3 доказана.

Пусть T^* — решение задачи (1), т.е. $W(T^*) = W^* = \min_T W(T)$, а $C = \sum_{(i,j) \in P} c_{ij} = \min_T \sum_{(i,j) \in T} c_{ij}$ — вес минимального остова P . Упорядочим рёбра, вошедшие в минимальный остов P , согласно их весам:

$$a = c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{n-1} = b.$$

Пусть число рёбер дерева P , вес которых учтён в целевой функции $W(P)$ дважды, равно k , число рёбер дерева P , вес которых учтён в целевой функции один раз, равно l , и число рёбер дерева P , вес которых не вошёл в $W(P)$, равно m . Тогда $k + l + m = n - 1$, а $2k + l = n$. Отсюда следует, что $l = n - 2k$ и $m = k - 1$. Значит,

$$\begin{aligned} W(P) &\leq 2 \sum_{i=n-k}^{n-1} c_i + \sum_{i=n-k-l}^{n-k-1} c_i = 2 \sum_{i=n-k}^{n-1} c_i + \sum_{i=k}^{n-k-1} c_i \\ &= 2C - \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i + \sum_{i=1}^{n-k-1} c_i \right) \leq 2C - a(n-2). \end{aligned}$$

Тем самым

$$\varepsilon(P) = \frac{W(P)}{W(T^*)} \leq 2 - \frac{a(n-2)}{C} = \varepsilon_1(C).$$

С другой стороны, $\varepsilon(P) \leq bn/C = \varepsilon_2(C)$. Вес C минимального остова P не известен заранее. Однако $\varepsilon_1(C)$ возрастает, а $\varepsilon_2(C)$ убывает, и, следовательно, можно найти $\bar{C} \in [a(n-1), b(n-1)]$ такое, что $\varepsilon_1(\bar{C}) = \varepsilon_2(\bar{C})$.

Имеем $\bar{C} = ((a+b)(n-2) + 2b)/2$ и

$$\varepsilon(P) \leq \min_C \{\varepsilon_1(C), \varepsilon_2(C)\} \leq \varepsilon_1(\bar{C}) = \varepsilon_2(\bar{C}) = 2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть веса рёбер, вошедших в минимальный остов P , принадлежат отрезку $[a, b]$. Тогда справедлива достижимая оценка

$$\varepsilon(P) = \frac{W(P)}{W(T^*)} \leq 2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)} \quad (3)$$

и при $n \rightarrow +\infty$

$$\varepsilon(P) \leq \frac{2b}{a+b}. \quad (4)$$

Полученная оценка является достижимой и равна 2, например, в случае, когда веса рёбер, вошедших в минимальный остов P менее двух раз, нулевые. Если элементы сети представлены точками в евклидовом пространстве, то расстояние между разными точками не может равняться нулю. Однако оценки (3) и (4) достигаются в пределе. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть пример на рис. 5 в [3].

В [13] рассматривается упомянутая выше модель покрытия III, где в качестве коммуникационной сети используется минимальный остов, связывающий узлы бесконечной решётки, в который входят рёбра веса $c_1 \approx 0,071$, $c_2 \approx 0,095$ и $c_3 \approx 1,071$. Значит, согласно (4) относительная погрешность для минимального остова дерева P_{III} в пределе равна

$$\frac{W(P_{III}) - W(T^*)}{W(T^*)} \leq \frac{2 \cdot 1,071}{1,142} - 1 \approx 0,87.$$

Напомним, что в задаче МВП задан граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Из леммы 1 следует, что любую задачу МВП можно свести к частному случаю задачи (1) — задаче \mathcal{P} .

Пусть некоторый полиномиальный алгоритм A строит Q -приближённое решение задачи \mathcal{P} , т. е.

$$1 \leq \frac{W(T_A)}{W^*} \leq Q, \quad (5)$$

где $W^* = W(T^*) = n^* + m$ — оптимальное значение целевой функции задачи \mathcal{P} , в котором n^* элементов множества I покрывают все объекты, а $W(T_A) = n' + m$ — значение функционала задачи \mathcal{P} на дереве, построенном алгоритмом A .

Предположим, что задача построения R -приближённого ($R > 1$) решения для МВП является NP-трудной. Тогда

$$\frac{n'}{n^*} = \frac{W(T_A) - m}{W^* - m} > R.$$

Из (5) имеем $W(T_A) \leq QW^*$. Значит,

$$QW^* - m > R(W^* - m), \quad Q > R - (R - 1)m/W^*.$$

Предположим, что степень графа G (максимальная степень вершин) равна $\Delta \leq k$. Известно, что задача МВП NP-трудна для каждого класса графов при $k \geq 3$ [4]. Так как в данном случае каждый элемент покрывает не более k объектов, то $n^* \geq m/k$. Следовательно, $W^* \geq m/k + m$ и $Q > 1 + (R - 1)/(k + 1)$.

В общем случае R зависит от k . Например, если $P \neq NP$, то при $k = 5$ не существует 1,0029-приближённого полиномиального алгоритма для задачи МВП (т. е. $R = 1,0029$) [4]. Значит, $Q > 1,00048$, и тем самым доказана

Теорема 2. Если $P \neq NP$, то не существует 1,00048-приближённого полиномиального алгоритма для задачи (1).

4. Эвристический алгоритм

Ниже предлагается способ приближённого решения задачи (1). Коротко он заключается в следующем. Сначала строится нижняя оценка оптимума задачи (1) путём решения задачи о минимальном остове графа относительно специальных весов рёбер. Затем к минимальному остову, найденному при вычислении нижней оценки, применяется процедура локального улучшения. Результирующее дерево является искомым приближённым решением задачи (1).

Вместо графа $G = (V, E)$ рассмотрим полный n -вершинный ориентированный граф K_n , в котором между каждой парой вершин $i, j \in V$ существует как дуга (i, j) веса $c_{ij} \geq 0$, так и дуга (j, i) веса $c_{ji} \geq 0$. Пусть $N_i(T) = \{j \in V \mid (i, j) \in T\}$.

Пусть $c_i = \min_{j \in V, j \neq i} c_{ij}$, $i \in V$, $c = \sum_{i \in V} c_i$, $a_{ij} = c_{ij} - c_i$, $i, j \in V$, $i \neq j$. Тогда функционал (1) принимает вид

$$W(T) = c + \sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} a_{ij}. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторую вершину i графа K_n . Остальные вершины упорядочим по неубыванию весов a_{ij} , т. е. $a_{ij_1} = 0 \leq a_{ij_2} \leq \dots \leq a_{ij_{n-1}}$. Неубывающую функцию $g_i(k) = a_{ij_k}$, $k = 1, \dots, n-1$, назовём *весовой функцией вершины i* . Через $h_i(k)$ обозначим произвольную неотрицательную неубывающую миноранту функции $g_i(k)$, т. е.

$$h_i(1) = 0 \leq h_i(2) \leq \dots \leq h_i(n-1), \quad h_i(k) \leq g_i(k), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Через z_{ij} обозначим приращения миноранты h_i , относимые к дугам (i, j) и вычисляемые по формулам $z_{ij_1} = 0$, $z_{ij_k} = h_i(k) - h_i(k-1)$, $k = 2, \dots, n-1$. С учётом (6) и введённых обозначений получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} W(T) - c &= \sum_{i \in V} \max_{j_k \in N_i(T)} g_i(k) \geq \sum_{i \in V} \max_{j_k \in N_i(T)} h_i(k) \\ &\geq \sum_{i \in V} \sum_{k | j_k \in N_i(T)} z_{ij_k} = \sum_{(i,j) \in T} (z_{ij} + z_{ji}). \end{aligned} \quad (7)$$

Симметричную матрицу с элементами $b_{ij} = b_{ji} = z_{ij} + z_{ji}$ обозначим через (b_{ij}) . С учётом неравенств (7) получаем следующую нижнюю оценку L для оптимального значения целевой функции задачи (1):

$$W^* = \min_T W(T) \geq c + \min_T \sum_{(i,j) \in T} b_{ij} = L. \quad (8)$$

Расчёт оценки L заключается в решении задачи о минимальном остовном дереве графа K_n с матрицей весов рёбер (b_{ij}) .

При вычислении нижней оценки (8) в качестве минорант h_i предлагается взять выпуклые оболочки весовых функций g_i , $i \in V$. Согласно (2) другая нижняя оценка для функционала (1) — это минимальный вес C остова в исходном графе с весами рёбер c_{ij} . Значит, в качестве нижней оценки целевой функции задачи (1) можно взять $\max\{C, L\}$.

Отметим, что лучшей (большей) нижней оценкой может быть как C , так и L . Действительно, рассмотрим следующий пример. Расположим элементы сети на плоскости с координатами $(9, 0)$, $(0, 0)$, $(9, 1)$, $(18, 0)$,

(9, 11). Каждому ребру (i, j) припишем вес c_{ij} , равный квадрату расстояния между точками i и j . В качестве минорант функций g_i возьмём их выпуклые оболочки. Тогда дерево $T = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$ — остов минимального веса для полного графа с весами b_{ij} — является оптимальным решением задачи. Кроме того, вес дерева T (нижняя оценка L) совпадает со значением целевой функции: $W(T) = L = 365$. Рассмотрим остов минимального веса для графа с весами c_{ij} :

$$P = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Тогда $W(P) = 443 > W(T)$, а $C = 263 < L$. Данный пример демонстрирует, что переход к весам b_{ij} может оказаться полезным как для получения лучшей нижней оценки, так и для построения более точного решения задачи (1). В примере нижняя оценка L в 1,68 раза больше нижней оценки, равной весу минимального остова в исходном графе.

Далее предлагается процедура локального улучшения, которая может быть применена к произвольному остовному дереву.

Пусть T — произвольное остовное дерево, а d — некоторый числовой параметр. Опишем процедуру локального улучшения дерева T . Для этого введём обозначения: R — текущее рекордное дерево, $D(T, d)$ — результирующее дерево на выходе процедуры.

НАЧАЛЬНЫЙ ШАГ. Ребро $(i, j) \in T$ назовём *чёрным*, если $\min\{a_{ij}, a_{ji}\} \geq d$, и *белым* в противном случае. Если все рёбра дерева T оказываются одного цвета, то алгоритм заканчивает работу с результатом $D(T, d)$.

Пусть рёбра дерева T имеют разные цвета и его белые рёбра образуют компоненты связности, которые обозначим через S_1, \dots, S_M . Полагаяем $R = T$.

В цикле по $m = 1, \dots, M$ выполняется

ОБЩИЙ ШАГ. Рассмотрим дерево R и компоненту S_m . Обозначим через B множество чёрных рёбер, инцидентных вершинам из S_m , а через N — множество вершин, инцидентных рёбрам из B и лежащих вне S_m .

Пусть $s \in S_m$, $E_s = \{(v, s), v \in N\}$, $T_s = (R \setminus B) \cup E_s$. Из деревьев R, T_s , $s \in S_m$, выбираем наилучшее и обозначаем его через R , т. е.

$$R = \arg \min \{W(R), \arg \min_{s \in S_m} W(T_s)\}.$$

КОНЕЧНЫЙ ШАГ. По завершении цикла по m полагаем $D(T, d) = R$.

Рассмотрим минимальное дерево T , полученное при расчёте нижней оценки (8).

Положим $d_i = \max_{j \in N_i(T)} a_{ij}$, $i \in V$.

Дерево $P = \arg \min \{W(D(T, d_i)), i \in V\}$ является искомым приближённым решением задачи (1).

5. Численный эксперимент

Для анализа эффективности эвристического алгоритма, предложенного в разд. 4, проведён численный эксперимент, в котором элементы сети случайно равномерно распределялись внутри квадрата со стороной 100.

Пусть T_1 — минимальное остовное дерево на графе с весами c_{ij} , T_2 — минимальное остовное дерево на графе с весами b_{ij} , для определения которых в качестве минорант функций g_i использовались их выпуклые оболочки, T_3 — минимальное остовное дерево на графе с весами b_{ij} , которые определялись с помощью взятия самих функций g_i в качестве минорант. Пусть L_1, L_2 и L_3 — веса деревьев T_1, T_2 и T_3 соответственно.

Эксперимент проводился для $n = 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ и 100. Для одной и той же размерности было сгенерировано 50 различных примеров. Для каждого сгенерированного примера алгоритм запускался с каждым из трёх деревьев T_1, T_2 и T_3 в качестве исходного. В качестве нижней оценки бралась величина $\max\{L_1, L_2, L_3\}$.

Для построения оптимального решения воспользуемся представлением дерева Штейнера, предложенным в [7], и запишем задачу (1) в виде задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Для записи ЦЛП предположим, что одна вершина графа (пусть это вершина 1) является корнем искомого дерева T , и будем считать, что все дуги дерева T ориентированы от корня. Обозначим $V_j = \{i \in V \mid (i, j) \in E\}$. Пусть переменная u_i равна числу дуг из корня в вершину i в искомом остоном дереве T (при этом $u_1 = 0$), $x_{ij} = 1$, если дуга (i, j) принадлежит дереву T , и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда задача может быть записана в следующем виде:

$$\sum_{i \in V} C_i \rightarrow \min_{x, u, C}, \quad (9)$$

$$c_{ij}x_{ij} \leq C_i, \quad c_{ij}x_{ij} \leq C_j, \quad i \in V, j \in V \setminus \{1\}, \quad (10)$$

$$\sum_{i \in V_j} x_{ij} = 1, \quad j \in V \setminus \{1\}, \quad (11)$$

$$1 - n(1 - x_{ij}) \leq u_j - u_i \leq 1 + n(1 - x_{ij}), \quad (i, j) \in E, \quad (12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad u_i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad i \neq 1; \quad u_1 = 0. \quad (13)$$

Для решения задачи (9)–(13) при малых размерностях ($n \leq 20$) применялся пакет CPLEX, который предоставлен авторам в рамках программы IBM Academic Initiative.

В [3] предложен метод ветвей и границ, основанный на другой постановке задачи (1) в виде задачи ЦЛП. Этот метод за приемлемое время строит оптимальное решение на 30–40 вершинах. Применение пакета CPLEX для (9)–(13) позволило решать задачу (1) не более чем на 20 вершинах. При $n > 20$ относительная точность алгоритма оценивалась величиной $R = \frac{W(A)}{\max\{L_1, L_2, L_3\}}$.

Чтобы продемонстрировать результаты экспериментов, введём обозначения: $P = \arg \max\{L_1, L_2, L_3\}$, $Q = \arg \min_{T \in \{T_1, T_2, T_3\}} \{W(A(T))\}$. Улучшение решения алгоритмом обозначим через

$$I(T) = 100\% \cdot \frac{W(T) - W(A(T))}{W(T)}.$$

Т а б л и ц а 1

Средние значения относительной точности

n	$\varepsilon(A(P))$	$\varepsilon(A(Q))$	$\varepsilon(A(T_1))$	$\varepsilon(A(T_2))$	$\varepsilon(A(T_3))$
5	1,02323	1,02199	1,02587	1,02323	1,02413
10	1,02046	1,02026	1,02545	1,02252	1,22374
15	1,03056	1,02703	1,02619	1,04297	1,45522
20	1,03592	1,03444	1,03303	1,08635	1,7503

Т а б л и ц а 2

Средние значения оценок сверху на относительную точность

n	$R(A(P))$	$R(A(Q))$	$R(A(T_1))$	$R(A(T_2))$	$R(A(T_3))$
30	1,23717	1,23072	1,23717	1,27233	2,63508
40	1,2309	1,2309	1,2309	1,45989	3,10877
50	1,21145	1,21145	1,21145	1,44256	3,40106
60	1,20451	1,20451	1,20451	1,53906	3,77661
70	1,20162	1,20162	1,20162	1,66828	4,22862
80	1,2069	1,2069	1,2069	1,74425	4,57752
90	1,20338	1,20338	1,20338	1,84641	4,94562
100	1,20327	1,20327	1,20327	1,90425	5,16939

Из табл. 1–4 следует, что алгоритм строит в среднем 1,025-приближённое решение при малых размерностях $n \leq 20$ и 1,21-приближённое

решение при $n > 20$. При малой размерности ($n \leq 10$) алгоритм локальных улучшений с деревом T_2 , взятым в качестве исходного, в среднем строит лучшее решение, чем этот же алгоритм на дереве T_1 , а при $n = 5$ L_2 превосходит L_1 в среднем более чем на 10%. При $n \geq 30$ величина L_1 всегда является наибольшей нижней оценкой для задачи (1), а наилучшее решение получается, если исходным деревом является T_1 , причём при больших n в случае неудачного выбора исходного дерева значение целевой функции на полученном решении может превышать оптимальное значение более чем в 5 раз. Следует также отметить, что оценка качества алгоритма меняется незначительно с ростом n в случае, если дерево T_1 выбрано в качестве исходного, в то время как деревья T_2 и T_3 целесообразно строить лишь при малых значениях n .

Т а б л и ц а 3

Средние значения нижних оценок и решений, построенных алгоритмом и пакетом CPLEX (W^* — значение целевой функции на оптимальном решении)

n	L_1	L_2	L_3	W^*	$W(A(T_1))$	$W(A(T_2))$	$W(A(T_3))$
5	137,831	151,929	141,164	196,182	201,213	200,661	201,205
10	205,192	200,587	183,04	260,276	267,26	266,347	318,325
15	255,102	244,644	217,732	314,196	322,573	327,784	455,07
20	306,074	287,666	253,887	370,694	383,06	402,655	645,289
30	380,788	353,942	313,516	—	470,951	484,616	999,965
40	431,685	387,242	340,2	—	531,051	629,013	1339,52
50	486,356	435,735	386,743	—	588,903	701,197	1652
60	528,04	466,71	414,695	—	635,942	812,682	1994,48
70	570,238	506,142	451,653	—	685,088	950,265	2409,22
80	606,016	528,798	472,553	—	731,176	1055,71	2769,35
90	640,283	555,639	497,559	—	770,364	1181,28	3160,63
100	671,691	577,833	519,057	—	808,079	1278,5	3469,25

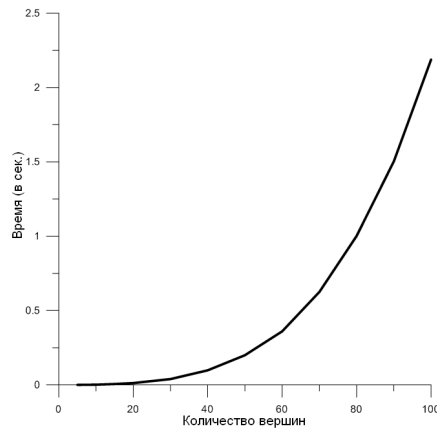
В табл. 4 использованы следующие обозначения: P_1 — доля случаев, когда $L_1 = \max\{L_1, L_2, L_3\}$, P_2 — доля случаев, когда $L_2 = \max\{L_1, L_2, L_3\}$ (в процентах), $O(T)$ — доля случаев, когда алгоритм A строит оптимальное решение с деревом T , взятым в качестве исходного (в процентах).

Графики на рис. 2 отражают изменение времени работы предложенного алгоритма и CPLEX с ростом размерности. Уже при $n = 20$ среднее время работы пакета CPLEX довольно велико — около 250 секунд. Рис. 3 изображает изменение доли улучшения решения алгоритмом с ростом n при выборе дерева P в качестве исходного. Отметим, что из данных табл. 4 и рис. 3 следует, что при $n \geq 20$ алгоритм улучшает решение T_1 в среднем на 2–2,5%. На рис. 4 изображены значения относительных

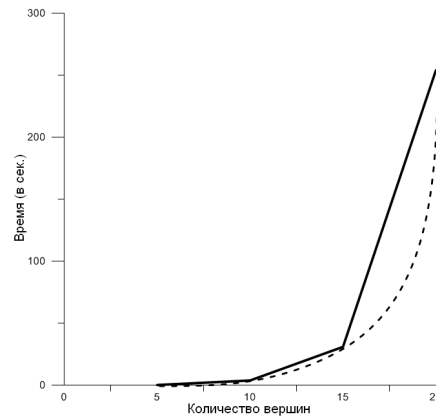
точностей для всех сгенерированных примеров при выборе дерева T_1 в качестве исходного.

Т а б л и ц а 4

n	P_1	P_2	$O(P)$	$O(Q)$	$O(T_1)$	$O(T_2)$	$O(T_3)$
5	22	64	62	64	60	62	60
10	52	48	28	32	30	28	2
15	76	24	12	18	18	6	0
20	88	12	2	0	2	2	0
30	100	0	—	—	—	—	—
40	100	0	—	—	—	—	—
50	100	0	—	—	—	—	—
60	100	0	—	—	—	—	—
70	100	0	—	—	—	—	—
80	100	0	—	—	—	—	—
90	100	0	—	—	—	—	—
100	100	0	—	—	—	—	—



а) Время работы алгоритма А



б) Время работы пакета CPLEX

Рис. 2. Среднее время работы

6. Выводы

В работе дана математическая постановка NP-трудной в сильном смысле задачи комбинаторной оптимизации, которая адекватно отражает проблему построения коммуникационной сети в некоторых технических системах (например, в беспроводных сенсорных сетях). Найдены частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. Показано, что минимальный остов, веса рёбер которого принадлежат отрезку $[a, b]$, является $(2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)})$ -приближённым решением и что задача постро-

ения 1,00048-приближённого решения NP-трудна. Предложен полиномиальный эвристический алгоритм. Проведён численный эксперимент, показавший высокую эффективность предложенного алгоритма. В среднем строилось 1,025-приближённое решение при малых размерностях $n \leq 20$ и 1,21-приближённое решение при $n > 20$. Этот разрыв обусловлен тем, что для оценки качества алгоритма для больших размерностей использовалась нижняя оценка вместо оптимального значения целевой функции.

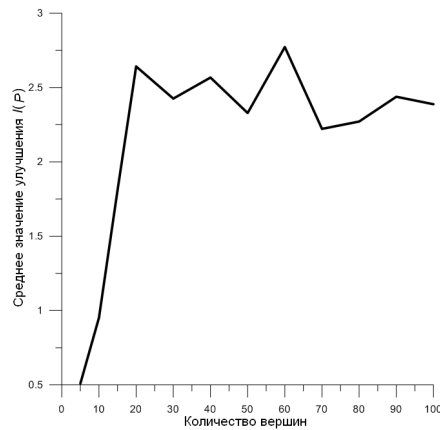


Рис. 3. Улучшение дерева P алгоритмом $(I(P))$

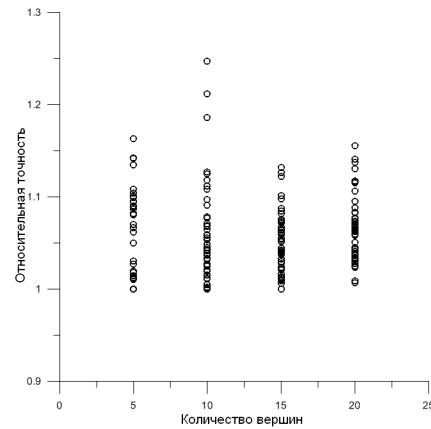


Рис. 4. Все значения $\text{ratio}(A(T_1))$

ЛИТЕРАТУРА

1. Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 3–19.
2. Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958. — 365 с.
3. Althaus E., et al. Power efficient range assignment for symmetric connectivity in static ad hoc wireless networks // Wireless Networks. — 2006. — Vol. 12, N 3. — P. 287–299.
4. Berman P., Karpinski M. On some tighter inapproximability results // Electron. Colloquium Computational Complexity (ECCC). — 1998. — TR98-065.
5. Clementi A. E. F., Penna P., Silvestri R. On the power assignment problem in radio networks // Electron. Colloquium Computational Complexity (ECCC). — 2000. — TR00-054.
6. Carmi P., Katz M. L. Power assignment in radio networks with two power levels // Algorithmica. — 2007. — N 47. — P. 183–201.

7. **Diane M., Plesnik J.** An integer programming formulation of the Steiner problem in graphs // Math. Methods Oper. Res. — 1993. — N 37. — P. 107–111.
8. **Kershner R.** The number of circles covering a set // Amer. J. Math. — 1939. — Vol. 61, N 3. — P. 665–671.
9. **Kirousis L. M., Kranakis E., Krizanc D., Pelc A.** Power consumption in packet radio networks // Theor. Comput. Sci. — 2000. — N 243. — P. 289–305.
10. **Pottie G. J., Kaiser W. J.** Wireless integrated network sensors // Commun. ACM. — 2000. — Vol. 43, N 5. — P. 51–58.
11. **Tóth F. G.** Covering the plane with two kinds of circles // Discrete Comput. Geometry. — 1995. — Vol. 13, N 3. — P. 445–457.
12. **Wu J., Dai F.** Virtual backbone construction in MANETs using adjustable transmission ranges // IEEE Trans. Mobile Comput. — 2006. — Vol. 5, N 9. — P. 1188–1200.
13. **Wu J., Yang S.** Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Int. J. Found. Comput. Sci. — 2005. — Vol. 16, N 1. — P. 3–17.
14. **Zhang H., Hou J. C.** Maintaining sensing coverage and connectivity in large sensor networks // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. — 2005. — Vol. 1, N 1–2. — P. 89–124.

Ерзин Адиль Ильясович,

e-mail: adilerzin@math.nsc.ru

Плотников Роман Викторович,

e-mail: nomad87@ngs.ru

Шамардин Юрий Владиславович,

e-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила

17 января 2012 г.

Переработанный вариант —

28 марта 2012 г.