ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2013. Том 20, № 1. С. 37–44

УДК 519.87

НОВАЯ ДОСТИЖИМАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ВЕРШИН В ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЯХ РАЗМЕРНОСТИ ЧЕТЫРЕ

Э. А. Монахова

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации неориентированных циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Получена новая нижняя оценка достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерности четыре и диаметров $d \equiv 0 \pmod 4$, улучшенная на $O(d^3)$ по сравнению с наилучшей известной. Построено бесконечное семейство циркулянтов, достигающих найденной оценки. Найденные графы, как предполагаем, являются максимально возможными циркулянтами размерности четыре.

Ключевые слова: неориентированная циркулянтная сеть, диаметр, максимальный порядок графа.

Введение

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k, n$ — целые числа такие, что $1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n/2$. Неориентированный граф C с множествами вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и рёбер $E = \{(i,j) : |i-j| \equiv s_l \pmod n,\ l = \overline{1,k}\}$, называется *циркулянтным*, числа $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — *образующими*, k — *размерностью*, n — *порядком* графа. Циркулянтные графы (сети) являются графами Кэли абелевых групп и находят широкое применение [2, 3, 6].

Диаметром графа G называется $d(G) = \max\limits_{i,j \in V} d(i,j)$, где $d(i,j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G. Пусть для любых натуральных d и k $M(d,k)$ — максимально возможное (достижимое) натуральное n такое, что существует множество образующих $S = (1, s_2, \ldots, s_k)$, при котором $d(C(n;S)) \leqslant d$. Известно, что

$$M(d,k) \leqslant \sum_{i=0}^{k} C_k^i C_d^{k-i} 2^{k-i},$$

где верхняя граница может рассматриваться как граница Мура для циркулянтных графов размерности k. Получение точных значений функции $M(d,k)$ для $k \geqslant 3$ достаточно трудоёмко и сводится к полному перебору параметрических описаний графа. В данной работе исследуются максимально возможные циркулянтные сети размерности четыре с единичной образующей.

Для размерности 2 задача построения двумерных циркулянтов с единичной образующей и максимальным порядком, равным $2d(d+1)+1 = M(d,2)$ при любом диаметре d, решена [2], для размерности 3 в [3, 4, 9] улучшена нижняя оценка достижимого порядка циркулянтных графов. В [8] найдены экстремальная функция $M(d,k)$ для размерности $k=3$ и любого диаметра d, а также бесконечные семейства трёхмерных циркулянтов с порядком, совпадающим с $M(d,3)$, вид которой, как оказалось, зависит от класса вычетов d по модулю 3. В [5] представлен новый метод исследования экстремальных графов Кэли абелевых групп с $k \geqslant 2$ образующими. В частности, доказано, что существует граф Кэли абелевой группы с тремя образующими, который имеет диаметр d и размер, равный $M(d,3)$, но не доказана максимальность найденного графа. Для размерности 4 в [1] улучшена оценка функции $M(d,4)$ на $O(3d^3/2)$ по сравнению с [4] для любого нечётного диаметра $d > 1$. Аналогичная задача для графов диаметра два и некоторых последовательностей степеней рассмотрена в [7].

В данной статье получена новая нижняя оценка экстремальной функции $M(d,4)$ для чётных диаметров $d \equiv 0 \pmod 4$ и построено семейство циркулянтных сетей, достигающих найденной оценки. Исходя из компьютерных вычислений и доказательства теоремы 1, предполагаем, что построенные графы суть максимально возможные циркулянтные графы размерности 4 для заданного вида диаметров.

1. Семейство циркулянтов диаметра d

Теорема 1 позволяет улучшить нижнюю оценку функции $M(d,4)$ конструктивным путём — посредством получения бесконечного семейства циркулянтов, достигающих этой оценки.

Теорема 1. *Пусть* $d \equiv 0 \pmod 4$, $d > 0$, $S = (1, s_2, s_3, s_4)$, *где*

$$s_2 = d+1, \quad s_3 = d^3/2 + d^2/2 + d, \quad s_4 = d^3/2 + 3d^2/2 + 3d + 2, \tag{1}$$

$$n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1. \tag{2}$$

Тогда $d(C(n;S)) = d$.

Доказательство. Пусть $d \equiv 0 \pmod 4$, $d \geqslant 4$. Рассмотрим циркулянтный граф $C(n; 1, s_2, s_3, s_4)$ с образующими s_i, $i = \overline{2, 4}$, и порядком n, заданными посредством (1) и (2). Имеем $n = (d/2) \sum\limits_{i=1}^{4} s_i + 1$.

Пусть $\Delta = s_4 - s_3 = (d+1)^2 + 1 = s_2^2 + 1$, тогда $s_4 = (d+1)\Delta/2 + s_2$. Пронумеруем вершины графа от 0 до $n-1$. Длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x обозначим через $D(x) = d(0, x)$, $0 \leqslant x < n$. Определим $+s_4$- и $-s_4$-связи из x, если идти по ним в вершину $x + s_4 \pmod n$ (в прямом направлении) или в $x - s_4 \pmod n$ (в обратном направлении) соответственно. Аналогично определим $+s_3$- и $-s_3$-, $+s_2$- и $-s_2$- и $+1$- и -1-связи. Кроме шагов длины 1 будем также использовать $\pm\Delta$-связи длины 2.

Требуется доказать, что $D(x) \leqslant d$ для любой вершины $0 \leqslant x < n$. Поскольку граф является вершинно-транзитивным, достаточно рассмотреть вершины с номерами $0 \leqslant x \leqslant (n-1)/2$. Удобнее рассмотреть вершины с номерами $0 \leqslant x \leqslant ds_4/2 > (n-1)/2$.

Предварительно докажем следующее утверждение.

В рассматриваемом графе любой интервал вершин с номерами $[a, b]$ *длины* $b - a = \Delta/2$ *с суммой* $D(a) + D(b) = d$ *обладает свойством*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} D(x) = d. \tag{3}$$

В самом деле, пусть $D(a) = l$, $D(b) = d - l$, $l = \overline{0, d}$. Все вершины с номерами из $[a, b]$ можно достичь либо $+s_2$- и ±1-связями из вершины a, либо $-s_2$- и ±1-связями из b. Номер первой вершины от a, для которой $D(x) = d+1$ (без учёта $-s_2$-связей из b), есть $x = a + (d/2 - l)s_2 + d/2 + 1$. С другой стороны, учитывая $-s_2$-связи из b, имеем $x = b - ls_2$, т. е. существует путь длины d в данную вершину. Для остальных вершин с расстоянием до 0, превышающим d, использование $-s_2$- и ±1-связей из b также уменьшает до значения d функцию расстояний до вершины 0. В частности, свойство (3) выполняется, когда $D(a) = D(b) = d/2$.

Вернёмся к доказательству теоремы. В графе $C(n; S)$ справедливо соотношение $[0, ds_4/2] = \bigcup\limits_{i=1}^{d/2} (A_i \cup B_i \cup C_i)$, где $A_i = [(i-1)s_4, (i-1)s_4 + s_2]$, $B_i = [(i-1)s_4 + s_2, is_3]$, $C_i = [is_3, is_4]$.

1. Пусть $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{d/2} C_i$,

$$\bigcup_{i=1}^{d/2} C_i = \bigcup_{i=1}^{d/2} \bigcup_{k=0}^{d/2-i} ([x_{ik}, y_{ik}] \cup [y_{ik}, x_{i-1,k+1}]),$$

где $x_{ik} = is_3 + ks_4$, $y_{ik} = x_{ik} + \Delta/2$. Отсюда следует, что

$$D(x_{ik}) = D(x_{i-1,k+1}) = i + k \leqslant d/2$$

(равенство имеет место при $k = d/2 - i$). Так как

$$y_{ik} = n - (d/2 - i)s_3 - (d/2 - k)s_4,$$

имеем $D(y_{ik}) = d - (i + k)$. Тем самым

$$D(x_{ik}) + D(y_{ik}) = D(y_{ik}) + D(x_{i-1,k+1}) = d$$

для всех $i = \overline{1, d/2}$ и $k = \overline{0, d/2 - i}$. Таким образом, интервалы $[x_{ik}, y_{ik}]$ и $[y_{ik}, x_{i-1,k+1}]$ обладают свойством (3), а значит, $D(x) \leqslant d$ для любой вершины $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{d/2} C_i$.

2. Имеем

$$\bigcup_{i=1}^{d/2} B_i = \bigcup_{i=1}^{d/2} \left\{ \bigcup_{k=0}^{d/2-1-i} ([x_{ik}, y_{ik}] \cup [y_{ik}, x_{i,k+1}]) \cup [x_{i,d/2-i}, y_{i,d/2-i}] \right\},$$

где $x_{ik} = (i-1)s_4 + k\Delta + s_2$, $y_{ik} = x_{ik} + \Delta/2$ при $k = \overline{0, d/2 - 1 - i}$, $x_{i,d/2-i} = is_3 - \Delta/2 = (d/2 - 1)s_4 - (d/2 - i)s_3 + s_2$, $y_{i,d/2-i} = is_3$.

Так как для всех $x \in [x_{i,d/2-i}, y_{i,d/2-i}]$, $i = \overline{1, d/2}$, имеет место равенство

$$D(x_{i,d/2-i}) + D(y_{i,d/2-i}) = d,$$

данные интервалы вершин обладают свойством (3), а значит, $D(x) \leqslant d$ для любой вершины $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{d/2} [x_{i,d/2-i}, y_{i,d/2-i}]$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{d/2-1} B_i$. Из определения x_{ik} следует, что $D(x_{ik}) = i + 2k$. Учитывая, что

$$s_2 + \Delta/2 = ds_3/2 - (d/2 - 1)s_4,$$

получим $y_{ik} = (d/2-k)s_3 - (d/2-i-k)s_4$ и $D(y_{ik}) = d-i-2k$. Таким образом, $D(x_{ik}) + D(y_{ik}) = d$ для интервалов $[x_{ik}, y_{ik}]$ длины $\Delta/2$. По свойству (3) $D(x) \leqslant d$ для всех $x_{ik} \leqslant x \leqslant y_{ik}$, $i = \overline{1, d/2-1}$, $k = \overline{0, d/2-1-i}$.

Рассмотрим интервалы вершин $[y_{ik}, x_{i,k+1}]$. Имеем

$$x_{i,k+1} = (i-1)s_4 + (k+1)\Delta + s_2, \quad D(x_{i,k+1}) = i + 2k + 2.$$

Отсюда следует, что $D(y_{ik}) + D(x_{i,k+1}) = d + 2$ для всех $i = \overline{1, d/2-1}$ и $k = \overline{0, d/2-1-i}$. Разобьём каждый интервал на две части: $[y_{ik}, z_{ik}]$ и $[z_{ik}, x_{i,k+1}]$, где $z_{ik} = x_{i,k+1} - s_2 = (i-1)s_4 + (k+1)\Delta$. Из определения z_{ik} следует, что $D(z_{ik}) = i + 2k + 1$. Интервал $[y_{ik}, z_{ik}]$ имеет длину, равную $\Delta/2 - s_2$, и $D(y_{ik}) + D(z_{ik}) = d + 1$. По этой причине для обеспечения условия $D(x) \leqslant d$ на интервале $[y_{ik}, z_{ik}]$ достаточно использовать $+s_2$- и ± 1-связи из y_{ik} и $-s_2$- и ± 1-связи из z_{ik}.

На интервале $[z_{ik}, x_{i,k+1}]$ длины s_2 максимум $D(x)$ при использовании ± 1-связей достигается в вершине $x_0 = x_{i,k+1} - d/2$. Но есть путь в вершину x_0 из $y_{i,k+1}$, содержащий $d/2 + 1$ образующих s_2. Поскольку $D(y_{i,k+1}) = d - 1 - D(z_{ik})$, имеем $D(x_0) = 3d/2 - D(z_{ik})$. Отсюда $D(x_0) \leqslant d$ при $D(z_{ik}) \geqslant d/2$. Нетрудно определить, что $D(x_0) \leqslant d$ и при $D(z_{ik}) < d/2$. Таким образом, $D(x) \leqslant d$ для всех $z_{ik} \leqslant x \leqslant x_{i,k+1}$.

3. Пусть $x \in A_i$, $i = \overline{1, d/2}$, $A_i = [(i-1)s_4, (i-1)s_4 + s_2] = [x_i, z_i]$. Так как $D(x_i) = i - 1$, $D(z_i) = i$, возьмём самое большое значение $i = d/2$, для которого $\max\limits_{x_i \leqslant x \leqslant z_i} D(x) = d$. Тогда $\max\limits_{x_i \leqslant x \leqslant z_i} D(x) \leqslant d$ для всех $i = \overline{1, d/2}$.

4. Строго говоря, там, где получено $D(x) = d$, может быть $D(x) \leqslant d$. Поэтому остаётся показать, что в данном графе существует хотя бы одна вершина x такая, что $D(x) = d$. В качестве искомой вершины возьмём $x = (n-1)/2 = \frac{d}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$. Видно, что в данную вершину существует путь из 0 длины d. Он же является минимально возможным, так как $x - n = -\frac{d}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) - 1$ даёт путь длины $d+1$ и длины всех других возможных путей из 0 в x не менее d. Следовательно, $D(x) = d$. Теорема 1 доказана.

В табл. 1 даны примеры описаний циркулянтов размерности 4, полученных в теореме 1.

Таким образом, нижняя оценка достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерности $k = 4$ улучшена на $O(5d^3/2)$ по сравнению с оценкой из [4], а также улучшает оценку [5], найденную с помощью плотного покрытия решётками пространства $\mathbb{Z}^k$.

Таблица 1

Описания циркулянтов из теоремы 1

d	n	s_1, s_2, s_3, s_4	$(s_4 - s_3)/2$
4	241	1, 5, 44, 70	$M(2,2) = 13$
8	2737	1, 9, 296, 378	$M(4,2) = 41$
12	12481	1, 13, 948, 1118	$M(6,2) = 85$
16	37537	1, 17, 2192, 2482	$M(8,2) = 145$
20	89041	1, 21, 4220, 4662	$M(10,2) = 221$
24	181201	1, 25, 7224, 7850	$M(12,2) = 313$

2. К вопросу об экстремальной функции $M(d, 4)$

С помощью программы синтеза циркулянтных графов показано, что $C(241; 1, 5, 44, 70)$ — максимально возможный циркулянтный граф диаметра $d = 4$. Остальные наборы образующих для $C(241; 1, 5, 44, 70)$, представленные в табл. 2, получаются путём эквивалентного преобразования [2] из образующих $(1, 5, 44, 70)$.

Таблица 2

Описания максимальных циркулянтов диаметра d

d	$n = M(d, 4)$	$S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$
1	9	(1, 2, 3, 4)
2	35	(1, 6, 7, 10), (1, 7, 11, 16)
3	99	(1, 24, 39, 44)
4	241	(1, 5, 44, 70), (1, 14, 48, 57), (1, 31, 82, 86), (1, 93, 97, 115)
5	511	(1, 5, 70, 96), (1, 14, 83, 102), (1, 165, 197, 203)

В табл. 2 представлены также максимально возможные циркулянты для других диаметров, полученные с помощью программы синтеза.

При доказательстве теоремы 1 показано, что

$$\Delta/2 = M(D, 2), \quad s_2 = 2D + 1, \quad \text{где } D = d/2.$$

Таким образом, величина $\Delta/2$ в данном графе равна числу вершин максимально возможного двумерного циркулянта диаметра D с единичной образующей. При этом образующая s_2 как раз и обеспечивает максимальность двумерного графа. Тем самым величина $\Delta/2$ (соответственно Δ) является максимально возможной при данном s_2 как основная единица разметки расстояний в данном графе. Отметим, что

$$n = (4D^2 + 2)M(D, 2) + 2D^2 - 1 = S(D, 3) \cdot M(D, 2) + S(D, 3)/2 - 2,$$

где $S(D,3)$ — максимально возможное число вершин на расстоянии D от 0 для трёхмерного циркулянта, $M(D,2)$ — максимальное число вершин на всех расстояниях от 0 до D для двумерного циркулянта.

С другой стороны, графы, полученные в теореме 1, имеют такое же соотношение между порядком n и суммой образующих, как экстремальные графы размерностей 2 и 3, а именно,

$$n = \lfloor (2d+1)/k \rfloor \sum_{i=1}^{k} s_i + 1.$$

Имеем

$$M(d,2) = d \sum_{i=1}^{2} s_i + 1$$

при любом d для $k = 2$;

$$M(d,3) = (2d/3) \sum_{i=1}^{3} s_i + 1$$

при $d \equiv 0 \pmod 3$ для $k = 3$ [8] и, наконец, для наших графов

$$n = (d/2) \sum_{i=1}^{4} s_i + 1 \quad \text{при } d \equiv 0 \pmod 4.$$

Таким образом, исходя из вышесказанного и компьютерных вычислений, можно выдвинуть следующую гипотезу:

$$M(d,4) = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1 \quad \text{для } d \equiv 0 \pmod 4.$$

Остаётся открытым вопрос о виде экстремальной функции $M(d,4)$ для других диаметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монахова Э. А.** Оптимизация циркулянтных сетей связи размерности четыре // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 58–64.
2. **Монахова Э. А.** Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикл. дискрет. математика. — 2011. — Т. 13, № 3. — С. 92–115.
3. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distrib. Comput. — 1995. — Vol. 24. — P. 2–10.

4. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. — 1993. — Vol. 23. — P. 257–260.
5. **Dougherty R., Faber V.** The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs. 1: The abelian case // SIAM J. Discrete Math. — 2004. — Vol. 17, N 3. — P. 478–519.
6. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theoret. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 299. — P. 107–121.
7. **Macbeth H., Siagiova J., Siran J.** Cayley graphs of given degree and diameter for cyclic, abelian, and metacyclic groups // Discrete Math. — 2012. — Vol. 312, N 1. — P. 94–99.
8. **Monakhova E.** Optimal triple loop networks with given transmission delay: topological design and routing // Proc. Int. Network Optimization Conf. INOC'2003. — Evry/Paris, France: Institut National des Telecommunications, 2003. — P. 410–415.
9. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — Vol. 21. — P. 392–402.

Монахова Эмилия Анатольевна,
e-mail: emilia@rav.sscc.ru

Статья поступила
23 апреля 2012 г.

Переработанный вариант —
21 сентября 2012 г.